KOLOKWIUM nr 1A, 5.04.2022, godz. 12:15–13:00

Zadanie **1a. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{1+\sqrt{x^3+1}}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt{x^3+1}\,,$$

czyli

$$t^2=x^3+1$$

oraz formalnie

$$2t\,dt=3x^2\,dx\,,$$

zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnąca, a zatem przedziałowi całkowania $x\in[0,\,2]$ odpowiada przedział $t\in[1,\,3]$.

Otrzymujemy[1]

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{1+\sqrt{x^3+1}}=\frac{2}{3}\cdot\int_1^3 \frac{t\,dt}{t+1}=\frac{2}{3}\cdot\int_1^3 \frac{(t+1)-1}{t+1}\,dt=\frac{2}{3}\cdot\int_1^3 1-\frac{1}{t+1}\,dt=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\left(t-\ln(t+1)\Big|_{t=1}^{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot(3-\ln 4-1+\ln 2)=\frac{2}{3}\cdot(2-\ln 2)=\frac{4}{3}-\frac{2\cdot\ln 2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{4}{3}-\frac{2\cdot\ln 2}{3}$.

[1]Ponieważ w przedziale całkowania liczba $t+1$ jest dodatnia, możemy użyć zapisu $\ln(t+1)$ zamiast $\ln|t+1|$.

Zadanie **2a. (10 punktów)**
Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^4 \sqrt[5]{x^3+5}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 347/160.

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[5]{x^3+5}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{3x^2}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{6x}{5\cdot\left(x^3+5\right)^{4/5}}-\frac{4\cdot 3x^2\cdot 3x^2}{5\cdot 5\cdot\left(x^3+5\right)^{9/4}}=\frac{30x\cdot\left(x^3+5\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/4}}-\frac{36x^4}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/4}}=$$
$$=\frac{6x\cdot\left(25-x^3\right)}{25\cdot\left(x^3+5\right)^{9/4}}<0$$

dla $x>\sqrt[3]{25}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt[3]{25},\infty\right)$. Ponieważ

$$\sqrt[3]{25}<\sqrt[3]{27}=3\,,$$

powyższy przedział zawiera interesujący nas przedział całkowania $[3,4]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>3$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=3$.

Ponieważ

$$f(3)=2 \quad \text{oraz} \quad f'(3)=\frac{27}{80}\,,$$

dla $x>3$ zachodzi nierówność

$$f(x)<2+\frac{27\cdot(x-3)}{80}$$

i w konsekwencji

$$\int_3^4 \sqrt[5]{x^3+5}\,dx<\int_3^4 2+\frac{27\cdot(x-3)}{80}\,dx=2+\frac{27}{160}=\frac{347}{160}\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 347/160.

KOLOKWIUM nr 1B, 6.04.2022, godz. 16:15–17:00

Zadanie **1b. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonamy podstawienie

$$t=\sqrt[15]{x}\,,$$

czyli

$$x=t^{15}$$

oraz formalnie

$$dx=15\cdot t^{14}\,dt\,,$$

zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnąca, a zatem przedziałowi całkowania $x\in[0,\,1]$ odpowiada przedział $t\in[0,\,1]$.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x^4}}=15\cdot\int_0^1 \frac{t^{14}\,dt}{t^{10}+t^{12}}=15\cdot\int_0^1 \frac{t^4\,dt}{1+t^2}=15\cdot\int_0^1 \frac{t^4-1+1}{t^2+1}\,dt=15\cdot\int_0^1 t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=15\cdot\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg} t\,\Bigg|_{t=0}^{1}\right)=15\cdot\left(\frac{1}{3}-1+\operatorname{arctg} 1\right)=15\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-10+\frac{15\cdot\pi}{4}\,.$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{15\cdot\pi}{4}-10$.

Zadanie **2b. (10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_2^3 \sqrt[3]{x^5-5}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 121/27.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^5-5}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{5x^4}{3\cdot\left(x^5-5\right)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{20x^3}{3\cdot\left(x^5-5\right)^{2/3}}-\frac{2\cdot 5x^4\cdot 5x^4}{3\cdot 3\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}=\frac{60x^3\cdot\left(x^5-5\right)}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}-\frac{50x^8}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}=$$

$$=\frac{10x^3\cdot\left(x^5-30\right)}{9\cdot\left(x^5-5\right)^{5/3}}>0$$

dla $x>\sqrt[5]{30}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\left[\sqrt[5]{30},\infty\right)$. Ponieważ

$$\sqrt[5]{30}<\sqrt[5]{32}=2\,,$$

powyższy przedział zawiera interesujący nas przedział całkowania $[2,3]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>2$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=2$. Ponieważ

$$f(2)=3 \quad \text{oraz} \quad f'(2)=\frac{80}{27}\,,$$

dla $x>2$ zachodzi nierówność

$$f(x)>3+\frac{80\cdot(x-2)}{27}$$

i w konsekwencji

$$\int_2^3 \sqrt[3]{x^5-5}\,dx>\int_2^3 3+\frac{80\cdot(x-2)}{27}\,dx=3+\frac{40}{27}=\frac{121}{27}\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 121/27.