Egzamin, 30.06.2022, godz. 9:00–10:40

Zadanie **51** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **510–519** podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

---

510. $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt{7x+1}} = \dots\dots\dots$ **511.** $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt{9x+1}} = \dots\dots\dots$

---

512. $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{7x+1}} = \dots\dots\dots$ **513.** $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{9x+1}} = \dots\dots\dots$

---

514. $\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[6]{7x+1}} = \dots\dots\dots$ **515.** $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[6]{9x+1}} = \dots\dots\dots$

---

516. $\int\limits_0^1 \frac{x^{10}}{x^{11}+1}\, dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

517. $\int\limits_0^1 \frac{x^{20}}{x^{21}+1}\, dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

518. $\int\limits_0^1 \frac{x^{10}}{x^{22}+1}\, dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

519. $\int\limits_0^1 \frac{x^{20}}{x^{42}+1}\, dx = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Zadanie **52 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{8}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(x+1)\cdot(x+10)}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln p+v\cdot\ln q$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w, v liczbami wymiernymi.

Zadanie **53 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_{2}^{4}\ln x\,dx\,.$$

Zadanie **54 (10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki

$$\int_{160\,000}^{160\,001} 100\cdot\ln x-\sqrt{x}\,dx=798,292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

jest mniejsza czy większa od

$$400\cdot\ln 20-400-\frac{1}{3200}=798,292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

Zadanie **55** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **550–559** podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

550. $\int\limits_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}\,dx =$ ....

551. $\int\limits_0^{\sqrt{30}} \sqrt{30-x^2}\,dx =$ ....

552. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{6-x^2}\,dx =$ ....

553. $\int\limits_0^{\sqrt{15}} \sqrt{30-x^2}\,dx =$ ....

554. $\int\limits_0^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx =$ ....

555. $\int\limits_0^{\sqrt{5}} \sqrt{20-x^2}\,dx =$ ....

556. $\int\limits_0^{\sqrt{7}} \sqrt{28-x^2}\,dx =$ ....

557. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx =$ ....

558. $\int\limits_0^{\sqrt{15}} \sqrt{20-x^2}\,dx =$ ....

559. $\int\limits_0^{\sqrt{21}} \sqrt{28-x^2}\,dx =$ ....

Przypomnienie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Zadanie **56** **(ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć sumę szergu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+n^2}\,.$$

Zadanie **57** **(ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć sumę szergu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(6n+1)^2}+\frac{1}{(6n+5)^2}\right)\,.$$

Egzamin, 30.06.2022, godz. 11:00–12:40

Zadanie **61** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+4x+7}\, dx\,.$$

Zadanie **62** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}\,.$$

Zadanie **63** **(10 punktów)**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n\cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot \binom{4n}{n}\cdot x^{3n}}{n!}\,.$$

Zadanie **64** **(10 punktów)**

Zapisać liczbę

$$\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 5+\operatorname{arctg} 8$$

w postaci niezawierającej ”arctg”.

Zadanie **65** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **650–659** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

Wiadomo, że

$$a_n = \frac{n+2}{n}\,.$$

Wobec tego:

---

650. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \ .....$ **651.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \ .....$

---

652. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^3 - a_{n+1}^3\right) = \ .....$ **653.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^4 - a_{n+1}^4\right) = \ .....$

---

654. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

---

655. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}\right) =$ ....

---

656. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}\right) =$ ....

---

657. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}\right) =$ ....

---

658. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3^{a_n} - 3^{a_{n+2}}\right) =$ ....

---

659. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}\right) =$ ....

Zadanie **66 (ZADANIE DODATKOWE)**

Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\int_0^\infty \frac{t^x}{t^{10}+1}\,dt\,.$$

Zadanie **67 (ZADANIE DODATKOWE)**

Dla odpowiednio dobranej wartości parametru k udowodnić następujące twierdzenie: Niech (a_n) będzie malejącym ciągiem zbieżnym do zera. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^\infty a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^\infty n^k a_{n^4}\,.$$