Egzamin, 30.06.2022, godz. 9:00–10:40

Zadanie **51** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **510–519** podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

---

510. $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{7x+1}} = \mathbf{2}$ **511.** $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt{9x+1}} = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{9}}$

---

512. $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{7x+1}} = \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{14}}$ **513.** $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{9x+1}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

---

514. $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[6]{7x+1}} = \frac{\mathbf{186}}{\mathbf{35}}$ **515.** $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[6]{9x+1}} = \frac{\mathbf{62}}{\mathbf{15}}$

---

516. $\int_0^1 \frac{x^{10}}{x^{11}+1}\,dx = \frac{\mathbf{ln\ 2}}{\mathbf{11}}$

---

517. $\int_0^1 \frac{x^{20}}{x^{21}+1}\,dx = \frac{\mathbf{ln\ 2}}{\mathbf{21}}$

---

518. $\int_0^1 \frac{x^{10}}{x^{22}+1}\,dx = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{44}}$

---

519. $\int_0^1 \frac{x^{20}}{x^{42}+1}\,dx = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{84}}$

Zadanie **52** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_8^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(x+1)\cdot(x+10)}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln p+v\cdot\ln q$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w, v liczbami wymiernymi.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+10)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+10}\,,$$

$$1=A\cdot(x+1)\cdot(x+10)+B\cdot x\cdot(x+10)+C\cdot x\cdot(x+1)\,.$$

Podstawiamy[1] za x wartości 0, -1 i -10 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\quad 1=10\cdot A,$ $\quad$ skąd $\quad A=1/10,$

dla $x=-1$ $\quad 1=-9\cdot B,$ $\quad$ skąd $\quad B=-1/9,$

dla $x=-10$ $\quad 1=90\cdot C,$ $\quad$ skąd $\quad C=1/90.$

Wobec tego[2]

$$\int_8^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(x+1)\cdot(x+10)}=\int_8^{\infty}\frac{1/10}{x}-\frac{1/9}{x+1}+\frac{1/90}{x+10}\,dx=$$

$$=\frac{1}{90}\cdot\left(9\cdot\ln|x|-10\cdot\ln|x+1|+\ln|x+10|\right)\Big|_{x=8}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{90}\cdot\left(9\cdot\ln|x|-10\cdot\ln|x+1|+\ln|x+10|\right)\right)\right)-\frac{1}{90}\cdot(9\cdot\ln 8-10\cdot\ln 9+\ln 18)=$$

$$=\frac{1}{90}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^9\cdot(x+10)}{(x+1)^{10}}\right)-\frac{1}{90}\cdot(27\cdot\ln 2-20\cdot\ln 3+\ln 2+2\cdot\ln 3)=$$

$$=\frac{1}{90}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{10}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{10}}\right)-\frac{1}{90}\cdot(28\cdot\ln 2-18\cdot\ln 3)=$$

$$=\frac{1}{90}\cdot\ln 1-\frac{28}{90}\cdot\ln 2+\frac{18}{90}\cdot\ln 3=-\frac{14}{45}\cdot\ln 2+\frac{1}{5}\cdot\ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $-\frac{14}{45}\cdot\ln 2+\frac{1}{5}\cdot\ln 3$.

[1] Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

[2] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Uwaga: Całki

$$\int_8^{\infty} \frac{1}{x}\, dx, \qquad \int_8^{\infty} \frac{1}{x+1}\, dx, \qquad \int_8^{\infty} \frac{1}{x+10}\, dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty} \ln|x|, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln|x+1|, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln|x+10|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym (czyli musi zostać ocenione na **co najwyżej 4 punkty**).

Zadanie **53** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_2^4 \ln x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Całkując przez części otrzymujemy

$$\int_2^4 1\cdot \ln x\, dx = x\cdot \ln x \Big|_{x=2}^{4} - \int_2^4 x\cdot \frac{1}{x}\, dx = 4\cdot \ln 4 - 2\cdot \ln 2 - \int_2^4 1\, dx = 6\cdot \ln 2 - 2\,.$$

Zadanie **54** **(10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki

$$\int\limits_{160\,000}^{160\,001} 100\cdot\ln x-\sqrt{x}\,dx = 798{,}292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

jest mniejsza czy większa od

$$400\cdot\ln 20-400-\frac{1}{3200}=798{,}292\,596\,921\,596\,397\ldots$$

Rozwiązanie:

Różniczkując funkcję podcałkową

$$f(x)=100\cdot\ln x-\sqrt{x}$$

otrzymujemy

$$f'(x)=\frac{100}{x}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{100}{x^2}+\frac{1}{4\cdot x^{3/2}}=\frac{-400+\sqrt{x}}{4\cdot x^2}>0$$

dla $x>160\,000$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $[160\,000,\infty)$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>160\,000$ leży powyżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie odpowiadającym $x=160\,000$. Ponieważ $f'(160\,000)=-1/1600$, dla $x>160\,000$ zachodzi nierówność

$$f(x)>f(160\,000)-\frac{1}{1600}\cdot(x-160\,000)\,.$$

Szacując całkę przez pole trapezu ograniczonego od góry styczną do wykresu funkcji podcałkowej otrzymujemy

$$\int\limits_{160\,000}^{160\,001} 100\cdot\ln x-\sqrt{x}\,dx>\frac{f(160\,000)+\left(f(160\,000)-\frac{1}{1600}\right)}{2}=f(160\,000)-\frac{1}{3200}=$$

$$=400\cdot\ln 20-400-\frac{1}{3200}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest większa od podanej liczby.

Zadanie **55 (10 punktów)**

W każdym z zadań **550–559** podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

---

550. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$

---

551. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{30}} \sqrt{30-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{15\pi}{2}}$

---

552. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{6-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}}$

---

553. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{15}} \sqrt{30-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{15\pi}{4}+\frac{15}{2}}$

---

554. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

---

555. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{20-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{5\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

---

556. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{28-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{7\pi}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{2}}$

---

557. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

---

558. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{15}} \sqrt{20-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{10\pi}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

---

559. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{21}} \sqrt{28-x^2}\,dx = \boldsymbol{\frac{14\pi}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{2}}$

Przypomnienie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

Zadanie **56 (ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć sumę szergu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2}\,.$$

Wskazówka:

Rozłożyć na ułamki proste.

Odpowiedź: $\dfrac{\pi^2}{6}-1$.

Zadanie **57 (ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć sumę szergu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(6n+1)^2}+\frac{1}{(6n+5)^2}\right).$$

Wskazówka:

Suma danego szeregu jest równa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(6n)^2}\,.$$

Odpowiedź: $\dfrac{\pi^2}{9}$.

Egzamin, 30.06.2022, godz. 11:00–12:40

Zadanie **61** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy trójmian w mianowniku wykonując po drodze podstawienia

$$t=x+2,\quad dx=dt$$

oraz

$$s=t/\sqrt{3},\quad t=s\cdot\sqrt{3},\quad dt=\sqrt{3}\,ds\,.$$

Otrzymujemy:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx=\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+2)^2+3}\,dx=\int_{1}^{3} \frac{1}{t^2+3}\,dt=$$

$$=\int_{1}^{3} \frac{1}{3\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+3}\,dt=\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{3\cdot s^2+3}\cdot\sqrt{3}\,ds=\left.\frac{\operatorname{arctg} s}{\sqrt{3}}\right|_{s=1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6\cdot\sqrt{3}}\,.$$

Zadanie **62** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt[15]{x}$, czyli $x=t^{15}$ i formalnie $dx=15\cdot t^{14}\,dt$.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}=15\cdot\int_0^1 \frac{t^{14}}{t^5+t^3}\,dt=15\cdot\int_0^1 \frac{t^{11}}{t^2+1}\,dt=15\cdot\int_0^1 \frac{t^{11}+t-t}{t^2+1}\,dt=$$

$$=15\cdot\int_0^1 t^9-t^7+t^5-t^3+t-\frac{t}{t^2+1}\,dt=15\cdot\left(\frac{t^{10}}{10}-\frac{t^8}{8}+\frac{t^6}{6}-\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}-\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}\Bigg|_{x=0}^{1}\right)=$$

$$=15\cdot\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}\right)=15\cdot\left(\frac{12-15+20-30+60}{120}-\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{47}{8}-\frac{15\cdot\ln 2}{2}\,.$$

Zadanie **63 (10 punktów)**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot \binom{4n}{n} \cdot x^{3n}}{n!} .$$

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium d'Alemberta przy założeniu $x \neq 0$.

Otrzymujemy:

$$\left| \frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1}^2 \cdot \binom{4n+4}{n+1} \cdot x^{3n+3} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n \cdot \binom{2n}{n}^2 \cdot \binom{4n}{n} \cdot x^{3n}} \right| =$$

$$= \frac{(2n+1)^2 \cdot (2n+2)^2 \cdot (4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot |x|^3}{(n+1)^5 \cdot (3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)} \to \frac{2^{12} \cdot e \cdot |x|^3}{27} .$$

Jeżeli $\frac{2^{12} \cdot e \cdot |x|^3}{27} < 1$, czyli $|x| < \frac{3}{16 \cdot \sqrt[3]{e}}$, to szereg jest zbieżny.

Jeśli natomiast $\frac{2^{12} \cdot e \cdot |x|^3}{27} > 1$, czyli $|x| > \frac{3}{16 \cdot \sqrt[3]{e}}$, to szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź: Promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $\frac{3}{16 \cdot \sqrt[3]{e}}$.

Zadanie **64 (10 punktów)**

Zapisać liczbę

$$\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 5+\operatorname{arctg} 8$$

w postaci niezawierającej "arctg".

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzoru

$$\operatorname{arctg} x=\arg(1+ix)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 5+\operatorname{arctg} 8=\arg(1+2i)+\arg(1+5i)+\arg(1+8i)=$$

$$=\arg\Big((1+2i)(1+5i)(1+8i)\Big)=\arg\Big((-9+7i)(1+8i)\Big)=\arg(-65-65i)=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\,.$$

Na podstawie oszacowań

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg} 2<\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg} 5<\frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg} 8<\frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy

$$\frac{3\pi}{4}<\operatorname{arctg} 2+\operatorname{arctg} 5+\operatorname{arctg} 8<\frac{3\pi}{2}\,,$$

skąd wynika, że $k=0$.

Odpowiedź: Podana liczba jest równa $5\pi/4$.

Zadanie **65** **(10 punktów)**

W każdym z zadań **650–659** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Za każdą poprawną odpowiedź otrzymasz **1 punkt.**

Wiadomo, że

$$a_n = \frac{n+2}{n}\,.$$

Wobec tego:

---

650. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{2}$ **651.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \mathbf{8}$

---

652. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^3 - a_{n+1}^3\right) = \mathbf{26}$ **653.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^4 - a_{n+1}^4\right) = \mathbf{80}$

---

654. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{6}$

---

655. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3^{a_n} - 3^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{24}$

---

656. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{60}$

---

657. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{8}$

---

658. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(3^{a_n} - 3^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{30}$

---

659. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{72}$

Zadanie **66** **(ZADANIE DODATKOWE)**

Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\int\limits_0^\infty \frac{t^x}{t^{10}+1}\,dt\,.$$

Wskazówka:

Podstawienie $t=1/s$ daje $f(x)=f(8-x)$, a nierówność między średnimi daje

$$t^4\leqslant\frac{t^x+t^{8-x}}{2}\,,$$

skąd

$$f(4)\leqslant\frac{f(x)+f(8-x)}{2}\,.$$

Odpowiedź: $f(4)=\dfrac{\pi}{10}$.

Zadanie **67** **(ZADANIE DODATKOWE)**

Dla odpowiednio dobranej wartości parametru k udowodnić następujące twierdzenie: Niech (a_n) będzie malejącym ciągiem zbieżnym do zera. Wówczas szereg

$$\sum_{n=1}^\infty a_n$$

jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=1}^\infty n^k a_{n^4}\,.$$

Wskazówka:

Stosujemy szacowania podobne jak dla szeregu harmonicznego czy kryterium zagęszczającego.

Odpowiedź: $k=3$.