

Lista 0

Uwaga. Ta lista nie jest punktowana. Jest przeznaczona do wykonania „z marszu” na zajęciach 21-26.02. Wszystkie funkcje na liście są elementami $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}$ o ile nie napisano inaczej. W ramach konwencji przyjmujemy $\log_a(0) = 0$ i $\log = \log_2$.

Zadanie 1 Podaj kilka przykładów funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ takich, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^2} = 0$.

Zadanie 2 Podaj przykład funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ takiej, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{e^n} = 0$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{|P(n)|} = \infty$ dla każdego niezerowego wielomianu $P \in \mathbb{R}[X]$. Spróbuj też znaleźć duży (najlepiej mocy \mathfrak{c}) zbiór funkcji A taki, że każda funkcja z A spełnia powyższą własność oraz dla każdych $f, g \in A$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \{0, \infty\}$.

Zadanie 3 Niech $a, b > 0$ i $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wyznacz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a f(n)}{\log_b f(n)}$.

Zadanie 4 Niech $\Xi = \{f \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty\}$. Niech relacja \ll na Ξ będzie zadana następująco:

$$f \ll g \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Pokaż, że \ll jest przechodnia. Czy jest słabo antysymetryczna?

Zadanie 5 Niech \ll będzie relacją z poprzedniego zadania. Uzasadnij, że gdy $1 < a < b$, to $n^a \ll n^b$ oraz $a^n \ll b^n$.

Zadanie 6 W tym zadaniu rozważamy funkcje z $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}_+}$. Zapisz następujące funkcje w postaci $\exp(f(n))$, gdzie f jest możliwie najprostsza:

$$1, 01^n, n^2, 2^{\sqrt{n}}, 3^{\log n}, n^{\log n}, n^n.$$

Zadanie 7 Sprawdź dla których par funkcji f, g z poprzedniego zadania zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ (czyli $f \ll g$).