

Lista 11

Uwaga: Użyj biblioteki SymPy do rozwiązywania zadań na tej liście. Instalacja biblioteki z wiersza poleceń – Windows: `pip install sympy`, Linux (typowa dystrybucja): `pip3 install sympy`.

Wskazówka do Zadania 3: obiekty SymPy reprezentujące liczby mają atrybut `is_real` (wartość logiczna), rozstrzygający, czy liczba jest rzeczywista (np. `pi.is_real` to `True`, `I.is_real` to `False`). Rzeczywiste liczby SymPy można skonwertować na wbudowany typ `float` poprzez zwykłą konstrukcję `float(...)`.

Zadanie 1 (po 0,25 punktu za podpunkt).

- (a) Oblicz z dokładnością do 99 miejsc po przecinku wartość wyrażenia $e + \pi^{\frac{1}{3}}$. (evalf)
 (b) Znajdź rozwiązania równania (solve)

$$2x^4 + 78x^2 = 104 + 13x^3 - 172x.$$

- (c) Oblicz lewostronną i prawostronną granicę funkcji (limit)

$$\frac{\sin(2x)}{|x|}$$

w punkcie $x_0 = 0$.

- (d) Wyznacz drugą pochodną funkcji $f(x) = \sin(\cos(1 - x))$. (diff)
 (e) Oblicz całkę nieoznaczoną (integrate)

$$\int x \sin x \cos 2x dx.$$

- (f) Oblicz całkę oznaczoną (integrate)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(x)}{\sin^3(x) + \cos^3(x)} dx.$$

Zadanie 2 (0,5 punktu). Pole ograniczone przez dwie funkcje¹ $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na przedziale $[a, b]$ wyraża się wzorem:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Napisz funkcję, która dla wyrażeń symbolicznych opisujących f i g , symbolu x i liczb a, b wyznacza to pole. Zilustruj działanie funkcji przykładem.

Zadanie 3 (0,5 punktu). Długość gładkiej krzywej zadanej parametrycznie jako

$$\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a, b]\}$$

wyraża się wzorem

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

¹Przy stosownych założeniach matematycznych.

Napisz funkcję, która dla pary wyrażeń symbolicznych opisujących funkcje x i y , symbolu t , oraz liczb rzeczywistych $a \leq b$ oblicza długość krzywej zgodnie ze wzorem. Zilustruj działanie funkcji na przykładzie.

Zadanie 4 (0,75 punktu). Zmodyfikuj klasę `Train` z Zadania 1 z Listy 10 poprzez dodanie metody `get_max_speed_real(self)` zwracającą maksymalną prędkość pociągu wyznaczoną jako największy pierwiastek rzeczywisty równania

$$30v^3 + C_r v^2 + 10C_r v = P,$$

dla C_r i P takich, jak w opisie metody `get_max_speed` z zadania.

Zadanie 5 (0,75 punktu). Zmodyfikuj klasę `Matrix` z rozwiązania Zadania 1 z Listy 10 (lub zauważ, że modyfikacja nie jest potrzebna) tak, żeby współczynnikami macierzy mogły być dowolne wyrażenia symboliczne `SymPy`. Następnie dopisz do tej klasy następujące metody:

- `determinant(self)` — dla macierzy kwadratowej `self` rozmiaru do 3×3 zwraca (jako wyrażenie `SymPy`) jej wyznacznik. Dla innych macierzy rzuca wyjątek.
- `characteristic_polynomial(self, x)` — dla macierzy kwadratowej `self` rozmiaru do 3×3 oraz symbolu `x` zwraca jej wielomian charakterystyczny (w którym zmienną jest `x`). Dla innych macierzy rzuca wyjątek.
- `eigenvalues(self)` — dla macierzy kwadratowej `self` rozmiaru do 3×3 zwraca listę jej wartości własnych. Dla innych macierzy rzuca wyjątek.
- (nieobowiązkowe) wykonaj zadanie tak, aby metody `determinant` oraz `characteristic_polynomial` działały dla macierzy kwadratowych dowolnego rozmiaru.