Streszczenie

Badamy pewne kanoniczne ilorazy w teorii modeli, głównie stabilne ilorazy grup typowo definiowalnych oraz typów niezmienniczych w teoriach z własnością NIP.

Główne wyniki rozprawy są następujące:

- Rozwiązujemy dwa problemy z pracy [HP18] dotyczące maksymalnych stabilnych ilorazów grup typowo definiowalnych w teoriach z własnością NIP. Pierwszy wynik mówi, że jeśli G jest typowo definiowalną grupą w teorii dystalnej, to $G^{st} = G^{00}$ (gdzie G^{st} jest najmniejszą typowo definiowalną podgrupą o stabilnym ilorazie G/G^{st}, a G^{00} jest najmniejszą typowo definiowalną podgrupą o ograniczonym indeksie). Aby go uzyskać, dowodzimy, że dystalność jest zachowana przy przejściu od teorii T do hiperurojonego rozszerzenia T^{heq}. Drugim wynikiem jest przykład grupy G definiowalnej w niedystalnej teorii z własnością NIP, dla której $G = G^{00}$, ale G^{st} nie jest przekrojem grup definiowalnych. Naszym przykładem jest nasycone rozszerzenie $(\mathbb{R}, +, [0, 1])$. Ponadto poczyniliśmy pewne obserwacje dotyczące pytania, czy istnieje taki przykład, który jest grupą o skończonym wykładniku. Podajemy też kilka charakteryzacji stabilności zbiorów hiperdefiniowalnych, m.in. w terminach logiki ciągłej.

- Dla teorii T z własnością NIP, dostatecznie nasyconego modelu $\mathfrak{C}$ teorii T (tzw. modelu monstrum) oraz niezmienniczego (nad pewnym małym podzbiorem $\mathfrak{C}$) globalnego typu p dowodzimy, że istnieje najdrobniejsza relatywnie typowo definiowalna nad małym zbiorem parametrów z $\mathfrak{C}$ relacja równoważności na zbiorze realizacji typu p, która ma stabilny iloraz. Jest to odpowiednik w kontekście relacji równoważności głównego wyniku z pracy [HP18] o istnieniu maksymalnych stabilnych ilorazów grup typowo definiowalnych w teoriach z własnością NIP. Nasz dowód adaptuje idee dowodu tego wyniku, używając relatywnie typowo definiowalnych podzbiorów grupy automorfizmów modelu monstrum w sensie [HKP21].

- Definiujemy ciągłą własność modelowania dla struktur pierwszego rzędu i pokazujemy, że struktura pierwszego rzędu ma tę własność wtedy i tylko wtedy, gdy jej wiek ma własność Ramseya. Używamy uogólnionych ciągów nieodróżnialnych w logice ciągłej do badania i charakteryzowania n-zależności dla teorii ciągłych oraz dla zbiorów hiperdefiniowalnych (w logice pierwszego rzędu) w terminach kolapsu ciągów nieodróżnialnych.

- Niech T będzie teorią zupełną, $\mathfrak{C}$ jej modelem monstrum, a X zbiorem typowo definiowalnym nad $\emptyset$. Badamy maksymalne ilorazy $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$-potoku $S_X(\mathfrak{C})$, które są WAP lub oswojone (ang. *tame*) w sensie dynamiki topologicznej. Mianowicie, niech $F_{\mathrm{WAP}} \subset S_X(\mathfrak{C}) \times S_X(\mathfrak{C})$ będzie najmniejszą domkniętą $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$-niezmienniczą relacją równoważności na $S_X(\mathfrak{C})$ taką, że potok $(\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}), S_X(\mathfrak{C})/F_{\mathrm{WAP}})$ jest WAP, i niech $F_{\mathrm{Tame}} \subset S_X(\mathfrak{C}) \times S_X(\mathfrak{C})$ będzie najmniejszą domkniętą $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C})$-niezmienniczą relacją równoważności na $S_X(\mathfrak{C})$ taką, że potok $(\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}), S_X(\mathfrak{C})/F_{\mathrm{WAP}})$ jest oswojony. Wykazujemy dobre zachowanie F_{WAP} i F_{Tame} przy zmianie modelu monstrum $\mathfrak{C}$. Mianowicie, dowodzimy, że jeśli $\mathfrak{C}' \succ \mathfrak{C}$ jest większym modelem monstrum, a F'_{WAP} i F'_{Tame} są odpowiednikami F_{WAP} i F_{Tame} obliczonymi dla $\mathfrak{C}'$ i $r : S_X(\mathfrak{C}') \to$

$S_X(\mathfrak{C})$ jest funkcją obcięcia, to $r[F'_{\mathrm{WAP}}] = F_{\mathrm{WAP}}$ i $r[F'_{\mathrm{Tame}}] = F_{\mathrm{Tame}}$. Korzystając z tych wyników, pokazujemy, że grupy Ellisa potoków $(\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}), S_X(\mathfrak{C})/F_{\mathrm{WAP}})$ i $(\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}), S_X(\mathfrak{C})/F_{\mathrm{Tame}})$ nie zależą od wyboru modelu monstrum $\mathfrak{C}$.

Wyniki zawarte w pierwszym, drugim i czwartym punkcie zostały uzyskane wspólnie z Krzysztofem Krupińskim, a w trzecim punkcie przeze mnie. Rezultaty z pierwszego punktu pochodzą z pracy [KP22], z drugiego z pracy [KP23], z trzeciego będą zawarte w mojej samodzielnej pracy, a z czwartego w przyszłej wspólnej pracy z K. Krupińskim.

References

[HKP21] Ehud Hrushovski, Krzysztof Krupiński, and Anand Pillay. *On first order amenability.* 2021. arXiv: `2004.08306 [math.LO]`.

[HP18] Mike Haskel and Anand Pillay. "On maximal stable quotients of definable groups in NIP theories". In: *J. Symb. Log.* 83.1 (2018), pp. 117–122. ISSN: 0022-4812. DOI: `10.1017/jsl.2017.26`.

[KP22] Krzysztof Krupiński and Adrián Portillo. "On Stable Quotients". In: *Notre Dame Journal of Formal Logic* 63.3 (2022), pp. 373 –394. DOI: `10.1215/00294527-2022-0023`.

[KP23] Krzysztof Krupiński and Adrián Portillo. "Maximal stable quotients of invariant types in NIP theories". In: *The Journal of Symbolic Logic* (2023), 1–25. DOI: `10.1017/jsl.2023.78`.