

Detekcja zmiany dryfu w modelach opartych o procesy Lévy'ego z zastosowaniami do analizy śmiertelności

Michał Krawiec

Streszczenie

W rozprawie badana jest optymalna detekcja zmiany dryfu w modelach, w których bazowe procesy są procesami Lévy'ego. W ogólności główny rozważany proces $X = (X_t)_{t \geq 0}$ można zdefiniować jako

$$X_t = \begin{cases} X_t^{(1)}, & t < \theta, \\ X_\theta^{(1)} + X_{t-\theta}^{(2)}, & t \geq \theta, \end{cases}$$

gdzie zarówno $X^{(1)} = (X_t^{(1)})_{t \geq 0}$, jak i $X^{(2)} = (X_t^{(2)})_{t \geq 0}$ są zadanymi procesami Lévy'ego. W rozprawie przyjęto podejście Bayesowskie, co oznacza, że dla momentu zmiany θ zakładany jest pewien rozkład a priori, tzn. θ jest zmienną losową o ustalonym rozkładzie. Głównym celem jest optymalne rozpoznanie momentu zmiany θ jedynie na podstawie obserwacji procesu X . Kryterium optymalności jest sformułowane w języku prawdopodobieństwa fałszywego alarmu oraz średniego opóźnienia detekcji. Następnie jest ono przeformułowane z wykorzystaniem prawdopodobieństwa a posteriori, opartego na filtracji generowanej przez proces X .

Na rozwiązanie przedstawionego problemu składa się zarówno wskazanie optymalnego czasu zatrzymania, jak i optymalnej funkcji wartości kryterium. Metody użyte do znalezienia rozwiązania opierają się o powiązanie zagadnienia z problemem tzw. wolnej bariery (*free-boundary problem*). Kluczowe jest znalezienie generatora infinitezimalnego dla procesu prawdopodobieństwa a posteriori. W jednym z modeli potrzebne jest numeryczne rozwiązanie skomplikowanego równania różniczkowego.

Rozprawa składa się ze wstępu oraz trzech głównych rozdziałów. W każdym z nich rozważany jest inny proces bazowy X . Pierwszy wprowadza podstawowy model oparty o ruch Browna, który pierwotnie został sformułowany i rozwiązany przez A.N. Shiryaeva. W drugim z głównych rozdziałów rozważany jest bardziej złożony model typu *jump-diffusion*, w którym proces X składa się zarówno z dyfuzji, jak i części skokowej zadanej poprzez złożony proces Poissona. W ostatnim rozdziale rozważany jest najbardziej ogólny model. Proces X jest w nim wielowymiarowym procesem typu *jump-diffusion*, a dryf pojawiający się po momencie zmiany θ jest zmienną losową z zadanego rozkładu.

Poza rozważaniami teoretycznymi, każdy z trzech głównych rozdziałów zawiera zastosowanie opisanego modelu do analizy natężenia śmiertelności w populacji Polski w ciągu ostatnich dekad. Poprzez konstrukcję tzw. uogólnionej statystyki Shiryaeva-Robertsa wyniki teoretyczne są użyte do wykrywania zmiany dryfu w danych dotyczących śmiertelności pochodzących z polskich tablic trwania życia.