Recenzja pracy doktorskiej mgra Krzysztofa Krawczyka pt. Koncentracja i stabilność rozwiązań równań agregacji-dyfuzji.

Mgr Krzysztof Krawczyk przedstawił dysertację zatytułowaną *Koncentracja i stabilność rozwiązań równań agregacji-dyfuzji* jako rozprawę doktorską na Uniwersytecie Wrocławskim.

Rozprawa dotyczy równania

$$u_t - \epsilon\Delta u^m = \nabla \cdot (u\nabla K * u)\,, \tag{1}$$

postawionego w całej przestrzeni R^d, $d \geqslant 1$, $\epsilon > 0$, liczba $m \geqslant 1$ w większości pracy jest równa jeden. Jądro K jest postaci $K = \frac{|x|^k}{k}$, $k \in (0,1)$.

Tego typu zagadnienia (również w przypadku $\epsilon = 0$) były w ostatnich latach obiektem studiów wielu grup, począwszy od grupy skupionej wokół Jose Antonio Carrillo, przez badaczy wokół Andrei Bertozzi (w szczególnos'sci Thomas Laurenta), kończąc na matematykach wrocławskich z Piotrem Bilerem i Grzegorzem Karchem (promotorem rozprawy) na czele. Równania agregacji-dyfuzji są związane z zagadnieniami chemotaksji z jednej strony, a z dwuwymiarowym równaniem Eulera oraz Naviera-Stokesa z drugiej.

Rozprawa zawiera trzy rozdziały uzupełnione o wprowadzenie oraz Appendix opisujący numerykę. Rozdział drugi to właściwe główna część pracy. Autor konstruuje tam rozwiązania (tak lokalne w czasie, jak i globalne) równania (1). Pokazane są także podstawowe własności rozwiązań, np. zachowanie masy i nieujemność pod warunkiem nieujemnych danych początkowych. Metody użyte w celu konstrukcji rozwiązań to zasada kontrakcji Banacha w pewnym wydaniu popularnym w szkole wrocławskiej (patrz Prop. 2.5), wykarmiona oszacowaniami znanymi dla równania przewodnictwa ciepła i oszacowaniami operatora splotowego z książki Hörmandera. Warto wspomnieć, że przedłużanie rozwiązań oparte jest na triku z pracy Bilera, Boriczewa, Laurencot i Karcha. Jednak to właśnie w konstrukcji rozwiązań znajduje się moment rozumowania wymagający dodatkowych wyjaśnień. Mianowicie, w pierwszej linijce (2.15) autor całkuje przez części po pomnożeniu przez u^{p-1}. To wymaga wyjaśnienia. Trzeba sprawdzić, że standardowa aproksymacja funkcjami gładkimi o nośniku zwartym da się uzasadnić. Trzeba w tym celu użyć własności rozwiązań równania przewodnictwa ciepła i upewnić się, że dla parametrów obsługiwanych przez Twierdzenie 2.7, aproksymacja zadziała. Będę chciał usłyszeć dokładne uzasadnienie w trakcie obrony mgra Krzysztofa Krawczyka.

Wreszcie, podrozdziały 2.4 i 2.5 zawierają główne jakościowe wyniki rozprawy. Po pierwsze w rozdziale 2.4 opisany jest pewien rodzaj koncentracji rozwiązań. W Twierdzeniu 2.12, pod warunkiem koncentracji sferycznie symetrycznych danych początkowych, pokazana jest własność (2.26). Uwaga 2.14 mówi jak rozumieć tą własność (2.26) jako pomiar koncentracji rozwiązania. Dowód Twierdzenia 2.12 polega na szacowaniu ewolucji wielkości

$$\int_0^T \int_{B_{(\nu\varepsilon)^{1/k}}} \frac{u(t,x)}{|x|^k} dxdt$$

wzdłuż sferycznie symetrycznego rozwiązania (1). Mamy tu do czynienia z długim technicznym rozumowaniem, wymagającym dodatkowych oszacowań pomocniczych wielkości (np. w Stwierdzeniu 2.17). Główny trik to odpowiednia (nietrywialna, wymagająca przygotowania w postaci chociażby Lematów 2.19 i 2.20) symetryzacja całek podwójnych. Znów, są to techniki popularne w szkole wrocławskiej, niemniej skuteczne i wymagające dużego wysiłku w konkretnych zastosowaniach.

W podrozdziale 2.5 autor pokazuje, że dla czasów zbiegających do nieskończoności, dla sferycznie symetrycznych u, $\|u(t,\cdot)\|_p$ nie zanikają. W tym celu, autor liczy ewolucję drugiego momentu rozwiązania (Lemat 2.29) i wiąże go z p-tą normą. W tej części pracy nie rozumiem po co w Lemacie 2.30 rozpatrujemy również $\beta = 1$. To jest przypadek $b = 0$ i nie pozwala na wyciągnięcie szukanych wniosków. Wreszcie, nieuzasadniona wydaje mi się sugestia, że wyniki podrozdziału 2.5 sugerują zbieżność rozwiązań do stanów stacjonarnych. Jest jeszcze możliwość nieograniczonego wzrostu rozwiązania. Oszacowanie na normę L^∞ rozwiązania na stronie 17 nie wyklucza wzrostu normy L^∞ z czasem.

Rozdział trzeci pracy dotyczy specjalnych rozwiązań. Po pierwsze policzone jest skalowanie równania. Niestety, nie idzie za nim pokazanie istnienia rozwiązania samopodobnego. Następnie, rozważane są rozwiązania stacjonarne. Wyprowadzone są równania całkowe (3.7) i (3.9), które powinny być przez takie rozwiązania spełnione. Niestety, żadne z tych równań nie jest rozwiązane. W zamian, autor pokazuje w podrozdziałach 3.2.1 i 3.2.2 dlaczego nie jest możliwe uzyskanie rozwiązań (3.7) i (3.9) za pomocą punktu stałego pewnego konkretnego operatora. Nasuwa się pytanie: co z innymi operatorami, jakimiś modyfikacjami rozważanego operatora? Może metody wariacyjne lub inne podejście? A może nie ma rozwiązań równań (3.7) i (3.9)? Rozdział trzeci sprawia wrażenie niedokończonego. Przy czym, w wymiarze jeden, na podstawie analogii z równaniem Burgersa, przedstawione są pewne wyniki dotyczące szczególnych jednowymiarowych stanów stacjonarnych.

Mamy jeszcze rozdział czwarty rozprawy. Opisuje on wyniki wspólnej pracy kandydata z promotorem, Hiroshim Wakuim i Szymonem Cyganem. Dotyczy on (nie-)stabilności stałych stanów stacjonarnych pewnego układu chemotaksji w całej przestrzeni. Główny wynik to stabilność stanów stacjonarnych (A, A) dla $A < 1$ (również asymptotyczna stabilność) oraz niestabilność, gdy $A > 1$. W związku z tym, że pracujemy z rozwiązaniami stałymi, niewątpliwie mamy do czynienia z rozwiązaniami niecałkowalnymi. To bardzo utrudnia analizę. Konieczne jest rozwiązywanie równania w przestrzeniach funkcji L^p_{uloc}. Następnie konieczna jest praca z transformatami Fouriera funkcji, które niewątpliwie nie są w L^1, a często po prostu pracujemy z transformatami Fouriera miar. To bardzo ciekawa część rozprawy, trudno ocenić udział doktoranta, bo opisane są wyniki uzyskane we współpracy czterech autorów. Niewątpliwie jednak ta część nasuwa pytania na publiczną obronę pracy.

Posumowując, rozprawa doktorska Krzysztofa Krawczyka zawiera rozdział o globalnych w czasie rozwiązaniach równania agregacji-dyfuzji, pokazane są też pewne jakościowe własności (niestety tylko) rozwiązań sferycznie symetrycznych. Rozprawa zawiera też rozdział na temat stanów stacjonarnych, ten rozdział jest wyraźnie najsłabszy w pracy. Sprawia wrażenie niedokończonego. Jest też ostatni, ciekawy rozdział na temat asymptotyki niecałkowalnych stanów stacjonarnych.

Rodział drugi pozwala stwierdzić, że autor rozwiązał konkretny problem badawczy (podał pewne jakościowe własności sferycznie symetrycznych rozwiązań równań agregacji-dyfuzji, które można interpretować jako koncentrację rozwiązań; policzył że granica norm L^p rozwiązań sferycznie symetrycznych dla dużych czasów nie jest zerowa). Miał też udział w interesującej pracy dotyczącej asymptotyki stałych stanów stacjonarnych. Myślę, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymagania (tak ustawowe, jak zwyczajowe) dopuszczenia kandydata do kolejnych kroków w przewodzie doktorskim i stanowi solidny fundament na drodze do przyznania Krzysztofowi Krawczykowi doktoratu z matematyki.

T Cieślak

Warszawa, dn. 27.12.2024r.
dr hab. Tomasz Cieślak