dr hab. Sebastian Owczarek
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
Pl. Politechniki 1, 00-661 Warszawa

Warszawa, 19.12.2024

Do *Rady Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.*

Recenzja pracy doktorskiej do rozprawy Pana magistra Krzysztofa Krawczyka pt. „*Concentration and stability of solutions to aggregation-diffusion equations*".

Pan Krzysztof Krawczyk od października 2022 roku pełni funkcję asystenta na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego. Na tym samym uniwersytecie w 2019 roku uzyskał tytuł magistra matematyki stosowanej, a tematem jego pracy była analiza lepkiego równania Burgersa. Jest współautorem publikacji naukowej opublikowanej w *Journal of Evolution Equations* w 2021 roku (wspólnie z S. Cyganem, G. Karchem i H. Wakui). Pan magister Krawczyk uczestniczył w siedmiu konferencjach lub szkołach naukowych, w tym w jednych zagranicznych warsztatach. Jego zainteresowania badawcze koncentrują się na równaniach różniczkowych i ich zastosowaniach w matematyce stosowanej, szczególnie w modelowaniu zjawisk biologicznych i fizycznych.

W przedłożonej rozprawie doktorskiej Pan magister Krzysztof Krawczyk analizuje różne rodzaje równań agregacji-dyfuzji (ADE), które modelują rozkład gęstości obiektów (takich jak cząstki) w czasie, uwzględniając wpływ nielokalnych interakcji oraz nieliniowej dyfuzji. Równania te stanowią ciągły opis dynamiki układów cząstek, w których każda z nich jest opisana przez swoje położenie oraz pęd. Rozprawa składa się z czterech rozdziałów, z czego pierwszy pełni rolę wprowadzenia, a trzy kolejne prezentują matematyczne wyniki dotyczące różnych typów równań ADE. W rozdziale drugim autor rozważa równanie ADE z jądrem w postaci funkcji potęgowej, w trzecim – stacjonarne równania ADE, a w czwartym – paraboliczno-eliptyczny układ równań różniczkowych znany jako model Kellera-Segela. Czwarty rozdział przedstawia jedynie rezultaty, które autor wniósł do opublikowanej pracy, współtworzonej z trzema współautorami.

Omówienie zawartości pracy

W Rozdziale 2 rozprawy autor rozwija teorię L^p dla równań agregacji-dyfuzji (ADE) postaci

$$u_t - \varepsilon\Delta u = \nabla \cdot (u\nabla W_k * u) \quad t > 0\,,\, x \in \mathbb{R}^d\,,$$

gdzie jądro W_k opisujące interakcje ma postać potęgową $W_k(x) = |x|^k/k$ dla $k \in (0,1)$, a $\varepsilon > 0$ jest współczynnikiem dyfuzji. Szczególnym obiektem zainteresowania jest zachowanie rozwiązań dla małych wartości dyfuzji ε. Główne wyniki tego rozdziału to:

- Globalne w czasie istnienie nieujemnych rozwiązań i ich ograniczoność w normie L^p (Twierdzenie 2.7).
- Zjawisko koncentracji masy – przy odpowiednich założeniach na dane początkowe, dla małych wartości ε rozwiązania radialne gromadzą istotną część całkowitej masy

w małych otoczeniach zera (Twierdzenie 2.12). Jest to jakościowy opis osobliwości, jakie powstają w przypadku braku dyfuzji (równanie agregacji).

Wyniki przedstawione w Rozdziale 2 stanowią uogólnienie idei badanych wcześniej w literaturze, w tym również przez promotora rozprawy, dla przypadku $k = 1$. Autor pokazuje, że globalne w czasie rozwiązanie pozostaje regularne i zachowuje dobre własności dla każdego ustalonego $\varepsilon > 0$, jednak mimo to obserwuje się zjawisko koncentracji masy. Oznacza to, że rozwiązanie u_ε zaczyna skupiać się na coraz mniejszych obszarach. Dowód istnienia rozwiązań został oparty na twierdzeniu Banacha o punkcie stałym, natomiast analiza zjawiska koncentracji wykorzystuje techniki oparte na oszacowaniach momentów oraz oszacowaniach a priori. Na zakończenie rozdziału autor bada potencjalną zbieżność rozwiązań do stanu stacjonarnego, analizując odpowiednie momenty rozwiązania. Wykazano, że zachowanie rozwiązań dla dużych czasów, które mimo globalnego istnienia i ograniczoności p-norm nadal wykazują istotny efekt agregacji, a rozwiązania radialne nie zanikają do zera, gdy $t \to +\infty$.

Rozdział ten jest, moim zdaniem, napisany poprawnie pod względem matematycznym. Zauważyłem jednak jedną niejasność, która nie wydaje się trywialna do rozwiązania. W dowodzie Twierdzenia 2.12 autor korzysta ze wzoru na całkowanie przez części, jednak w żadnym miejscu nie wyjaśnia, co dzieje się z "całkami brzegowymi". Dodatkowo stała w formule (2.34) wydaje się inna.

W Rozdziale 3 autor bada alternatywną metodę dowodzenia istnienia stanów stacjonarnych dla problemu:

$$u_t - \Delta u^m = \nabla \cdot (u \nabla W_k * u) \quad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{1}$$

$W_k(x) = |x|^k/k$ dla $k > 0$, $d \geq 1$ oraz $m \geq 1$ to znaczy istnienie rozwiązań dla problemu

$$\Delta u^m + \nabla \cdot (u \nabla W_k * u) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^d\,. \tag{2}$$

W Sekcji 3.2 wykazano, że przy odpowiednich założeniach stacjonarne równanie (2) można przekształcić do postaci umożliwiającej zastosowanie metod punktu stałego. Jest to nowe podejście w porównaniu do dotychczasowych metod opisanych w literaturze. Autor zauważa jednak, że w szczególnym przypadku $m = 1$ i $k = 2$ twierdzenia Banacha i Schaudera nie znajdują zastosowania. Dalej w Sekcji 3.2.3 wyprowadzono jawne wzory rozwiązań w kilku przypadkach dla stacjonarnego równania (2). Dodatkowo pokazano, że przy pewnych założeniach na funkcję u, równanie to jest równoważne nieliniowemu równaniu całkowemu Fredholma drugiego rodzaju, dla którego znane są bezpośrednie metody rozwiązywania. W Sekcji 3.3 autor analizuje rozwiązania, które zostały nazwane *sign-changing*, korzystając z równania Burgersa w przypadku $d = m = k = 1$.

W Rozdziale 4 autor przedstawia wyniki dotyczące uproszczonego paraboliczno-eliptycznego układu Keller-Segela w przestrzeniach $L^p_{\mathrm{uloc}}(\mathbb{R}^d)$ (jednostajnie lokalne przestrzenie Lebesguea), które zostały już opublikowane w artykule [42]. Sekcja 4.2 zawiera szczegółowy opis wyłącznie tych wyników, które stanowiły wkład autora do wspomnianej publikacji. Dotyczą one zlinearyzowanego problemu:

$$u_t - \Delta u + A \Delta K * u = 0 \quad t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^d\,,$$

z warunkiem początkowym $u(0, x) = v_0(x)$, gdzie $A \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą, a K jest funkcją Bessela. Operator $\Delta - A\Delta K*$ można wyrazić za pomocą transformaty Fouriera (formuła (4.6)). Dla każdego $A \in \mathbb{R}$ domknięcie operatora $\Delta - A\Delta K*$ w normie $L^p(\mathbb{R}^d)$ generuje analityczną półgrupę na $L^p(\mathbb{R}^d)$ dla każdego $p \in [1, \infty)$. Głównym wynikiem tej sekcji są oszacowania typu L^p-L^q $(1 \leq q \leq p < \infty)$ tej półgrupy dla $A \in [0, 1)$ (Twierdzenie 4.9). Dodatkowo oszacowania te pozostają prawdziwe również dla $A < 0$. Rezultat ten odgrywa kluczową rolę w dowodzie stabilności stałych rozwiązań wspomnianego uproszczonego układu Keller-Segela, będącego jednym z głównych wyników opublikowanej pracy [42].

Ocena pracy

Mimo drobnych uwag dotyczących Rozdziału 2 uważam, że praca Pana magistra Krzysztofa Krawczyka została napisana poprawnie pod względem matematycznym. Na szczególne wyróżnienie zasługuje wynik uzyskany w tym rozdziale, dotyczący zjawiska koncentracji masy, który stanowi istotny krok w kierunku opisu zachowania rozwiązań dla $k \in (1, 2)$. Dla tego zakresu parametrów wciąż brakuje szczegółowych analiz w literaturze. Chociaż rezultat ten nie został wcześniej opublikowany, można przypuszczać, że środowisko badawcze zajmujące się tą tematyką spodziewało się takiego wyniku, jednak dotąd nikt nie przeprowadził odpowiedniej analizy. W związku z tym uznaję ten wynik za nowy i istotny. W rozprawie zostało to wykonane w sposób elegancki i przejrzysty. Przykładem tej elegancji może być dowód Propozycji 2.1, w którym autor, definiując funkcję dwóch zmiennych, w klarowny sposób dobiera wykładniki wywodzące się z nierówności interpolacyjnych.

Na podkreślenie zasługuje również fakt, że jawne rozwiązania uzyskane w Rozdziale 3 mają istotne znaczenie praktyczne, zwłaszcza w kontekście weryfikacji dokładności metod numerycznych stosowanych do rozwiązywania problemu (1). Warto również zauważyć, że w Załączniku A autor zamieścił kod numeryczny, który umożliwia aproksymację niektórych stanów stacjonarnych.

Jak już wcześniej wspomniałem, Rozdział 4 przedstawia wyłącznie wkład autora w pracę opublikowaną w renomowanym czasopiśmie naukowym. Z tego względu rozdział ten zawiera nowe rezultaty, które stanowią istotny wkład w rozważaną przez autora tematykę.

Podsumowując, stwierdzam, że rozprawa doktorska Pana magistra Krzysztofa Krawczyka spełnia wymagania określone w art. 187 ust. 1 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. Praca zawiera nowe, wartościowe wyniki naukowe, świadczy o samodzielności badawczej autora oraz w pełni spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane pracom doktorskim. W związku z powyższym wnoszę o dopuszczenie rozprawy do dalszych etapów przewodu doktorskiego oraz do publicznej obrony.

19.12.2024

Sebastian Owczarek
....
Sebastian Owczarek