Mateusz Kwaśnicki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27
50-370 Wrocław

Wrocław, 19 lipca 2024 r.

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR. MACIEJA KUCHARSKIEGO
PT. *Oszacowania norm transformat Riesza*, NAPISANEJ POD KIERUNKIEM
DR. HAB. INŻ. BŁAŻEJA WRÓBLA

1. **Wprowadzenie.** Rozprawa doktorska mgr. Macieja Kucharskiego ma postać obszernej, liczącej 115 stron pracy pisemnej. Wyniki w niej przedstawione zostały uzyskane we współpracy z promotorem, dr. hab. inż. Błażejem Wróblem, i częściowo z dr. hab. Jackiem Zienkiewiczem. Rozprawa podsumowuje dotychczasowy dorobek naukowy autora: dwa artykuły opublikowane (w czasopismach *Mathematische Annalen* oraz *Colloquium Mathematicum*), jeden przyjęty do druku (w *Annales de l'Institut Fourier*) i dwa artykuły w recenzji (jeden z nich ukończony już po złożeniu rozprawy).

W swojej rozprawie mgr Maciej Kucharski bada transformaty Riesza, jedne z najważniejszych operatorów w analizie harmonicznej. Uzyskane w niej znakomite wyniki — oszacowania norm ze stałymi niezależnymi od wymiaru przestrzeni — wpisują się we współczesne trendy w dziedzinie i z pewnością zostaną dostrzeżone przez środowisko. Zanim jednak przedstawię swoją ocenę omawianej rozprawy, w dalszej części recenzji streszczę jej główne tezy i przedstawię kilka uwag dotyczących strony redakcyjnej.

2. **Omówienie wyników rozprawy.** Praca mgr. Macieja Kucharskiego składa się z dwóch zupełnie niezależnych od siebie części. Obie dotyczą operatorów znanych pod nazwą *transformaty Riesza*, ale istotnie od siebie różnych. Z tego powodu opis wyników też będzie podzielony na dwie części.

2.1. *Klasyczne transformaty Riesza.* Jeśli $u(x, y)$ jest funkcją harmoniczną w górnej półpłaszczyźnie ($x \in \mathbb{R}$, $y > 0$), to — przy odpowiednich założeniach — pochodna cząstkowa $\partial_x u(\cdot, y)$ jest *transformatą Hilberta* pochodnej cząstkowej $\partial_y u(\cdot, y)$. Analogicznie gdy $u(x, y)$ jest funkcją harmoniczną w „górnej półprzestrzeni" ($x \in \mathbb{R}^d$, $y > 0$), to — znów przy odpowiednich założeniach — pochodna cząstkowa $\partial_{x_j} u$ jest *transformatą Riesza* pochodnej cząstkowej $\partial_y u$:

$$\partial_{x_j} u(\cdot, y) = R_j[\partial_y u(\cdot, y)].$$

Operator R_j dany jest jawnym wzorem: dla pewnej stałej c_d zachodzi

$$R_j f(x) = c_d \, \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y_j}{|y|^{d+1}} f(x - y) \, dy.$$

Jeśli zaś $\mathcal{F} f$ oznacza transformatę Fouriera funkcji f, to

$$\mathcal{F}[R_j f](\xi) = \frac{-i\xi_j}{|\xi|} \mathcal{F} f(\xi).$$

Pochodne cząstkowe funkcji u wyższych rzędów są ze sobą związane przy pomocy transformat Riesza wyższych rzędów, które są po prostu złożeniami zwykłych transformat Riesza; na przykład $\partial_{x_i} \partial x_j u = R_i R_j \partial_y^2 u$. Ogólniej: jeśli P jest wielomianem jednorodnym stopnia k na $\mathbb{R}^d$, to $P(\nabla_x) u = R_P \partial_y^k u$, gdzie ∇_x to wektor pochodnych cząstkowych względem $x_1, \ldots, x_d$, zaś $R_P = P(R_1, \ldots, R_d)$ to odpowiadająca P transformata Riesza rzędu k. Oczywiście

$$\mathcal{F}[R_P f](\xi) = \frac{(-i)^k P(\xi)}{|\xi|^k} \mathcal{F} f(\xi).$$

MK

Jeśli dodatkowo P jest wielomianem harmonicznym, to ponadto

$$R_P f(x) = c_{d,k}\,\mathrm{p.v.}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{P(y)}{|y|^{d+k}} f(x-y)\,dy.$$

Z powyższej dyskusji wynika, że operatory Riesza pozwalają sprowadzać badanie regularności funkcji u względem obu zmiennych do zagadnienia regularności względem zmiennej y. Z tego powodu odgrywają one istotną rolę teorii równań różniczkowych cząstkowych. Mają też liczne zastosowania w innych obszarach matematyki i są przez to jednymi z najważniejszych operatorów całek singularnych.

Oszacowania transformat Riesza na przestrzeniach L^p badane są od około stu lat. Główny wynik pierwszej części rozprawy to nierówność maksymalna związana ze zbieżnością całki singularnej w definicji operatorów R_j i ogólniej R_P. Niech R_P^* będzie operatorem maksymalnym dla transformaty Riesza R_P:

$$R_P^* f(x) = \sup_{r>0} |R_P^r f(x)|, \qquad \text{gdzie} \quad R_P^r f(x) = c_{d,k} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \frac{P(y)}{|y|^{d+k}} f(x-y)\,dy.$$

Niecałe 20 lat temu Mateu, Orobitg, Pérez i Verdera w serii trzech artykułów (opublikowanych w *Mathematical Research Letters*, *International Mathematics Research Notices* oraz *Annals of Mathematics*; pozycje 35, 36 i 37 w spisie literatury) wykazali między innymi, że operator R_P^* jest ograniczony na L^p:

$$\|R_P^* f\|_p \leqslant C_{d,k,p} \|R_P f\|_p.$$

W swojej rozprawie doktorskiej mgr Maciej Kucharski dowodzi, że stała $C_{d,k,p}$ w powyższym oszacowaniu może zostać dobrana w sposób niezależny od wymiaru d. Wynik ten zawarty jest w *Theorem 2.0.1* (transformaty pierwszego rzędu na L^2) i *Theorem 3.0.1* (ogólne sformułowanie).

Zastosowana przez mgr. Macieja Kucharskiego metoda dowodu wykorzystuje wiele technik opracowanych we wspomnianych wyżej pracach Mateu, Orobitga, Péreza i Verdery, a także we wcześniejszych, klasycznych artykułach, m.in. Iwańca i Martina (pozycja 26). Są to nadzwyczaj zaawansowane metody, niejednokrotnie wymagające istotnych zmian. Idea dowodu jest następująca.

W pierwszym kroku (*Corollary 2.1.3* oraz *Proposition 3.1.1*) wykazuje się, że *uciętą transformatę Riesza* R_P^r można wyrazić przy pomocy pełnej transformaty Riesza:

$$R_P^r = M_k^r R_P,$$

gdzie M_k^r jest operatorem splotu z odpowiednią funkcją radialną. Dowodzona nierówność maksymalna staje się zatem oszacowaniem operatora maksymalnego $M_k^* f = \sup_{r>0} |M_k^r f|$.

Operator M_k^* badany jest na trzy sposoby. W rozdziale 2 (dotyczącym transformat Riesza pierwszego rzędu na przestrzeni L^2) wykorzystywane są funkcje kwadratowe Littlewooda–Paley, nierówności maksymalne dla półgrupy Poissona, oszacowania całek z funkcji Bessela $J_{d/2}$ i wiele pomocniczych nierówności, wśród których na uwagę zasługuje nierówność (2.0.4) (zaczerpnięta z artykułu Mirka, Steina i Zorin-Kranicha, pozycja 38). Z kolei w rozdziale 3 operatory M_k^r są zapisane ponownie przy pomocy (uciętych i pełnych) transformat Riesza:

$$M_k^r f = \sum_P R_P^r R_p f,$$

gdzie suma (a w rozdziale 3 — całka) rozciąga się na odpowiednią rodzinę jednorodnych wielomianów harmonicznych P (*Proposition 3.1.5* oraz *Proposition 3.3.1*). Następnie stosuje się metodę obrotów: rzeczywistą w rozdziale 3.2 (przypadek przestrzeni nieparzystego wymiaru) i zespoloną w rozdziale 3.4 (przypadek przestrzeni wymiaru parzystego). Choć metody te są dobrze znane, zawarte w rozprawie zastosowanie wymaga gruntownych zmian, zwłaszcza w przypadku metody zespolonej: prowadzi ona do oszacowań operatorów innych niż M_k^r i do

MK

uzyskania tezy potrzebne są skomplikowane i techniczne rachunki z rozdziału 3.5. Warto podkreślić, że oprócz licznych bardziej oczekiwanych narzędzi w dowodzie wykorzystywane są m.in. nierówności Chinczyna.

Wyniki opisane w rozdziale 2 rozprawy mgr. Macieja Kucharskiego zostały już wykorzystane w niedawnym artykule Liu, Melentijevicia i Zhu (opublikowanym w *Mathematische Annalen*; pozycja 33), którzy dowodzą oszacowań maksymalnych ze stałą niezależną od wymiaru dla transformat Riesza pierwszego rzędu na L^p przy $p \geqslant 2$. Rezultat ten jest oczywiście szczególnym przypadkiem ogólniejszych twierdzeń przedstawionych w rozdziale 3 omawianej rozprawy.

2.2. *Operatory Schrödingera.* Operatory Schrödingera to operatory postaci $L = -\Delta + V(x)$, gdzie Δ to operator Laplace'a w $\mathbb{R}^d$, zaś $V(x)$ jest funkcją nazywaną potencjałem. Motywacja do badania takich operatorów pochodzi z fizyki: jeśli V jest potencjałem pola elektrostatycznego, w którym porusza się naładowana cząstka, to operator L pojawia się w równaniu Schrödingera, opisującym ewolucję funkcji falowej tej cząstki.

Gdy $V = 0$, to $L = -\Delta = \sum_j \partial_{x_j}^* \partial_{x_j}$ (gdzie $\partial_{x_j}^* = -\partial_{x_j}$ to operator sprzężony do ∂_{x_j}) oraz $R_j = \partial_{x_j} L^{-1/2}$. W ważnym przypadku $V(x) = |x|^2$ (opisującym oscylator harmoniczny) można analogicznie napisać

$$L = -\Delta + |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} \big((\partial_{x_j} + x_j)^* (\partial_{x_j} + x_j) - 1 \big)$$

i w takim razie naturalna jest definicja zmodyfikowanej transformaty Riesza

$$R_j = (\partial_{x_j} + x_j) L^{-1/2}.$$

Tak określone operatory R_j, związane z nimi operatory $\partial_{x_j} L^{-1/2}$ oraz $x_j L^{-1/2}$, a także analogiczne konstrukcje w ogólniejszym kontekście (np. operatorów Dunkla) są badane od kilkudziesięciu lat. W literaturze pojawiły się też operatory wyższych rzędów (które jednak nie są złożeniami operatorów pierwszego rzędu ze względu na brak normalności).

W swojej rozprawie doktorskiej mgr Maciej Kucharski rozważa operatory

$$R_V^a = (V(x))^a L^{-a}$$

gdy potencjał $V(x)$ jest dowolną nieujemną funkcją lokalnie całkowalną oraz $a \geqslant 0$. W przypadku $V(x) = |x|^2$ oraz $a = \frac{1}{2}$ są one oczywiście niemal tożsame (przynajmniej w kontkeście oszacowań na L^p) ze wspomnianymi wyżej operatorami $x_j L^{-1/2}$, stanowiącymi część zmodyfikowanych transormat Riesza R_j. Choć dla ogólniejszych funkcji V nie widać istotnego związku operatorów R_V^a z klasycznymi transformatami Riesza, w rozprawie stosowana jest ta sama nazwa. Operatory $R_V^{1/2}$ i R_V^1 są badane od około 50 lat (najczęściej jednak nie pod nazwą *transformaty Riesza*) ze względu na kluczową rolę w analizie regularności rozwiązań równań zawierających operatory Schrödingera.

Główne tezy tej części rozprawy to trzy twierdzenia, uogólniające wiele znanych wcześniej rezultatów. Pierwszy wynik (*Theorem 4.0.1*) orzeka, że R_V^a jest operatorem ograniczonym na L^p gdy $p \in (1, 2]$ oraz $a \in [0, \frac{1}{p}]$. Drugie twierdzenie (*Theorem 4.0.3*) dotyczy ograniczenia na L^p dla dowolnego p i a, gdy potencjał V należy do jednej z trzech klas: jest asymptotycznie stały, asymptotycznie potęgowy lub asymptotycznie wykładniczy. Trzecie zaś (*Theorem 5.0.1*; zob. też *Theorem 5.0.2*) dotyczy oszacowań ze stałymi niezależnymi od wymiaru w przypadku, gdy V jest sumą odpowiednich potencjałów zależących od pojedynczych współrzędnych.

Techniki dowodowe stosowane w tej części rozprawy są probabilistyczne i wymagają starannych, skomplikowanych oszacowań, wykorzystujących m.in. znane własności czasów lokalnych. Wyjątkiem jest pierwsze z omawianych twierdzeń, które jest stosunkowo prostą konsekwencją znanych wcześniej oszacowań na przestrzeni L^1, standardowego oszacowania na

MK

przestrzeni L^2 oraz zgrabnego wniosku z twierdzenia interpolacyjnego Steina. W dowodzie pozostałych rezultatów wykorzystuje się wzór Feynmana–Kaca, wiążący półgrupę e^{-tL} generowaną przez $-L$ z d-wymiarowym procesem Wienera X_t:

$$e^{-tL}f(x) = \mathbb{E}_x\Big[e^{-\int_0^t V(X_s)ds} f(X_t)\Big].$$

Operator R_V^a jest zaś definiowany znanym wzorem, będącym jednym ze wzorów subordynacyjnych Bochnera, przynajmniej w przypadku $a \in (0,1)$:

$$R_V^a f(x) = \frac{(V(x))^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-tL} f(x) dt.$$

Powyższe związki pozwalają sprowadzić oszacowania normy L^p funkcji $R_V^a f(x)$ do oszacowań funkcjonału Feynmana–Kaca $\exp(-\int_0^t V(X_s)ds)$.

Aby udowodnić, że operator R_V^a jest ograniczony na L^1 i na L^∞, w rozdziale 4 rozprawy mgr Maciej Kucharski porównuje funkcjonał Feynmana–Kaca z wyrażeniem zależącym od supremów oraz infimów potencjału V na odpowiednich kulach. Jest to dość naturalne podejście w teorii potencjału, ale w kontekście oszacowań operatorów takich jak R_V^a wydaje się nowatorskie. Bardzo podobna technika została wykorzystana niedawno w artykule M. Baraniewicza i K. Kalety *Integral kernels of Schrödinger semigroups with nonnegative locally bounded potentials* (arXiv:2302.13886) do uzyskania dwustronnych oszacowań jąder ciepła. Analogiczny wynik został równolegle uzyskany w artykule X. Chena i J. Wanga *Two-sided heat kernel estimates for Schrödinger operators with unbounded potentials* (arXiv:2301.06744).

W wielu przypadkach (np. gdy $V(x) = |x|^a$ dla $a > 2$) oszacowania jądra ciepła operatora L są dobrze znane. Krótkie wprowadzenie do literatury na ten temat można znaleźć w rozdziałach 1 oraz 6.1 opisanego wyżej artykułu M. Baraniewicza i K. Kalety. W tych przypadkach oszacowania jąder ciepła w bardzo łatwy sposób prowadzą do głównej tezy tej części, tj. ograniczoności operatora R_V^a na L^p. W szczególności wspomniane wyżej najnowsze rezultaty prawdopodobnie pozwalają bez wysiłku uzyskać wiele z oszacowań udowodnionych w rozdziale 4. Niestety w omawianej rozprawie doktorskiej brakuje dyskusji na ten temat. Najnowszych wyników mgr Maciej Kucharski prawdopodobnie nie miał możliwości poznać, ale odniesienie do starszych rezultatów dotyczących oszacowań jąder ciepła (np. w przypadku potencjału $V(x) = |x|^a$) byłoby wskazane.

Ostatni rozdział rozprawy zawiera dowód oszacowań norm operatorów R_V^a na przestrzeniach L^p ze stałymi niezależnymi od wymiaru. Rozważane są potencjały postaci $V(x) = \sum_j V_j(x_j)$, gdzie $V_j(x_j)$ jest porównywalne z $|x_j|^\alpha$ oraz $\alpha \in (0,2]$. W tym przypadku operator e^{-tL} ma strukturę iloczynu tensorowego i zagadnienie sprowadza się do starannej analizy przypadku jednowymiarowego. Głównym elementem dowodu jest nierówność

$$e^{-tL_j}\mathbb{1}(x) \leqslant e^{-ctV_j(x_j)}$$

dla małych czasów t (*Lemma 5.2.1*), którą probabilistycznie można interpretować jako oszacowanie prawdopodobieństwa przeżycia jednowymiarowego procesu Wienera X_t^j zabijanego z intensywnością $V_j(X_t^j)$. Jej dowód jest kolejnym niebanalnym i pracochłonnym zastosowaniem wzoru Feynmana–Kaca. Głównym źródłem trudności jest tu brak czynnika stałego po prawej stronie nierówności, odgrywający kluczową rolę w dalszej części dowodu.

3. **Forma i redakcja pracy.** Rozprawa doktorska mgr. Macieja Kucharskiego sporządzona została z zachowaniem wszystkich zwyczajów dotyczących prac naukowych z matematyki.

Struktura pracy jest czytelna i naturalna. Drobnym mankamentem jest oddzielenie ścisłej prezentacji głównych wyników (zawarta jest ona we wstępach do rozdziałów 2–5) od dyskusji

MK

znanych rezultatów (w rodziale 1). Praca zyskałaby dodatkowo na wartości, gdyby opis tła historycznego przeprowadzonych badań był bardziej rozbudowany (brakuje np. opisu powodów zainteresowania operatorami R_P i R_V^a), ale obecna dyskusja jest bez wątpienia wystarczająca.

Omawiana rozprawa zawiera wyczerpujący przegląd stanu wiedzy w dziedzinie. Spis cytowanej literatury liczy 54 właściwie dobrane pozycje. Jedynym zastrzeżeniem może być wspomniany wyżej brak odniesień do prac dotyczących oszacowań jąder ciepła operatorów Schrödingera, lecz nie jest to poważna usterka. Każde twierdzenie sformułowane w rozprawie jest czytelnie opisane jako nowe lub zaczerpnięte z prac innych autorów.

Dowody prezentowane w rozprawie doktorskiej mgr. Macieja Kucharskiego są bardzo skomplikowane technicznie i wykorzystują zaawansowane techniki. Na uznanie zasługuje klarowny i precyzyjny sposób ich prezentacji: nie znalazłem istotnych błędów merytorycznych. Jedyny mankament to moim zdaniem brak liniowości, który czasem utrudnia lekturę: w kilku miejscach kroki rozumowania przedstawione są w odwrotnej kolejności.

Język pracy jest bardzo dobry, a jej redakcja wyjątkowo staranna. Na ponad stu stronach skomplikowanego tekstu znalazłem łącznie kilkanaście błędów literowych, prostych błędów edytorskich czy innych mało istotnych usterek.

4. **Ocena.** Zamieszczony wyżej opis jasno wskazuje, że w swojej rozprawie doktorskiej mgr Maciej Kucharski wykorzystuje rozmaite zaawansowane metody matematyczne oraz sprawnie prowadzi wieloetapowe, skomplikowane dowody. Oprócz technik typowych dla analizy harmonicznej istotną rolę w omawianej pracy odgrywają metody probabilistyczne, pojawiają się też elementy analizy zespolonej i teorii dystrybucji. Bez wątpienia zatem rozprawa doktorska mgr. Macieja Kucharskiego prezentuje jego wszechstronną i dogłębną wiedzę teoretyczną w dyscyplinie matematyka, charakterystyczną dla doświadczonych badaczy i znacznie przekraczającą wymagania stawiane osobom ubiegającym się o stopień doktora.

Uzyskane w rozprawie doktorskiej rezultaty są nowymi twierdzeniami, odpowiadającymi na pytania postawione i badane przez uznanych matematyków. Nie ulega więc wątpliwości, że rozprawa doktorska stanowi oryginalne rozwiązanie trudnego i aktualnego problemu naukowego. O wadze problemów roztrząsanych w rozprawie świadczy dodatkowo renoma czasopism, w których ukazały się lub wkrótce się ukażą omawiane wyżej wyniki.

Wysoka jakość uzyskanych rezultatów oraz sposobu ich prezentacji w rozprawie doktorskiej nie pozostawia też wątpliwości w kwestii umiejętności samodzielnego prowadzenia pracy naukowej przez mgr. Macieja Kucharskiego.

5. **Konkluzja.** W świetle powyższych uwag nie mam wątpliwości, że praca mgr. Macieja Kucharskiego spełnia wszystkie wymogi stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.

W mojej ocenie rezultaty uzyskane przez mgr. Macieja Kucharskiego znacząco wspomniane wymogi przewyższają i kwalifikują jego rozprawę do prestiżowych nagród. W związku z tym z pełnym przekonaniem stawiam wniosek o wyróżnienie rozprawy mgr. Macieja Kucharskiego.

Mateusz Kwaśnicki

Mateusz Kwaśnicki