Wrocław, 29.07.2024r.

prof. dr hab. Adam Nowak
Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Macieja Kucharskiego

pod tytułem

Norm estimates for Riesz transforms

(Oszacowania norm transformat Riesza)

Informacje wstępne

Rozprawa doktorska mgra Macieja Kucharskiego liczy około 120 stron i jest napisana w języku angielskim. Rozprawa podzielona jest na 5 rozdziałów, z których pierwszy ma charakter wstępny - zawiera opis głównych wyników dysertacji oraz ich motywacje i tło literaturowe. Kolejne rozdziały zawierają nowe rezultaty oraz ich dowody otrzymane przez doktoranta i są oparte na następujących pracach matematycznych.

[K1] M. Kucharski, B. Wróbel, *A dimension-free estimate on L^2 for the maximal Riesz transform in terms of the Riesz transform*, Math. Ann. 386 (2023), 1017–1039.

[K2] M. Kucharski, B. Wróbel, J. Zienkiewicz, *Dimension-free L^p estimates for higher order maximal Riesz transforms in terms of the Riesz transforms*, preprint 2023. `arXiv:2305.09279`

[K3] M. Kucharski, B. Wróbel, *On L^p estimates for positivity-preserving Riesz transforms related to Schrödinger operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), przyjęta do publikacji. `arXiv:2203.15530`

[K4] M. Kucharski, *Dimension-free estimates for positivity-preserving Riesz transforms related to Schrödinger operators with certain potentials*, preprint 2024. `arXiv:2405.01415`

Praca [K1] została opublikowana w prestiżowym czasopiśmie matematycznym, a praca [K4] została przyjęta do publikacji w periodyku podobnej rangi. Prace [K2] i [K4] zostały zgłoszone do publikacji i oczekują na decyzje redakcji czasopism.

Jak widać prace [K1–K3] są współautorskie, gdzie w każdym przypadku jako współautor/jeden ze współautorów występuje promotor rozprawy. Indywidualny wkład doktoranta do tych prac jest bardzo znaczący. Stosowna analiza znajduje się w dalszej części niniejszej recenzji. W stosunku do prac [K1–K4] treść rozprawy zawiera prostszy dowód specjalnego przypadku jednego z głównych wyników (Sekcja 3.2) oraz jest poszerzona o pewne standardowe dowody/rozumowania i różne szczegóły.

Zarys tematyki

Transformaty Riesza są fundamentalnymi operatorami w analizie harmonicznej, które były szeroko badane w rozmaitych kontekstach przez ostatnie kilkadziesiąt lat. Za tymi badaniami stoją oczywiście głębokie motywacje, a także różne zastosowania, których opis można znaleźć w standardowych podręcznikach. Do podstawowych wyników dotyczących transformat Riesza należą te nawiązujące do ich ograniczoności na L^p i innych przestrzeniach funkcyjnych, a także oszacowania stowarzyszonych norm operatorowych.

Klasyczne transformaty Riesza $R_1, \dots, R_n$ w $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1^{\dagger}$, są prototypami całek singularnych i ich teorii zainicjowanej zasadniczo$^{\flat}$ przez A. Calderóna i A. Zygmunda w latach 50tych ubiegłego wieku. Wśród klasycznych rezultatów tyczących się operatorów R_j, $j = 1, \dots, n$, należy wymienić ograniczoność na $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, i analogiczną ograniczoność powiązanych operatorów maksymalnych, tzw. *maksymalnych przyciętych transformat Riesza.*

W latach 80tych ubiegłego wieku E.M. Stein udowodnił, że norma wektora transformat Riesza $(R_1, \dots, R_n)$ jako operatora z $L^p(\mathbb{R}^n)$ do $L^p_{\ell^2}(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, jest kontrolowana przez stałą niezależną od wymiaru $n \geqslant 1$ (to oczywiście implikuje analogiczną bezwymiarową kontrolę dla każdego R_j z osobna). Następnie J. Duoandikoetxea i J.L. Rubio de Francia uogólnili ten wynik na transformaty Riesza dowolnego rzędu. Aspekt niezależności od wymiaru jest intrygujący i głęboki, a jego relatywnie trudne badanie w różnych sytuacjach stanowi ważny nurt we współczesnej analizie harmonicznej.

W latach 2006–2011 J. Mateu, J. Orobitg, C. Pérez i J. Verdera (w kilku pracach i w różnych konfiguracjach autorów) uzyskali wynik mówiący, że norma L^p, $1 < p < \infty$, maksymalnej przyciętej transformaty Riesza dowolnego rzędu w $\mathbb{R}^n$ jest kontrolowana przez normę L^p wyjściowej transformaty Riesza‡. W tym sensie jest to kontrola operatora maksymalnego przez operator wyjściowy, co jest dość nieintuicyjnym i nieoczekiwanym rezultatem (kontrola odwrotna jest oczywista).

Odpowiedniki klasycznych transformat Riesza były studiowane w przeróżnych sytuacjach, lietratura przedmiotu jest naprawdę bogata. Jednym z zauważalnych nurtów jest tutaj kontekst operatorów Schrödingera $L = -\Delta/2 + V$ w $\mathbb{R}^n$, gdzie do klasycznych zagadnień należy ograniczoność transformat Riesza na $L^p(\mathbb{R}^n)$ w zależności od warunków regularności nakładanych na potencjał V.

Pewnym mankamentem teorii transformat Riesza dla operatorów Schrödingera jest brak ich kanonicznej definicji, co niestety w literaturze prowadzi do pojemnej (w moim postrzeganiu zbyt pojemnej) terminologii *transformata Riesza* obejmującej zarówno operatory/całki singularne, jak również pewne operatory niesingularne i co więcej zachowujące dodatniość funkcji. Natura tych ostatnich operatorów oraz filozofia i metody ich badania są zupełnie inne, a zarazem mniej wysublimowane, niż w przypadku singularnych transformat Riesza.

Wyniki rozprawy

Rezultaty dysertacji w naturalny sposób dzielą się na dwie grupy skupione w Rozdziałach 2–3 oraz 4–5, odpowiednio.

Wyniki związane z klasycznymi transformatami Riesza. Niech R_j^* będzie operatorem maksymalnym związanym z przycięciami transformaty Riesza R_j w $\mathbb{R}^n$. Głównym wynikiem Rozdziału 2 jest oszacowanie

$$\|R_j^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|R_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

gdzie $C := 2 \cdot 10^8$ jest *absolutną* stałą numeryczną, w szczególności niezależną od wymiaru $n \geqslant 1$. Prostą konsekwencją (1) jest szacowanie

$$\|(R_1^* f, \dots, R_n^* f)\|_{L^2_{\ell^2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Strategia dowodu (1) opiera się na odpowiedniej faktoryzacji przyciętych transformat Riesza inspirowanej pracami Mateu i współautorów. Wówczas, w duchu metod pochodzących

† W przypadku jednowymiarowym $n = 1$ operator R_1 jest transformatą Hilberta.

♭ Korzenie tej teorii sięgają prac M. Riesza z lat 20tych XX wieku.

‡ W tym wyniku stałe w szacowaniach L^p są zależne od wymiaru.

od J. Bourgaina, analiza skupia się na rodzinie operatorów pochodzących z tej faktoryzacji: oszacowaniach mnożników fourierowskich z nią związanych i dalej stowarzyszonego operatora maksymalnego.

Rozdział 3 zawiera uogólnienie powyższych wyników jednocześnie w dwóch kierunkach: w miejsce przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$ rozważa się $L^p(\mathbb{R}^n)$ dla $1 < p < \infty$ oraz rozważa się transformaty Riesza dowolnego rzędu. Transformaty Riesza R_P rzędu $k \geqslant 1$ są definiowane przez harmoniczne wielomiany jednorodne rzędu k w $\mathbb{R}^n$, tzw. *harmoniki przestrzenne*$^\sharp$ rzędu k. Niech R_P^* oznacza operator maksymalny stowarzyszony z przycięciami transformaty R_P. Głównym wynikiem Rozdziału 3 jest szacowanie

$$\|(R^*_{P_1}f,\ldots,R^*_{P_m}f)\|_{L^p_{\ell^2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant A(p,k)\|(R_{P_1}f,\ldots,R_{P_m}f)\|_{L^p_{\ell^2}(\mathbb{R}^n)}, \qquad f\in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

gdzie $(P_1,\ldots,P_m)$ jest dowolnym wektorem $m \geqslant 1$ harmonik przestrzennych rzędu k, a $A(p,k)$ stałą zależną tylko od $p \in (1,\infty)$ i $k \geqslant 1$, w szczególności niezależną od m i od wymiaru $n \geqslant 1$. Zauważmy, że (3) można interpretować jako daleko idące uogólnienie (1).

Konsekwencją (3) i wspomnianego powyżej wyniku Duoandikoetxei i Rubio de Francii jest dużo ogólniejsza wersja szacowania (2):

$$\|(R^*_{Y_1}f,\ldots,R^*_{Y_{a(n,k)}}f)\|_{L^p_{\ell^2}(\mathbb{R}^n)} \leqslant G(p,k)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad f\in L^p(\mathbb{R}^n), \tag{4}$$

gdzie $(Y_1,\ldots,Y_{a(n,k)})$ jest układem $a(n,k)$ harmonik przestrzennych rzędu $k \geqslant 1$ w $\mathbb{R}^n$ generowanych przez dowolną bazę ortogonalną$^\natural$ przestrzeni harmonik sferycznych rzędu k i unormowanych tak aby $R^2_{Y_1}+\ldots+R^2_{Y_{a(n,k)}} = (-1)^k\,\mathrm{Id}$; stała $G(p,k)$ zależy tylko od $p \in (1,\infty)$ i $k \geqslant 1$, w szczególności nie zależy od wymiaru $n \geqslant 1$. Dysertacja zawiera ponadto szacowania asymptotyczne stałych $A(p,k)$ i $G(p,k)$ gdy k jest ustalone, a $p \to 1^+$ lub $p \to \infty$.

Nierówności (3) i (4) stanowią bez wątpienia główne osiągnięcie całej rozprawy. Dowód (3) jest długi i technicznie skomplikowany, łączy w sobie wiele zaawansowanych elementów/narzędzi, m.in. odpowiednią faktoryzację operatorów R_P^* oraz zespoloną metodę rotacji pochodzącą od T. Iwańca i G. Martina.

Wyniki związane z transformatami Riesza dla operatorów Schrödingera. W rozprawie rozważane są „transformaty Riesza" R_V^a dla operatorów Schrödingera $L = -\Delta/2+V$, które są operatorami/całkami niesingularnymi i zachowującymi dodatniość funkcji. De facto R_V^a jest potencjałem Riesza rzędu $2a > 0$ stowarzyszonym z L przemnożonym przez potęgę V^a dodatniego potencjału V.

Jednym z głównych wyników Rozdziału 4 jest ograniczoność R_V^a na $L^p(\mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 1$, $p \in (1,2]$, przy bardzo ogólnym założeniu lokalnej całkowalności V i dla zakresu $0 < a \leqslant 1/p$. Kluczowym narzędziem do uzyskania tego wyniku jest twierdzenie interpolacyjne, którego dowód opiera się na klasycznym twierdzeniu interpolacyjnym Steina dla analitycznych rodzin operatorów. Inne główne wyniki Rozdziału 4 to ograniczoność R_V^a, $a > 0$, na $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ i na $L^1(\mathbb{R}^n)$ dla pewnych klas potencjałów V. Tu dowody częściowo odwołują się do języka probabilistycznego, a centralnym narzędziem jest słynny wzór Feynmana-Kaca.

W Rozdziale 5 rozważana jest klasa potencjałów postaci

$$V(x) = V_1(x_1)+\ldots+V_n(x_n), \qquad x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

spełniających warunek

$$m|x_i|^\alpha \leqslant V_i(x_i) \leqslant M|x_i|^\alpha, \qquad i=1,\ldots,n,$$

dla pewnych stałych absolutnych $m, M > 0$ i $\alpha \in (0,2]$. Głównymi wynikami Rozdziału 5 są kontrola normy R_V^a na $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ przez stałą niezależną od wymiaru $n \geqslant 1$ oraz, przy

$\sharp$ ang. *solid harmonics*

$\natural$ Liczba elementów $a(n,k)$ tej bazy wyraża się jawnym wzorem.

restrykcji $\alpha \leqslant 1$, niezależna od wymiaru kontrola normy R_V^a na $L^1(\mathbb{R}^n)$. Metody dowodowe są podobne do tych z drugiej części Rozdziału 4, kluczową rolę odgrywa wzór Feynmana-Kaca. Dzięki strukturze (5) rozważanych potencjałów dowód redukuje się do dokładnej analizy przypadku jednowymiarowego.

Ocena dysertacji

Ocena merytoryczna wyników. Rezultaty rozprawy dotyczące transformat Riesza dla operatorów Schrödingera stanowią solidny oryginalny wkład do analizy harmonicznej operatorów Schrödingera. Istotnie uzupełniają istniejącą teorię i uogólniają niektóre wcześniejsze wyniki. Nowatorskie są zwłaszcza oszacowania bezwymiarowe, gdyż aspekt niezależności od wymiaru nie był szerzej badany w kontekście operatorów Schrödingera. Ogólnie cała ta grupa wyników z powodzeniem komponuje się jako wkład do bardzo dobrej rozprawy doktorskiej.

Natomiast rezultaty dysertacji dotyczące klasycznych transformat Riesza są wręcz spektakularne. Zadziwiające, że do ugruntowanej teorii o klasycznych obiektach udało się wnieść coś istotnie nowego i rzeczywiście ważnego. Szacowania (3) i (4) można interpretować jako unikfikację i pogłębienie wspomnianych wcześniejszych twierdzeń, z jednej strony tych należących do Steina oraz Duoandikoetxei i Rubio de Francii, a z drugiej strony tych pochodzących od Mateu i współpracowników. Rzeczone wyniki rozprawy są bez wątpienia interesujące dla szerokiego grona matematyków. Ponadto są kompletne, wysoce nietrywialne, a także w jakimś stopniu nieoczekiwane; całkiem prawdopodobne, że w przyszłości zagoszczą one w podręcznikach analizy harmonicznej. W kontekście doktoratu szacowania (3) i (4) są zaiste imponującym osiągnięciem naukowym.

Ocena wkładu doktoranta. W wynikach przedstawionych w dysertacji partycypowali doświadczeni matematycy, śp. dr hab. Jacek Zienkiewicz i promotor rozprawy prof. dr hab. Błażej Wróbel. W moim subiektywnym odczuciu nie jest możliwa rzetelna ocena przedmiotowego doktoratu, a tym bardziej kwestii ewentualnego formalnego wyróżnienia, bez choćby zgrubnego określenia wkładu doktoranta. W dostarczonych materiałach zabrakło stosownej informacji, poprosiłem zatem bezpośrednio doktoranta o odpowiedni opis.

Według deklaracji doktoranta Sekcja 2.1 została wypracowana na drodze równej współpracy z B. Wróblem i na bazie inspiracji pracą [37] (odwołanie do bibliografii w dysertacji). Doktorant opracował dowody Lematów 2.2.1, 2.2.3 i 2.2.4. Dowód Lematu 2.2.2 jest wzorowany na pracy [39], ale doktorant policzył w nim jawnie stałe, co jest nowe w stosunku do [39]. Wszystkie inne stałe w Rozdziale 2 również zostały policzone przez doktoranta.

W Rozdziale 3 ogólny zarys strategii dowodowej został naszkicowany przez J. Zienkiewicza. Faktoryzacja w Sekcji 3.1 została wypracowana na drodze równej współpracy z B. Wróblem i na bazie inspiracji pracami Mateu i współautorów. W Sekcjach 3.2–3.4 obliczenia/szacowania zostały wykonane przez doktoranta i B. Wróbla. Jakkolwiek pierwsze wersje tych kalkulacji, zwłaszcza dla ogólnych transformat Riesza (niekoniecznie nieparzystego rzędu) pochodzą od doktoranta; znajomość zespolonej metody rotacji doktorant zawdzięcza wcześniejszemu stażowi naukowemu na Uniwersytecie w Lublanie, pod opieką profesora Olivera Dragičevića. W Sekcji 3.5 doktorant dokonał wyliczeń (3.5.1), (3.5.2) i Lematu 3.5.3, a także napisał dowody Twierdzeń 3.5.1, 3.5.4 i 3.5.5. Ponadto zastosował metodę obrotów w (3.5.18) i w dowodzie Propozycji 3.5.6.

W Rozdziale 4 pomysłem doktoranta było użycie wzoru Feynmana-Kaca. Lematy 4.3.1 i 4.3.2 należą do doktoranta, podobnież odpowiedni podział przestrzeni probabilistycznej jest jego wkładem. Dowód Lematu 4.3.3 jest w dużej części zasługą doktoranta. Jego wkładem jest też druga część Propozycji 4.4.1, szacowanie (4.4.5). Do niego należy też dowód Propozycji 4.4.3.

Rozdział 5 jest w całości indywidualnym wkładem doktoranta.

Z powyższego opisu wynika, że wkład doktoranta do przedstawionych w rozprawie wyników jest bardzo znaczący, a jego udział dotyczy również warstwy ideowej. Ponadto doktorant posiada całkowicie samodzielny wkład w autonomiczne fragmenty dysertacji. Jest jasne, że doktorant jest pełnoprawnym (współ)twórcą prezentowanych rezultatów.

Ocena zredagowania rozprawy. Pod względem strukturalnym dysertacja prezentuje się bardzo dobrze. Jakość redakcji jest ogólnie dobra, rezultaty formułowane są w sposób zrozumiały, a dowody przedstawione z należytą starannością. Z perspektywy merytorycznej tekst jest w pełni czytelny, zawiera jednak pewne usterki matematyczne i językowe. Te istotniejsze zostały przedyskutowane i wyjaśnione na bieżąco bezpośrednio z doktorantem podczas procesu recenzowania. W tym miejscu pozwolę sobie tylko zobrazować podniesioną kwestię przez kilka przykładów.

- Na stronie 1 w definicji transformaty Fouriera $\mathcal{F}f(\xi)$ powinien pojawić się iloczyn skalarny wektorów ξ i x. Definicja $Tf(x)$ poprzez stowarzyszone jądro całkowe wymaga wartości głównej całki PV, ewentualnie restrykcji $x \notin \operatorname{supp} f$. Standardowo jądro K nie jest zdefiniowane na przekątnej $x = y$, wobec tego nie jest funkcją na całym produkcie $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Dalej, stwierdzenie, że jądro zachowuje się jak $|x-y|^{-d}$ gdy $|x-y| \to 0$ jest co najmniej niefortunne, gdyż typowo takie jądro zmienia znak wzdłuż przekątnej, a o zachowaniu operatora decydują subtelne kasowania na przekątnej; faktycznie chodzi tu o kontrolę wzrostu $|K(x,y)| \leqslant C|x-y|^{-d}$, a nie opis zachowania. Ponadto w oszacowaniu gradientowym konieczne jest nałożenie norm, powinno być $|\nabla_x K(x,y)|$ i $|\nabla_y K(x,y)|$. W drugiej linii od dołu chodzi o normę w przestrzeni Bochnera-Lebesgue'a $L^p_{\ell^2}(\mathbb{R}^d)$.
- Na stronie 4, w twierdzeniu Duoandikoetxei i Rubio de Francii konieczne jest odpowiednie normowanie harmonik. Poza tym, są to harmoniki przestrzenne, a nie sferyczne (doktorant utożsamia jedne i drugie, ale taka konwencja pojawia się dopiero w dalszej części rozprawy). Ponadto w twierdzeniu chodzi o dowolną bazę ortogonalną harmonik rzędu k, nie jakąś szczególną.
- Na stronie 9 treść Twierdzenia 1.4.8 jest niezrozumiała (ale na stronie 70 to samo twierdzenie jest już sformułowane poprawnie).
- Na stronie 13 wzorem Stirlinga jest nazywana podwójna nierówność (1.5.1), tymczasem według ugruntowanej w literaturze terminologii wzór Stirlinga jest formułą asymptotyczną dla dużych argumentów.
- Na stronie 17 chodzi o (Hermanna) Schwarza, nie (Laurenta) Schwartza (obydwaj byli wielkimi matematykami).
- Na stronie 96 w Twierdzeniu 4.4.5 poprzednik implikacji jest niekompletny.

Te i inne niedokładności rzutują na estetykę odbioru rozprawy, ale w żadnej mierze nie dewaluują wysokiej wartości otrzymanych rezultatów.

Podsumowanie

Recenzowana rozprawa doktorska wnosi istotny oryginalny wkład do rozwoju analizy harmonicznej. Otrzymanie zaprezentowanych wyników wymagało zaawansowanej wiedzy i pokonania poważnych trudności. Dysertacja reprezentuje zdecydowanie ponadprzeciętny poziom merytoryczny i bez wątpienia spełnia w tym zakresie wszelkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie Matematyka.

Biorąc pod uwagę głębię i wagę wyników, które rozprawa wnosi do teorii klasycznych transformat Riesza, wnoszę o formalne wyróżnienie dysertacji mgra Macieja Kucharskiego.

Signed by / Podpisano przez:

Adam Nowak
Instytut Matematyczny
Polskiej Akademii Nauk

Date / Data: 2024-07-29 11:44