

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Mikołaj Hasik

q-zdeformowane wyznaczniki

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. Marka Bożejki

Wrocław, 2023

1 Wstęp

φ -zdeformowanym wyznacznikiem nazywamy funkcję $\det_\varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, zadaną wzorem

$$\det_\varphi(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

dla pewnej funkcji $\varphi : S_n \rightarrow \mathbb{C}$. W tej pracy przyjrzymy się q -wyznacznikowi, zadanemu wzorem

$$\det_q(A) = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Idea q -wyznacznika pojawia się w wielu kontekstach.

Można o nim myśleć jako naturalnym uogólnieniu wyznacznika i permanentu [Bap92], ponieważ

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}, \quad \text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (1)^{\text{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

ustalając $q \in [-1, 1]$ interpolujemy pomiędzy tymi dwoma funkcjami. Stąd też ciekawe jest pytanie o rośnięcie q -wyznacznika na tym przedziale, które rozważamy w części 4.

q -wyznacznik pojawił się w zmodyfikowanym warunku unitarności dla grupy kwantowej $SU_q(2)$ [Wor87]. W pracy [BS91], q -wyznacznik pojawia się w iloczynie skalarnym na q -przestrzeni Focka, będącej uzupełnieniem względem owego iloczynu skalarnego, opisanego poniżej, przestrzeni

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n},$$

gdzie \mathcal{H} to przestrzeń Hilberta. Operator $S_q^{(n)}$ definiujemy dla $\xi \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ wzorem

$$S_q^{(n)}(\xi) = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} \sigma(\xi),$$

gdzie

$$\sigma(\xi) = \sigma(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = \xi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma(n)}.$$

Iloczyn skalarny na tej przestrzeni definiujemy wzorem

$$\langle \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n, \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_m \rangle_q = 0, \text{ jeśli } n \neq m,$$

$$\langle \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n, \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_m \rangle_q = \langle \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n, S_q^{(n)}(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n) \rangle, \text{ w przeciwnym wypadku.}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n, S_q^{(n)}(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) \rangle &= \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} \langle \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n, \xi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma(n)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} \langle \xi_1, \xi_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle \xi_n, \xi_{\sigma(n)} \rangle = \det_q(\langle \xi_i, \xi_j \rangle_{i,j=1}^n). \end{aligned}$$

Zatem dodatnia określoność q -wyznacznika, którą dowodzimy w rozdziale 3 jest konieczna, aby wyżej opisany iloczyn skalarny był poprawnie zdefiniowany.

W rozdziale 2 przyjrzymy się podstawowym i prostym w udowodnieniu własnościom q -wyznacznika. W rozdziale 3, wzorując się na pracy [BS91] pokażemy dowód dodatniej określoności \det_q , dodając niektóre lematy tam pominięte, oraz eksponując konstruowane w nim włożenie, dzięki czemu otrzymamy warunek dla dodatniej określoności $q^{d(x,y)}$ dla skończonych grafów, wspomniany w [HO07]. W rozdziale 4 uzupełnimy dowód rozwinięcia q -wyznacznika względem cykli w grafie $D(A)$, związanym z macierzą A , przedstawionego w [dF05], opierając się na pracy [MOvdDW89]. Skupimy się przy tym na warunkach dotyczących numerowania wierzchołków podanych w ramach korekty w [dF19], wystarczających aby wzory przedstawione w pierwszej pracy były prawdziwe, i podamy analogiczne łagodniejsze warunki dla grafów skierowanych. Dalej, korzystając z rozwinięcia względem cykli w grafie, pokażemy, że dla $q \in [-1, 1]$ q -wyznacznik jest rosnący dla macierzy dodatnio określonych, których graf jest drzewem. W rozdziale 5 zdefiniujemy q -potęgę Schura macierzy i wskażemy kilka podstawowych wyników z nią związanych.

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Podstawowe własności	3
2.1	Rozwinięcie Laplace'a	3
2.2	q-wyznacznik na macierzach permutacji	4
3	Dodatnia określoność	4
3.1	Grafy Cayleya	5
3.2	Funkcja $q^{\text{inv}(\sigma)}$	6
4	Monotoniczność q-wyznacznika	8
4.1	Definicje	9
4.2	Rozwinięcie q-wyznacznika względem cykli w grafie	9
4.3	Monotoniczność dla drzew	12
5	q-potęga Schura	14

2 Podstawowe własności

Pokażemy teraz kilka podstawowych własności q-wyznacznika. Z części z nich skorzystamy w dalszej części pracy. Zawsze gdy piszemy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, wyrazy A oznaczamy $(a_{ij})_{i,j=0}^n$. Mówimy że w permutacji σ znajduje się inwersja, gdy $i < j$ oraz $\sigma(i) > \sigma(j)$. Funkcja $\text{inv}(\sigma)$ zwraca liczbę inwersji w danej permutacji.

Lemat 1. *q-wyznacznik jest wieloliniowy*

Dowód. Oznaczmy przez $A_1 \dots A_n$ rzędy macierzy kwadratowej rozmiaru n . Wówczas

$$\begin{aligned} \det_q(A_1, \dots, A_k + B_k, \dots, A_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \dots (a_{k,\sigma(k)} + b_{k,\sigma(k)}) \dots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \dots a_{k,\sigma(k)} \dots a_{n,\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \dots b_{k,\sigma(k)} \dots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \det_q(A_1, \dots, A_k, \dots, A_n) + \det_q(A_1, \dots, B_k, \dots, A_n). \end{aligned}$$

□

Lemat 2. $\det_q(A) = \det_q(A^T)$

Dowód.

$$\begin{aligned} \det_q(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} a_{\sigma^{-1}(1)1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n}, \\ &\text{ponieważ } \text{inv}(\sigma) = \text{inv}(\sigma^{-1}), \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma^{-1})} a_{\sigma^{-1}(1)1} \dots a_{\sigma^{-1}(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \det_q(A^T). \end{aligned}$$

□

Uwaga 1. *Ponieważ $\det_q(A) = \det_q(A^T)$, q-wyznacznik jest również liniowy względem kolumn.*

2.1 Rozwinięcie Laplace'a

Pokażemy, że q-wyznacznik można zdefiniować rekurencyjnie za pomocą rozwinięcia Laplace'a w sposób analogiczny do standardowego wyznacznika.

Twierdzenie 3. $\det_q(A) = \sum_{i=1}^n q^{j-1} a_{1i} \det_q(A_{1i}) = \sum_{i=1}^n q^{j-1} a_{i1} \det_q(A_{i1})$

Do dowodu twierdzenia, przyda nam się obserwacja dotycząca liczby inwersji w permutacjach.

Lemat 4. Niech $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n-1) \end{pmatrix} \in S_{n-1}$. Wówczas permutacja

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i & \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n-1) \end{pmatrix} \in S_n,$$

spełnia zależność $\text{inv}(\sigma_i) = \text{inv}(\tau) + i - 1$.

Dowód. W σ_i znajdują się wszystkie inwersje z τ , oraz dodatkowe $i - 1$ inwersji i z mniejszymi od niego liczbami. \square

Możemy teraz wykonać rachunek:

$$\begin{aligned} \det_q(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma_i)} a_{1i} a_{2\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n-1)} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{1i} \sum_{\tau \in S_{n-1}} q^{\text{inv}(\tau)} q^{i-1} a_{2\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n-1)} = \sum_{i=1}^n q^{i-1} a_{1i} \det_q(A_{1i}). \end{aligned}$$

Ponieważ $\det_q(A) = \det_q(A^T)$, analogicznie możemy rozwinąć q -wyznacznik względem pierwszej kolumny.

Uwaga 2. Powód przez który ten wzór nie jest prawdziwy przy próbie rozwinięcia według innej niż pierwsza kolumny jest widoczny przy dowodzie lematu 19.

2.2 q -wyznacznik na macierzach permutacji

Oznaczmy przez M_σ macierz odpowiadającą permutacji $\sigma \in S_n$.

Lemat 5. $\det_q(M_\sigma) = q^{\text{inv}(\sigma)}$.

Dowód. Ponieważ $\det_q(M) = \sum_{\sigma \in S_n} q^{\text{inv}(\sigma)} m_{1,\sigma(1)} \cdots m_{n,\sigma(n)}$, a w macierzy permutacji w i -tej kolumnie jest jeden niezerowy element, na miejscu $\sigma(i)$, jedynym niezerowym składnikiem sumy jest $q^{\text{inv}(\sigma)}$. \square

Lemat 6. $\det_q(M_\sigma + M_\tau) = 2^k (q^{\text{inv}(\sigma)} + q^{\text{inv}(\tau)})$, gdzie $k = |\{i : \tau(i) = \sigma(i)\}|$.

Dowód. Korzystając z liniowości względem kolumn $\det_q(M_\sigma + M_\tau) = \sum_{i=1}^{2^n} \det_q(A_i)$, gdzie A_i to macierz w której w każdej kolumnie znajduje się dokładnie jedna jedynka. Zauważmy że każda z macierzy A_i powstaje przez wybór jednej z 2^n kombinacji, z której z dwóch macierzy permutacji pochodzi dana kolumna. Przyjrzyjmy się dwóm możliwym przypadkom:

1. Rozważmy macierze, w których dla i takich, że $\sigma(i) \neq \tau(i)$ wybieramy kolumnę z macierzy M_σ , a dla pozostałych z dowolnej macierzy. Takich macierzy jest 2^k oraz \det_q każdej z nich wynosi $q^{\text{inv}(\sigma)}$. Analogicznie postępując dla M_τ otrzymujemy 2^k macierzy o q -wyznaczniku $q^{\text{inv}(\tau)}$.

2. Rozważmy macierz $P = (P_1 \dots P_n)$ taką że kolumny P_i dla których $\sigma(i) \neq \tau(i)$, pochodzą z obu macierzy. Wówczas istnieje kolumna P_i , pochodząca z M_σ taka, że $\sigma(i) \neq \tau(i)$ oraz $P_{\tau^{-1}(\sigma(i))} = P_{\sigma(i)}$. Z założenia $\tau^{-1}(\sigma(i)) \neq \sigma(i)$, więc w macierzy P istnieje rząd bez 1, czyli $\det_q(P) = 0$. W przeciwnym wypadku wszystkie kolumny P_i takie, że $\sigma(i) \neq \tau(i)$ pochodziłyby z M_σ .

Zatem macierze o postaci z 1 przypadku to jedyne elementy sumy $\sum_{i=1}^{2^n} \det_q(A_i)$ o niezerowym q -wyznaczniku, więc $\det_q(M_\sigma + M_\tau) = 2^k (q^{\text{inv}(\sigma)} + q^{\text{inv}(\tau)})$. \square

Postępując analogicznie można rozszerzyć powyższy wzór na większą ilość macierzy, bądź kombinacje liniowe macierzy permutacji.

3 Dodatnia określoność

Mówimy że macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ jest dodatnio określona, jeśli $\langle Av, v \rangle \geq 0$. Piszemy wtedy $A \geq 0$. Mówimy że A jest ściśle dodatnio określona jeśli $\langle Av, v \rangle > 0$ dla $v \neq 0$. Piszemy wtedy $A > 0$.

Podobnie, mówimy, że $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ jest dodatnio określona na grupie G , jeżeli jądro $K(x, y) = \varphi(x^{-1}y)$ jest dodatnio określone na przestrzeni $L^2(G)$, czyli

$$\langle K\alpha, \alpha \rangle \geq 0.$$

Dla grup skończonych $\langle \alpha, \alpha \rangle = \sum_{x \in G} \alpha(x) \overline{\alpha(x)}$, czyli dla każdej funkcji $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\langle K\alpha, \alpha \rangle = \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} K(x, y) \alpha(y) \overline{\alpha(x)} = \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \varphi(x^{-1}y) \alpha(y) \overline{\alpha(x)}.$$

W tym rozdziale pokażemy twierdzenie:

Twierdzenie 7. *Jeśli $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ jest dodatnio określona, $\det_q(A) \geq 0$.*

Lemat 8. *Jeżeli φ jest funkcją dodatnio określoną, $\det_\varphi(A) \geq 0$ na macierzach dodatnio określonych. [BS91]*

Dowód. Ponieważ każda macierz dodatnio określona jest macierzą Grama, $a_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$, pewnego układu wektorów $\xi_1 \dots \xi_n$,

$$\begin{aligned} \det_\varphi(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\sigma) \langle \xi_1, \xi_{\sigma(1)} \rangle \dots \langle \xi_n, \xi_{\sigma(n)} \rangle, \text{ ponieważ działanie przez } \tau \text{ jest bijekcją,} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\tau^{-1}\sigma) \langle \xi_1, \xi_{\tau^{-1}\sigma(1)} \rangle \dots \langle \xi_n, \xi_{\tau^{-1}\sigma(n)} \rangle \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\tau^{-1}\sigma) \langle \xi_1, \xi_{\tau^{-1}\sigma(1)} \rangle \dots \langle \xi_n, \xi_{\tau^{-1}\sigma(n)} \rangle \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\tau^{-1}\sigma) \langle \xi_{\tau(1)}, \xi_{\sigma(1)} \rangle \dots \langle \xi_{\tau(n)}, \xi_{\sigma(n)} \rangle, \end{aligned}$$

z def. indukowanego iloczynu skalarnego na produkcie tensorowym,

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\tau^{-1}\sigma) \langle \xi_{\tau(1)} \otimes \xi_{\tau(2)} \otimes \dots \otimes \xi_{\tau(n)}, \xi_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \xi_{\sigma(n)} \rangle,$$

rozpisując iloczyn skalarny, oraz oznaczając $\alpha = \xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n$, $\alpha(\tau) = \xi_{\tau(1)} \otimes \dots \otimes \xi_{\tau(n)}$,

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^{n!} \varphi(\tau^{-1}\sigma) \alpha_k(\tau) \overline{\alpha_k(\sigma)},$$

widzimy że k -te współrzędne odpowiadają pewnej funkcji na S_n , oznaczmy ją α_k ,

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n!} \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\tau^{-1}\sigma) \alpha_k(\tau) \overline{\alpha_k(\sigma)}.$$

Ponieważ φ jest dodatnio określona, wewnętrzne sumy są nieujemne, zatem $\det_\varphi(A) \geq 0$. □

Uwaga 3. *Nie zachodzi odwrotna implikacja. Dla $q > 1$ $\det_q \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} + q|a_{12}|^2 > 0$, ale macierz $\begin{pmatrix} 1 & q \\ q & 1 \end{pmatrix}$ nie jest dodatnio określona.*

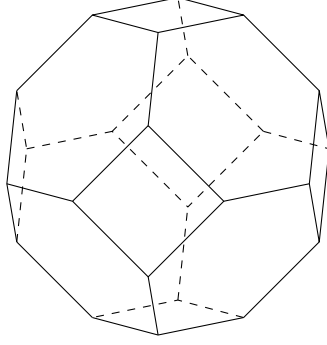
Uwaga 4. *Jeśli dla każdej funkcji α , $\sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \varphi(x^{-1}y) \alpha(y) \overline{\alpha(x)} > 0$, oraz $A > 0$, $\det_\varphi(A) > 0$.*

3.1 Grafy Cayleya

Grafem Cayleya grupy G , generowanym przez zbiór $S \subset G$ generatorów, nazywamy graf $\Gamma \langle G, S \rangle = (G, E)$. Pomiędzy wierzchołkami $a, b \in G$ jest krawędź, jeśli istnieje generator $g \in S$ taki, że $ag = b$. Każdej krawędzi możemy więc przypisać kolor odpowiadający generatorowi przenoszącemu jeden element na drugi przez mnożenie. Naturalną metryką na grafach jest długość najkrótszej ścieżki między wierzchołkami, która to odpowiada złożeniu odpowiedniej ilości generatorów. Oznaczmy tą metrykę d_W .

Interesuje nas graf Cayleya grupy S_n wygenerowany przez wszystkie transpozycje postaci $(i \ i+1)$, nazywane inwersjami.

Lemat 9. *W grafie $\Gamma \langle S_n, \{(i \ i+1) : i < n\} \rangle$, $d_W(\tau, \sigma) = \text{inv}(\tau^{-1}\sigma)$.*



Rysunek 1: Graf Cayleya S_4 wygenerowany przez inwersje $(1\ 2), (2\ 3), (3\ 4)$.

Dowód. Załóżmy, że $\text{inv}(\tau^{-1}\sigma) = k$. Oznaczmy $\gamma = \tau^{-1}\sigma$. Skonstruujemy γ^{-1} z k transpozycji sąsiednich elementów. Wybierzmy największe i takie, że $\gamma(i) > \gamma(i+1)$, (jeśli γ nie jest identycznością takie i istnieje), i nałóżmy inwersję $(i\ i+1)$. Wówczas $\text{inv}((i\ i+1)\gamma) = k-1$, ponieważ zlikwidowaliśmy inwersję między $\gamma(i)$ i $\gamma(i+1)$ i nie miało to wpływu na inwersje z pozostałymi elementami. Powtarzając ten proces otrzymamy γ^{-1} składając k transpozycji sąsiednich elementów. Ponieważ każda transpozycja $(i\ i+1)$ zmienia liczbę inwersji o co najwyżej 1, $d_W(\tau, \sigma) = k$.

Założmy, że $d_W(\tau, \sigma) = k$. Każda transpozycja zmienia liczbę inwersji o 1, więc $\text{inv}(\tau^{-1}\sigma) \leq k$, ale gdyby wartość $\text{inv}(\tau^{-1}\sigma)$ była mniejsza niż k , moglibyśmy skonstruować złożenie mniej niż k transpozycji sąsiednich elementów przenoszące τ na σ . \square

Dalej oznaczmy graf $\Gamma \langle S_n, \{(i\ i+1) : i < n\} \rangle$ z metryką $d_W(\tau, \sigma) = \text{inv}(\tau^{-1}\sigma)$ przez (S_n, inv) . Podobnie oznaczmy Graf n -wymiarowej hiperkostki,

$$\Gamma \left\langle \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_2, \{v_i : v_i = 1_i + \sum_{j=0, j \neq i}^n 0_j\} \right\rangle,$$

wraz z odległością Hamminga, zadaną wzorem $d_H(x, y) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$. dla $x, y \in \bigoplus^n \mathbb{Z}_2$, przez $(\bigoplus^n \mathbb{Z}_2, d_H)$.

3.2 Funkcja $q^{\text{inv}(\sigma)}$

Pokażemy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie 10. *Funkcja $q^{\text{inv}(\sigma)}$ jest dodatnio określona dla $q \in [-1, 1]$ na grupie S_n .*

Rozważmy zbiory $R_+, R_- \subset \{1, \dots, n\}^2$, $R_+ = \{(i, j) : i < j\}$, $R_- = \{(i, j) : i > j\}$. Oznaczmy $\sigma(R_+) = \{(\sigma(i), \sigma(j)) : (i, j) \in R_+\}$. Zauważmy, że dla $\sigma \in S_n$, $\text{inv}(\sigma) = |\sigma(R_+) \setminus R_+| = |\sigma(R_+) \cap R_-|$.

Zdefiniujmy $J : (S_n, \text{inv}) \hookrightarrow ((\mathcal{P}(R_- \cup R_+), \Delta), \|\cdot\|)$, gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną zbiorów, w następujący sposób: $J(\sigma) = \sigma(R_+)$. Zauważmy, że $2\text{inv}(\sigma) = \text{inv}(\sigma) + \text{inv}(\sigma^{-1}) = |\sigma(R_+) \setminus R_+| + |\sigma^{-1}(R_+) \setminus R_+|$, a ponieważ

$$\begin{aligned} |R_+ \setminus \sigma(R_+)| &= |\{(i, j) : \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)\}| = |\{(\sigma^{-1}(i), \sigma^{-1}(j)) : \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)\}| = |\sigma^{-1}(R_+) \setminus R_+|, \\ 2\text{inv}(\sigma) &= |\sigma(R_+) \setminus R_+| + |R_+ \setminus \sigma(R_+)| = |\sigma(R_+) \Delta R_+|. \end{aligned}$$

Wówczas, ponieważ dla $A, B \subset X$ i bijekcji f na X , $f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$,

$$2\text{inv}(\tau^{-1}\sigma) = |\tau(R_+) \Delta \sigma(R_+)| = |J(\sigma) \Delta J(\tau)|.$$

Grupa $(\mathcal{P}(R_- \cup R_+), \Delta)$ jest izomorficzna z $(\bigoplus^{n^2-n} \mathbb{Z}_2)$, w której indeksujemy kolejne współrzędne parami liczb, przez f zdefiniowane: $f(S) = v : v_{(i,j)} = 1$ wtw $(i, j) \in S$. Składając funkcje J, f , otrzymamy $F : (S_n, \text{inv}) \hookrightarrow (\bigoplus^{n^2-n} \mathbb{Z}_2, \|\cdot\|_2)$ takie, że

$$2\text{inv}(\tau^{-1}\sigma) = \|F(\tau) +_2 F(\sigma)\|_2^2.$$

Wobec tego, dla $q \in [0, 1]$

$$q^{\text{inv}(\tau^{-1}\sigma)} = e^{-\lambda \text{inv}(\tau^{-1}\sigma)} = e^{-\lambda/2 \|F(\tau) +_2 F(\sigma)\|_2^2},$$

dla pewnego $\lambda \geq 0$. Zatem

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} q^{\text{inv}(x^{-1}y)} \alpha(y) \overline{\alpha(x)} \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} e^{-\lambda/2 \|F(\tau) + 2F(\sigma)\|_2^2} \alpha(y) \overline{\alpha(x)} \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \prod_{(i,j) \in R_+ \cup R_-} \exp(-\lambda/2 (F(\tau)_{(i,j)} + 2F(\sigma)_{(i,j)})) \alpha(y) \overline{\alpha(x)}. \end{aligned}$$

Ponieważ iloczyn punktowy dwóch funkcji dodatnio określonych jest dodatnio określony, wystarczy pokazać, że dla każdych (i, j) ,

$$\sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \exp(-\lambda/2 (F(\tau)_{(i,j)} + 2F(\sigma)_{(i,j)})) \alpha(y) \overline{\alpha(x)} \geq 0.$$

Dla dowolnej funkcji α na S_n zdefiniujemy $\alpha_2 : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ w następujący sposób:

$$\alpha_2(0) = \sum_{\sigma: (\sigma(i), \sigma(j)) \in R_-} \alpha(\sigma), \quad (1)$$

$$\alpha_2(1) = \sum_{\sigma: (\sigma(i), \sigma(j)) \in R_+} \alpha(\sigma). \quad (2)$$

Wówczas

$$\sum_{\sigma \in G} \sum_{\tau \in G} e^{-\lambda/2 (F(\tau)_{(i,j)} + 2F(\sigma)_{(i,j)})} \alpha(\tau) \overline{\alpha(\sigma)} = \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 e^{-\lambda/2 (k+2l)} \alpha_2(k) \overline{\alpha_2(l)}. \quad (3)$$

Jest to prawda, ponieważ prawa strona ma postać

$$\begin{aligned} e^{-\lambda/2} & \left(\sum_{\sigma: (\sigma(i), \sigma(j)) \in R_-} \alpha(\sigma) \sum_{\tau: (\tau(i), \tau(j)) \in R_+} \overline{\alpha(\tau)} + \sum_{\tau: (\tau(i), \tau(j)) \in R_+} \alpha(\tau) \sum_{\sigma: (\sigma(i), \sigma(j)) \in R_-} \overline{\alpha(\sigma)} \right) + \\ & \sum_{\sigma: (\sigma(i), \sigma(j)) \in R_-} \alpha(\sigma) \sum_{\tau: (\tau(i), \tau(j)) \in R_-} \overline{\alpha(\tau)} + \sum_{\sigma: (\sigma(i), \sigma(j)) \in R_+} \alpha(\sigma) \sum_{\tau: (\tau(i), \tau(j)) \in R_+} \overline{\alpha(\tau)}. \end{aligned}$$

Zatem przy $e^{-\lambda/2}$ znajdują się wartości α na wszystkich parach permutacji różniących się inwersją pary (i, j) , a przy e^0 wszystkie pozostałe.

Wystarczy więc pokazać, że jądro $e^{-\lambda(x+2y)}$ jest dodatnio określone na \mathbb{Z}_2 . Weźmy dowolną funkcję $h : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$, wtedy

$$\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 e^{-\lambda(k+2l)} h(k) \overline{h(l)} = |h(0)|^2 + |h(1)|^2 + 2\Re(h(0) \overline{h(1)}) e^{-\lambda}.$$

Ponieważ $e^{-\lambda}$ jest malejąca dla $\lambda \geq 0$, a dla $\lambda = 0$ prawa strona to $|h(0) + h(1)|^2$,

$$\sum_{k,l=0}^1 e^{-\lambda(k+2l)} h(k) \overline{h(l)} \geq 0.$$

Pokazaliśmy zatem, że $q^{\text{inv}(\sigma)}$ jest dodatnio określona dla $q \in [0, 1]$. Zauważmy, że dla $q \in [-1, 0]$ $q^{\text{inv}(\sigma)} = (-1)^{\text{inv}(\sigma)} (-q)^{\text{inv}(\sigma)} = \text{sgn}(\sigma) (-q)^{\text{inv}(\sigma)}$.

Lemat 11. Funkcja $\text{sgn}(\sigma)$ jest dodatnio określona na S_n .

Dowód.

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau^{-1}\sigma) \alpha(\sigma) \overline{\alpha(\tau)},$$

ponieważ $\text{sgn}(\tau\sigma) = \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma)$ oraz $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1})$,

$$\begin{aligned} &= \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \alpha(\sigma) \overline{\alpha(\tau)} = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \alpha(\sigma) \right) \left(\sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) \overline{\alpha(\tau)} \right) \\ &= \left\langle \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \alpha(\sigma), \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) \alpha(\tau) \right\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Ponieważ iloczyn punktowy funkcji dodatnio określonych jest dodatnio określony, funkcja $q^{\text{inv}(\sigma)}$ jest dodatnio określona dla $q \in [-1, 1]$. \square

Uwaga 5. Jeśli istnieje włożenie z grafu $G = (V, E)$ w hiperkostkę $(\bigoplus^n \mathbb{Z}_2, \|\cdot\|_2)$, takie, że dla $x, y \in G$, $d(x, y) = \|F(x) + F(y)\|_2^2$, funkcja $q^{d(x,y)}$ jest dodatnio określona na grafie G dla $q \in [0, 1]$.

Dowód. Dla dowolnej funkcji $\alpha : G \rightarrow \mathbb{C}$ tworzymy $\alpha_2 : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ przypisując analogicznie do (1), (2), $\alpha_2(0)$ sumę wartości α na elementach przyjmujących po włożeniu wartość 0, $\alpha_2(1)$ sumę wartości α na elementach przyjmujących po włożeniu wartość 1. Wówczas analogicznie do (3) sprowadzamy dodatnią określoność $q^{d(x,y)}$ do dodatniej określoności $e^{-\lambda(x+2y)}$ na \mathbb{Z}_2 . \square

Ponieważ funkcja $q^{\text{inv}(\sigma)}$ jest dodatnio określona na S_n , z lematu 3 dla $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ dodatnio określonej, $\det_q(A) \geq 0$.

4 Monotoniczność q-wyznacznika

W tej części pracy przedstawimy częściowe rozwiązania otwartego problemu, postawionego w [Bap92]:

Problem 1. Czy dla dowolnej macierzy $A > 0$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, $\det_q(A)$ jest rosnący dla $q \in [-1, 1]$?

Znany jest dowód dla macierzy 3×3 . Przyda się nam lemat:

Lemat 12. Jeśli macierz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} \end{pmatrix} > 0$ nad \mathbb{C} , macierze $\begin{pmatrix} a_{11} & -|a_{12}| \\ -|a_{12}| & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & |a_{12}| \\ |a_{12}| & a_{22} \end{pmatrix}$ są ściśle dodatnio określone nad \mathbb{R} .

Dowód. Bez straty ogólności założymy, że $|a_{ij}| < 1$. Ponieważ $a_{ij} = \langle \xi_i, \xi_j \rangle$ dla pewnych wektorów ξ_1, ξ_2 , korzystając z nierówności Schwarz'a $|a_{12}| < \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$, zatem $|a_{12}| < |a_{11}|$ i $|a_{12}| < |a_{22}|$. Założymy, że $a_{11} < a_{22}$.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -|a_{12}| & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 - 2|a_{12}|xy = a_{11}x^2 + a_{11}y^2 - 2|a_{12}|xy + (a_{22} - a_{11})y^2$$

Jeśli $xy < 0$ suma jest dodatnia. Jeśli $xy > 0$

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 - 2|a_{12}|xy > a_{11}(x - y)^2,$$

zatem całość jest dodatnia.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ |a_{12}| & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2|a_{12}|xy = a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2|a_{12}|xy + (a_{22} - a_{11})y^2.$$

Jeśli $xy > 0$ suma jest dodatnia. Jeśli $xy < 0$,

$$a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + 2|a_{12}|xy > a_{11}(x + y)^2,$$

zatem całość jest dodatnia. Analogicznie postępujemy gdy $a_{11} \geq a_{22}$. \square

Twierdzenie 13. Dla dowolnej macierzy $A > 0$, $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$, $\det_q(A)$ jest rosnący dla $q \in [-1, 1]$.

Dowód.

$$\det_q(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + qa_{11}|a_{23}|^2 + q|a_{12}|^2a_{33} + 2q^2\Re(a_{12}\overline{a_{13}}a_{23}) + q^3|a_{13}|^2a_{22}.$$

Zatem

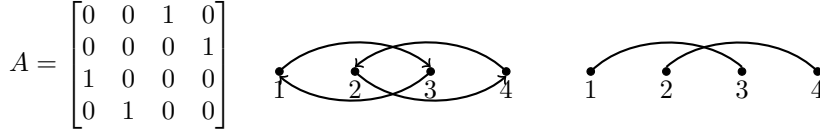
$$\frac{d}{dq} \det_q(A) = a_{11}|a_{23}|^2 + |a_{12}|^2a_{33} + 4q\Re(a_{12}\overline{a_{13}}a_{23}) + 3q^2|a_{13}|^2a_{22}.$$

Jeżeli $q > 0$,

$$\frac{d}{dq} \det_q(A) \geq a_{11}|a_{23}|^2 + |a_{12}|^2a_{33} - 4q|a_{12}a_{13}a_{23}| + 3q^2|a_{13}|^2a_{22}.$$

Zauważmy, wyrażenie po prawej stronie jest równe

$$\begin{pmatrix} |a_{23}| & q|a_{13}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & -|a_{12}| \\ -|a_{12}| & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a_{23}| \\ q|a_{13}| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q|a_{13}| & |a_{12}| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -|a_{23}| \\ -|a_{23}| & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q|a_{13}| \\ |a_{12}| \end{pmatrix} + q^2|a_{13}|^2a_{22}.$$



Rysunek 2: Od lewej: macierz A , graf skierowany $D(A)$, graf nieskierowany $G(A)$

Ponieważ, z lematu 12, obie macierze są ściśle dodatnio określone, a $a_{22} > 0$, $\frac{d}{dq} \det_q(A) > 0$. Podobnie, jeśli $q < 0$

$$\frac{d}{dq} \det(A) \geq a_{11}|a_{23}|^2 + |a_{12}|^2 a_{33} + 4q|a_{12}a_{13}a_{23}| + 3q^2|a_{13}|^2 a_{22}.$$

Ponownie, wyrażenie po prawej stronie jest równe

$$(|a_{23}| \quad q|a_{13}|) \begin{pmatrix} a_{11} & |a_{12}| \\ |a_{12}| & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a_{23}| \\ q|a_{13}| \end{pmatrix} + (q|a_{13}| \quad |a_{12}|) \begin{pmatrix} a_{22} & |a_{23}| \\ |a_{23}| & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q|a_{13}| \\ |a_{12}| \end{pmatrix} + q^2|a_{13}|^2 a_{22},$$

zatem $\frac{d}{dq} \det_q(A) > 0$. □

Pokażemy teraz wyniki przedstawione w pracy [dF05], wraz z dowodem oraz wymaganymi dodatkowymi warunkami, wspomnianymi w [dF19].

4.1 Definicje

Dla macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ przez $D(A) = (V, E)$ oznaczmy graf skierowany o wierzchołkach indeksowanych liczbami od 1 do n taki, że $(i, j) \in E$ gdy $a_{ij} \neq 0$. Dla macierzy hermitowskiej analogicznie oznaczamy graf nieskierowany $G(A) = (V, \mathcal{E})$ w którym $\{i, j\} \in \mathcal{E}$ jeśli $a_{ij} \neq 0$ oraz $a_{ji} \neq 0$. Przez cykl w grafie rozumiemy ciąg wierzchołków i_1, i_2, \dots, i_l taki, że $i_j \neq i_l$ jeśli $j \neq l$, $(i_j, i_{j+1}) \in E$ dla każdego j oraz $(i_l, i_1) \in E$.

Dla permutacji $\sigma \in S_n$ przez c_1, \dots, c_k oznaczmy jej rozkład na cykle rozłączne. Przez graf permutacji $\sigma \in S_n$ rozumiemy graf skierowany D_σ o wierzchołkach indeksowanych liczbami od 1 do n taki, że $(i, j) \in E$ wtw $\sigma(i) = j$. Dla każdego i takiego, że $\sigma(i) = i$ w naszym rozkładzie znajdzie się 1 elementowy cykl odpowiadający pętli (i, i) w grafie D_σ .

W grafie skierowanym 1-faktoryzacja to podzbiór krawędzi grafu taki, że stopień wejścia oraz wyjścia każdego z wierzchołków wynosi 1. Zauważmy, że taki rozkład na cykle rozłączne $\sigma = c_1 \dots c_k$ zadaje 1-faktoryzację grafu D_σ cyklami rozłącznymi. Mówimy, że $(i, j) \in c_l$ jako cyklu w grafie D_σ gdy $c_l(i) = j$.

4.2 Rozwinięcie q -wyznacznika względem cykli w grafie

Wzory przedstawione w tej części są prawdziwe jeśli indeksy wierzchołków $G(A)$ oraz $D(A)$ spełniają odpowiednie warunki. W [dF19], dla $G(A)$ jeśli dwie rozłączne krawędzie $\{i, j\}, \{k, l\} \in E$ oraz $i < j$, $k < l$, to

$$i < j < k < l \tag{4}$$

lub

$$i < k < l < j. \tag{5}$$

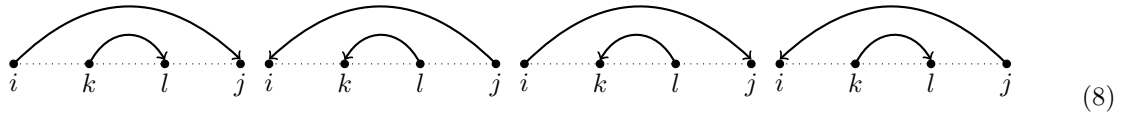
Zauważmy, że oznaczają one, że po rozłożeniu wierzchołków grafu na osi liczbowej, dla każdych dwóch rozłącznych krawędzi, zachodzi sytuacja



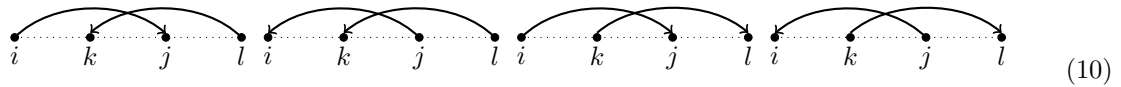
lub



Czyli po rozłożeniu wierzchołków grafu na osi liczbowej, krawędzie nie mogą się przecinać. Z dowodu lematu 14 wynika iż dla grafu skierowanego $D(A)$ wystarczający jest nieco łagodniejszy warunek. Mianowicie jeśli w $D(A)$ istnieją rozłączne cykle c_1, c_2 takie, że wierzchołki $i, j \in c_1, k, l \in c_2$, krawędzie są w jednym z ułożeń:



Zatem, jeśli w $D(A)$ istnieją rozłączne cykle c_1, c_2 takie, że $(i, j) \in c_1, (k, l) \in c_2$, aby spełniał powyższy warunek, w grafie nie może być krawędzi:



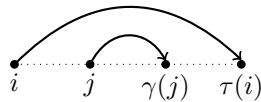
Jeśli graf $G(A)$ spełnia warunki (4),(5), graf $D(A)$ spełnia warunki (8),(9). Gdyby w $G(A)$ istniały dwie rozłączne krawędzie przecinające się, w $D(A)$ krawędzie te należały by do dwóch rozłącznych cykli, czyli nie spełniałyby warunków (8),(9).

Lemat 14. *Jeśli graf permutacji $\sigma \in S_n$, D_σ spełnia warunki (8),(9) oraz τ, γ są rozłącznymi permutacjami takimi, że $\tau\gamma = \sigma$, dla $i < j$ $\sigma(i) > \sigma(j)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\tau(i) > \tau(j)$ lub $\gamma(i) > \gamma(j)$.*

Dowód. Jeśli i, j oba nie są punktami stałymi jednej z permutacji τ lub γ , ponieważ są one rozłączne, status ich inwersji nie zmienia się po złożeniu permutacji. Weźmy zatem dowolne i, j takie, że $i < j$ oraz $\tau(i) \neq i$ i $\gamma(j) \neq j$ i rozpatrzmy możliwe przypadki.

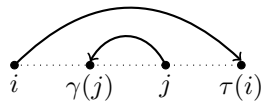
1. $\tau(i) > j$ oraz

(a) $\gamma(j) > j$. Wówczas jedynym możliwym ułożeniem jest



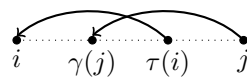
zatem $\sigma(i) > \sigma(j)$.

(b) $\gamma(j) < j$. Wtedy jedynym możliwym ułożeniem jest



zatem $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Załóżmy, że $\sigma(i) > \sigma(j)$, ale $\tau(i) < j$ oraz $i < \gamma(j)$. Wówczas musiałyby istnieć krawędź



co daje sprzeczność z założeniem. □

Wniosek 14.1. *Jeśli graf permutacji $\sigma \in S_n$, D_σ spełnia warunki (8),(9) oraz τ, γ są rozłącznymi permutacjami takimi, że $\tau\gamma = \sigma$, $\text{inv}(\sigma) = \text{inv}(\tau) + \text{inv}(\gamma)$*

Teraz będziemy postępować analogicznie do dowodu dla wyznacznika znajdującego się w [MOvdDW89].

Lemat 15. *Jeśli graf permutacji $\sigma = c_1 \dots c_k \in S_n$, D_σ spełnia warunki (8),(9), dla macierzy $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$*

$$q^{\text{inv}(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = q^{\text{inv}(c_1)} \prod_{(i,j) \in c_1} a_{ij} \dots q^{\text{inv}(c_k)} \prod_{(i,j) \in c_k} a_{ij}.$$

Dowód. Z wniosku 14.1 wynika, że $q^{\text{inv}(\sigma)} = \prod_{i=1}^k q^{\text{inv}(c_i)}$. Ponieważ $\sigma = c_1 \dots c_k$, w iloczynach $\prod_{(i,j) \in c_l} a_{ij}$ znajdują się wszystkie składniki $\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}$. \square

Zauważmy, że ponieważ $q^{\text{inv}(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \neq 0$ tylko gdy każdy z wyrazów $a_{i\sigma(i)}$ jest niezerowy, dla danej permutacji, iloczyn jest niezerowy tylko gdy rozkład na cykle σ tworzy 1-faktoryzację $D(A)$, czyli każda krawędź z D_σ znajduje się w $D(A)$. Jeśli graf $D(A)$ spełnia warunki (8),(9), graf każdej permutacji dającej niezerowy iloczyn również spełnia warunki (8),(9). Możemy teraz sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 16. *Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$, przez $\mathcal{F} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ oznaczmy zbiór permutacji których rozkład na cykle tworzy 1-faktoryzację $D(A)$. Jeśli $D(A)$ spełnia warunki (8),(9),*

$$\det_q(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{F}} \prod_{l=1}^{k_\sigma} q^{\text{inv}(c_{l\sigma})} \prod_{(i,j) \in c_{1\sigma}} a_{ij} \dots \prod_{(i,j) \in c_{k_\sigma\sigma}} a_{ij}. \quad (11)$$

Możemy teraz pokazać kluczowe twierdzenie tego rozdziału. Dla cyklu $c = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k)$ przez $A \setminus c$ rozumiemy macierz której graf $D(A \setminus c)$ powstał przez usunięcie wszystkich krawędzi połączonych ze zbiorem wierzchołków $\{i_1, \dots, i_k\}$, zatem dla $i_l \in c$, dla każdego $j \neq i_l$ $a_{ij} = 0$ oraz $a_{ji} = 0$, oraz $a_{i_l i_l} = 1$.

Twierdzenie 17. *Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Oznaczmy przez v pewien ustalony wierzchołek w $D(A)$ oraz przez c_1, \dots, c_m cykle w $D(A)$, zawierające wierzchołek v . Jeśli $D(A)$ spełnia warunki (8),(9)*

$$\det_q(A) = \sum_{l=1}^m q^{\text{inv}(c_l)} \det_q(A \setminus c_l) \prod_{(i,j) \in c_l} a_{ij}. \quad (12)$$

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ zbiory permutacji tworzących 1-faktoryzację $D(A)$, które w swoim rozkładzie na cykle rozłączne zawierają odpowiednio c_1, \dots, c_m . Oczywiście są one rozłączne. Zgodnie z wzorem (11):

$$\det_q(A) = \sum_{l=1}^m \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_l} \prod_{c \in \sigma} q^{\text{inv}(c)} \prod_{(i,j) \in c} a_{ij},$$

wyłaczając przed sumę cykl c_l oraz powiązany z nim iloczyn składników macierzy

$$\det_q(A) = \sum_{l=1}^m q^{\text{inv}(c_l)} \prod_{(i,j) \in c_l} a_{ij} \sum_{\sigma \in \mathcal{F}_l} \prod_{\substack{c \in \sigma \\ c \neq c_l}} q^{\text{inv}(c)} \prod_{\substack{(i,j) \in c \\ c \neq c_l}} a_{ij}.$$

Możemy teraz zauważyć, że

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{F}_l} \prod_{\substack{c \in \sigma \\ c \neq c_l}} q^{\text{inv}(c)} \prod_{\substack{(i,j) \in c \\ c \neq c_l}} a_{ij} = \det_q(A \setminus c_l),$$

gdy rozpiszemy $\det_q(A \setminus c_l)$ zgodnie z wzorem (11). \square

Przykład 1. *Zauważmy, że graf macierzy*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z Rysunku 4.1 nie spełnia warunków (8),(9). Z lematu 5 wiemy, że $\det_q(A) = q^{\text{inv}((13)(24))} = q^4$, podczas gdy rozwijając względem cykli przechodzących przez wierzchołek 1 otrzymamy

$$q^{\text{inv}(13)} \det_q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = q^{\text{inv}(13)} q^{\text{inv}(24)} = q^6.$$

Jeśli macierz A jest hermitowska, wszystkie krawędzie w $D(A)$ mają odpowiednik w przeciwnym kierunku. Możemy zatem myśleć o grafie nieskierowanym $G(A) = (V, \mathcal{E})$ w którym $\{i, j\} \in \mathcal{E}$ jeśli $a_{ij} \neq 0$ oraz $a_{ji} \neq 0$. W dalszej części pracy przez (ij) rozumiemy transpozycję $(i j)$, lub przez nadużycie notacji utożsamiany z nią cykl w grafie $D(A)$.

Twierdzenie 18. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ będzie macierzą hermitowską. Oznaczmy przez i pewien ustalony wierzchołek w $D(A)$ oraz przez c_1, \dots, c_m cykle w $D(A)$ dłuższe niż 2 elementy, zawierające wierzchołek i . Jeśli $G(A)$ spełnia warunki (4),(5),

$$\det_q(A) = a_{ii} \det_q(A \setminus (i)) + \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} q^{\text{inv}(ij)} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (ij)) + \sum_{l=1}^m q^{\text{inv}(c_l)} \det_q(A \setminus c_l) \prod_{e \in c_l} a_e,$$

gdzie e to pary indeksów krawędzi należących do c_l .

Dowód. Wzór ten wynika z zastosowania rozwinięcia (11) i wyodrębnienia cyklu 1 elementowego oraz cykli 2 elementowych. \square

Zauważmy że w $G(A)$ znajduje się cykl wtedy i tylko wtedy gdy w $D(A)$ znajduje się cykl posiadający więcej niż 2 elementy.

Wniosek 18.1. Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ będzie macierzą hermitowską, $i \in \{1, \dots, n\}$. Jeśli $G(A)$ spełnia warunki (4),(5) oraz jest drzewem

$$\det_q(A) = a_{ii} \det_q(A \setminus (i)) + \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} q^{\text{inv}(ij)} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (ij)). \quad (13)$$

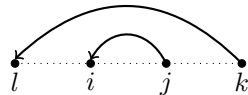
4.3 Monotoniczność dla drzew

Możemy teraz, badając pochodną pokazać rośnięcie q -wyznacznika na dodatnio określonych macierzach.

Lemat 19. [dF05] Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ będzie macierzą hermitowską, $i \in \{1, \dots, n\}$. Jeśli $G(A)$ spełnia warunki (4),(5) oraz jest drzewem,

$$\frac{d}{dq} \det_q(A) = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (ij)). \quad (14)$$

Dowód. Zauważmy, że $\det_q(A \setminus (1)) = \det_q(A_{11})$, gdzie A_{11} to minor z usuniętą 1 kolumną i wierszem, ponieważ każda permutacja tworząca 1-faktoryzację $D(A \setminus (1))$ nie ma elementów będących w inwersji z 1. Podobnie $\det_q(A \setminus (1j)) = \det_q(A_{1j})$, gdzie A_{1j} to minor utworzony poprzez usunięcie kolumn oraz wierszy indeksowanych 1, j , ponieważ każda permutacja tworząca 1-faktoryzację $D(A \setminus (1j))$ nie ma elementów będących w inwersji z 1 bądź j . Nie jest to prawda dla $i \neq 1$, ponieważ wówczas mogą istnieć permutacje zawierające cykl (ij) o grafie D_σ zawierającym krawędź



wówczas obcięcie permutacji do zbioru $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ zmieniło by liczbę inwersji, przez co wartość \det_q .

Ta obserwacja pozwala nam na przeprowadzenie dowodu przez indukcję po wymiarze macierzy n . Dla $n = 2$,

$$\frac{d}{dq} \det_q(A) = |a_{12}|^2 = q^{\text{inv}(12)-1} |a_{12}|^2 \det_q \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Załóżmy, że wzór (14) zachodzi dla macierzy hermitowskich wymiaru mniejszego niż n . ponieważ

$$\det(A) = a_{11} \det_q(A \setminus (1)) + \sum_{\{1,j\} \in \mathcal{E}} q^{\text{inv}(1j)} |a_{1j}|^2 \det_q(A \setminus (1j)),$$

$$\frac{d}{dq} \det_q(A) = \frac{d}{dq} a_{11} \det_q(A_{11}) + \sum_{\{1,k\} \in \mathcal{E}} \text{inv}(1k) q^{\text{inv}(1k)-1} |a_{1k}|^2 \det_q(A_{1k}) + \sum_{\{1,k\} \in \mathcal{E}} q^{\text{inv}(1k)} |a_{1k}|^2 \frac{d}{dq} \det_q(A_{1k}),$$

skorzystamy z założenia dla A_{11} oraz A_{1j} ,

$$\begin{aligned} &= a_{11} \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E} \\ 1 < i, 1 < j}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (1)(ij)) + \sum_{\{1,k\} \in \mathcal{E}} \text{inv}(1k) q^{\text{inv}(1k)-1} |a_{1k}|^2 \det_q(A_{1k}) \\ &+ \sum_{\{1,k\} \in \mathcal{E}} q^{\text{inv}(1k)} |a_{1k}|^2 \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E} \\ 1 < i, 1 < j \\ i \neq k, j \neq k}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (1k)(ij)). \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\sum_{\{1,k\} \in \mathcal{E}} q^{\text{inv}(1k)} |a_{1k}|^2 \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E} \\ 1 < i, 1 < j \\ i \neq k, j \neq k}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (1k)(ij)) \quad (15)$$

$$= \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E} \\ 1 < i, 1 < j}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \sum_{\{1,k\} \in G(A \setminus (ij))} q^{\text{inv}(1k)} |a_{1k}|^2 \det_q(A \setminus (1k)(ij)). \quad (16)$$

Korzystając ze wzoru

$$\det_q(A \setminus (ij)) = a_{11} \det_q(A \setminus (1)(ij)) + \sum_{\{1,k\} \in G(A \setminus (ij))} q^{\text{inv}(1k)} |a_{1k}|^2 \det_q(A \setminus (1k)(ij)),$$

dla każdego (i, j) w poniższej sumie

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E} \\ 1 < i, 1 < j}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 a_{11} \det_q(A \setminus (1)(ij)) + \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E} \\ 1 < i, 1 < j}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \sum_{\{1,k\} \in G(A \setminus (ij))} q^{\text{inv}(1k)} |a_{1k}|^2 \det_q(A \setminus (1k)(ij)) \\ &= \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E} \\ 1 < i, 1 < j}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (ij)). \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \det_q(A) &= \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E} \\ 1 < i, 1 < j}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (ij)) + \sum_{\{1,k\} \in \mathcal{E}} \text{inv}(1k) q^{\text{inv}(1k)-1} |a_{1k}|^2 \det_q(A_{1k}) \\ &= \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (ij)) \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 20. [dF05] Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ będzie macierzą hermitowską, dodatnio określoną, $i \in \{1, \dots, n\}$. Jeśli $G(A)$ spełnia warunki (4), (5) oraz jest drzewem, $\det_q(A)$ jest funkcją niemalejącą dla $q \in [-1, 1]$.

Dowód. Macierz $A \setminus (ij)$ jest dodatnio określona, bo na podprzestrzeni zadanej indeksami $\{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$ zachowuje się jak główny minor A , który jest dodatnio określony, a na pozostałych jak identyczność. Zatem, ponieważ z twierdzenia 7 $\det_q(A \setminus (ij)) \geq 0$, oraz ilość inwersji w transpozycji (ij) jest zawsze nieparzysta, w sumie

$$\frac{d}{dq} \det_q(A) = \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} \text{inv}(ij) q^{\text{inv}(ij)-1} |a_{ij}|^2 \det_q(A \setminus (ij))$$

wszystkie składniki są nieujemne, zatem q -wyznacznik jest niemalejący. □

5 q-potęga Schura

Potęga Schura macierzy $n \times n$ A nazywamy macierz $\pi(A)$ wymiaru $n! \times n!$, indeksowaną parami permutacji (σ, τ) w porządku leksykograficznym, w której wyraz na miejscu (σ, τ) wynosi $\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)\tau(i)}$. Jeśli A jest macierzą dodatnio określoną, $\pi(A)$ również jest dodatnio określona. Wśród wartości własnych tej macierzy znajduje się $\det A$ oraz $\text{perm } A$, ponadto jeśli A jest dodatnio określona, $\det A$ jest najmniejszą wartością własną $\pi(A)$ [Bap07].

Oznaczmy przez $P_q = (q^{\text{inv}(\tau^{-1}\sigma)})_{\tau, \sigma \in S_n}$ jądro funkcji $q^{\text{inv}(\sigma)}$. Zdefiniujmy

$$\pi_q(A) = \pi(A) \circ P_q$$

„q-potęga” Schura jako iloczyn punktowy P_q oraz $\pi(A)$. Ponieważ iloczyn punktowy macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony, $\pi_q(A)$ jest dodatnio określona dla $q \in [-1, 1]$. Pokażemy że wówczas \det_q oraz \det_{-q} są wartościami własnymi $\pi(A)$.

Lemat 21. $\pi(A)\mathbf{1} = \det_q(A)\mathbf{1}$, gdzie $\mathbf{1} = (1 \ \dots \ 1)^T$

Dowód.

$$\begin{aligned} \pi_q(A)\mathbf{1} &= \left(\sum_{\tau \in S_n} q^{\text{inv}(\tau^{-1}\sigma_k)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma_k(i)\tau(i)} \right)_{k=1}^{n!} = \left(\sum_{\tau \in S_n} q^{\text{inv}(\tau^{-1}\sigma_k)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_k^{-1}\tau(i)} \right)_{k=1}^{n!} \\ &= \left(\sum_{\gamma \in S_n} q^{\text{inv}(\gamma)} \prod_{i=1}^n a_{i\gamma(i)} \right)_{k=1}^{n!} = \det_q(A)\mathbf{1} \end{aligned}$$

□

Lemat 22. Niech $v = (\text{sgn}(\tau_1) \ \dots \ \text{sgn}(\tau_{n!}))^T$. Wówczas $\pi(A)v = \det_{-q}(A)v$

Dowód.

$$\pi(A)v = \left(\sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) q^{\text{inv}(\tau^{-1}\sigma_k)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_k^{-1}\tau(i)} \right)_{k=1}^{n!}$$

Niech $\gamma = \sigma_k^{-1}\tau$

$$\pi(A)v = \left(\sum_{\gamma \in S_n} \text{sgn}(\sigma_k\gamma) q^{\text{inv}(\gamma^{-1})} \prod_{i=1}^n a_{i\gamma(i)} \right)_{k=1}^{n!} = \left(\text{sgn}(\sigma_k) \sum_{\gamma \in S_n} \text{sgn}(\gamma) q^{\text{inv}(\gamma)} \prod_{i=1}^n a_{i\gamma(i)} \right)_{k=1}^{n!} = \det_{-q}(A)v.$$

□

Łatwo zweryfikować, że dla $n = 2$, \det_{-q} jest najmniejszą wartością własną $\pi_q(A)$. Badając programem przypadek $n = 3$ odkryliśmy, że macierz

$$\pi_q \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q^1 & q^1 & q^2 & q^2 & q^3 \\ q^1 & 1 & q^2 & q^1 & q^3 & q^2 \\ q^1 & q^2 & 1 & q^3 & q^1 & q^2 \\ q^2 & q^1 & q^3 & 1 & q^2 & q^1 \\ q^2 & q^3 & q^1 & q^2 & 1 & q^1 \\ q^3 & q^2 & q^2 & q^1 & q^1 & 1 \end{pmatrix}$$

ma wartość własną $(q-1)^2(q+1)$, która dla $q > 0.6$ jest mniejsza od

$$\det_{-q} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -q^3 + 2q^2 - 2q + 1$$

Zatem $\det_{-q}(A)$ nie zawsze jest najmniejszą wartością własną $\pi_q(A)$. Okazuje się, że jest to wynik opisany w [BL94].

Literatura

- [Bap92] R. B. Bapat. Interpolating the determinantal and permanental Hadamard inequality. *Linear Multilinear Algebra*, 32(3-4):335–337, 1992.
- [Bap07] R. B. Bapat. Recent developments and open problems in the theory of permanents. *Math. Stud.*, 76(1-4):55–69, 2007.
- [BL94] R. B. Bapat and A. K. Lal. Inequalities for the q -permanent. *Linear Algebra Appl.*, 197-198:397–409, 1994.
- [BS91] Marek Bożejko and Roland Speicher. An example of a generalized Brownian motion. *Commun. Math. Phys.*, 137(3):519–531, 1991.
- [dF05] C. M. da Fonseca. On a conjecture about the μ -permanent. *Linear Multilinear Algebra*, 53(3):225–230, 2005.
- [dF19] Carlos M. da Fonseca. The μ -permanent revisited. *Linear Multilinear Algebra*, 67(8):1713–1714, 2019.
- [HO07] Akihito Hora and Nobuaki Obata. *Quantum probability and spectral analysis of graphs. With a foreword by Professor Luigi Accardi*. Theor. Math. Phys. (Cham). Berlin: Springer, 2007.
- [MOvdDW89] John S. Maybee, D. D. Olesky, P. van den Driessche, and G. Wiener. Matrices, digraphs, and determinants. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 10(4):500–519, 1989.
- [Wor87] S. L. Woronowicz. Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 23(1):117–181, 1987.