# Lista Nr 01, ćwiczenia

(wyk. 8,15.X.09r)

Własności liczb naturalnych. Zbiorem liczb naturalnych nazywamy zbiór:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

a zbiór liczb całkowitych oznaczamy:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

**Definicja 1. (podzielność)** *Dla $m, n \in \mathbb{N},\ 0 < m$ mówimy, że liczba $m$ dzieli $n$, gdy*

$$m|n \iff \exists_{q\in\mathbb{N}}\, n = m \cdot q$$

**Definicja 2. (największy wspólny dzielnik)**

$$\mathrm{NWD}(m, n) = \max\{k \in \mathbb{N} : k|m \wedge k|n\}, \quad \textit{gdzie} \quad m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

**Zad. 1** Uzasadnić[1]:

**(a)** Dla każdego $A \subseteq \mathbb{N},\ A \neq \emptyset$ istnieje $n \in A$, że dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi $n \leqslant m$.

**(b)** Dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ istnieje $m \in \mathbb{N}$, że $n = m + 1$.

**Zad. 2** Uzasadnić poprawność podanej definicji NWD.

**Zad. 3** Czy prawdziwe jest zdanie:

> *Istnieje nieskończony ciąg liczb naturalnych $a_i \in \mathbb{N}$ o własności $a_i > a_{i+1}$, gdzie $i = 0, 1, 2, \ldots$ .*

Odpowiedź uzasadnić !

**Zad. 4** Wykazać, że dla $m, n \in \mathbb{N},\ 0 < n$ istnieją liczby $q, r \in \mathbb{N},\ r < n$ o własności

$$m = n \cdot q + r.$$

Co można zapisać, że $r \equiv m \bmod n$ lub równoważnie $n|(m - r)$.

**Zad. 5** Niech $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wykazać, że wtedy

**(a)** $m|n \iff \mathrm{NWD}(m, n) = m$.

**(b)** Jeśli $m = n \cdot q + r$, gdzie $q, r \in \mathbb{N}$ i $0 < r < n$, to $\mathrm{NWD}(m, n) = \mathrm{NWD}(n, r)$.

**Zad. 6** Algorytm Euklidesa Niech $m_0, n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definiujemy dla $i = 0, 1, 2, \ldots$ rekurencyjnie ciągi $m_i$, $n_i$ (ciąg $q_i \in \mathbb{N}$ jest pomocniczy):

$$\begin{array}{lcl} m_{i+1} & = & n_i \\ m_i & = & n_i \cdot q_i + n_{i+1}, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant n_{i+1} < n_i. \end{array}$$

Wykazać, że istnieje $i$ dla którego $n_{i+1} = 0$ oraz że wtedy dla tego $i$ zachodzi:

$$\mathrm{NWD}(m_0, n_0) = \mathrm{NWD}(m_1, n_1) = \ldots = \mathrm{NWD}(m_i, n_i) = n_i = m_{i+1}.$$

[1] Wystarczy powołać się na odpowiednie aksjomaty.

**Zad. 7** Jeśli $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, to wtedy $\mathrm{NWD}(m, n) = \min\{0 < x \cdot m + y \cdot n : x, y \in \mathbb{Z}\}$.

**Zad. 8** Niech $p, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wtedy jeśli $p$ jest liczbą pierwszą, to z $p|(m \cdot n)$ wynika, że $p|m$ lub $p|n$.

**Zad. 9** Jeśli $p, m, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ oraz $\mathrm{NWD}(m, p) = \mathrm{NWD}(n, p) = 1$, to wtedy $\mathrm{NWD}(m{\cdot}n, p) = 1$.

**Zad. 10** Jeśli $p, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{NWD}(m, n) = 1$, $m|p$ i $n|p$, to wtedy $(m \cdot n)|p$.

Wrocław, dnia 08/10/2009