III Wykład: **29 X 10r**

Podstawowe fakty z ALGEBRY LINIOWEJ[1] [1]

Macierzą $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ o n wierszach i m kolumnach nazywamy układ nm liczb:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

oraz przyjmujemy, iż $a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{A})_{ij}$. Wektory $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ zapisujemy w postaci

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Przy tak przyjętych oznaczeniach układ równań

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{1m}\cdot x_m & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{2m}\cdot x_m & = & b_2 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & \dots & + & a_{nm}\cdot x_m & = & b_n \end{array} \right. \qquad \text{(III–1.1)}}$$

możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Definicja Dwa układy równań

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{d}$$

są *równoważne*, gdy mają dokładnie te same rozwiązania.

Twierdzenie Niech $\mathfrak{E}_i$ oznacza i–te równanie układu (III–1.3). Wtedy, jeżeli jeden układ równań można otrzymać z drugiego przez skończony ciąg operacji:

- przestawienie dwóch równań $\mathfrak{E}_i \longleftrightarrow \mathfrak{E}_j$,
- pomnożenie równania przez niezerową liczbę $\lambda\mathfrak{E}_i \longrightarrow \mathfrak{E}_i$,
- dodanie pomnożone przez liczbę inne równania $\mathfrak{E}_i + \lambda\mathfrak{E}_j \longrightarrow \mathfrak{E}_i$,

to oba te układy są równoważne.

Definicja: Macierz *transponowana* $\mathbf{A}^T$ jest określona wzorem:

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = a_{ji}, \quad \text{gdzie} \quad a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}.$$

Definicja: Macierz $\mathbf{A}$ jest *symetryczna*, gdy:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}.$$

Operacje na macierzach

[1] B. Gleichgewicht, *Algebra,* PWN, Warszawa 1983

- *dodawanie* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$:
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} + (\mathbf{B})_{ij},$$
- *mnożenie przez liczbę* $\lambda\mathbf{A}$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$(\lambda\mathbf{A})_{ij} = \lambda(\mathbf{A})_{ij},$$
- *iloczyn* dwóch macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ i $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times m}$:
$$(\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

  UWAGA: Istnieją macierze $\mathbf{A},\ \mathbf{B}$ takie, że $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Oznacza to, że iloczyn macierzy **nie jest** przemienny!

WŁASNOŚCI OPERACJI MACIERZOWYCH:
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ – *łączność* dodawania,
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ – *łączność* mnożenia,
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ – *rozdzielność* mnożenia względem dodawania,
- $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T$,
- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,
- $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

DEFINICJA: Macierz *identycznościowa* (*jednostkowa*) $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

WŁASNOŚĆ macierzy *identycznościowej*

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}, \quad \text{dla} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

DEFINICJA: *Lewostronna* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ i *prawostronna* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ macierz odwrotna jest określona wzorem

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}.$$

TWIERDZENIE Jeżeli $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, to $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

OKREŚLENIE Jeżeli dla $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (macierzy *kwadratowej*) istnieje $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, to macierz $\mathbf{A}$ nazywamy *odwracalną* (*nieosobliwą*) oraz oznaczamy $\mathbf{A}^{-1} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \mathbf{B}$.

DEFINICJA: Przekształcenie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy *liniowym*, gdy spełnia następujący warunek:

$$f(\mu\mathbf{x} + \nu\mathbf{y}) = \mu f(\mathbf{x}) + \nu f(\mathbf{y}), \text{ dla każdych } \mu, \nu \in \mathbb{R} \ \&\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

ZWIĄZEK przekształceń *liniowych* z *macierzami*

Jeżeli $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest przekształceniem *liniowym* oraz $(e_1, \dots, e_n)$ jest *bazą* $\mathbb{R}^n$ a $(e'_1, \dots, e'_m)$ – *bazą* $\mathbb{R}^m$, to *macierz*

$$(\mathbf{A})_{ij} = (f(e_i))_j, \text{ tzn. } f(e_i) = a_{i1}e'_1 + \ldots + a_{im}e'_m,$$

ma własność:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = f(\mathbf{x}) \text{ dla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

I odwrotnie, jeżeli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – jest *macierzą*, to

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\mathbf{x}$$

jest przekształceniem *liniowym* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ wyznaczonym przez $\mathbf{A}$.

DEFINICJA: Jeżeli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}, \text{ gdzie } \lambda \in \mathbb{R}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ i } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

to λ nazywamy *wartością własną* macierzy $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x}$ – *wektorem własnym* tej macierzy.

DEFINICJA: *Wyznacznika* macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\det(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

gdzie S_n – zbiór wszystkich *permutacji* zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$
a $\operatorname{sgn}(\sigma)$ jest *znakiem permutacji* σ.

TWIERDZENIE: (*Cauchy'ego*) Dla $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zachodzi wzór:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$$

TWIERDZENIE Rozwinięcie *Laplace'a wyznacznika* macierzy $\mathbf{A}$ (może też być definicją *indukcyjną wyznacznika*):

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{A}_{ij},$$

gdzie $\mathbf{A}_{ij}$ jest *dopełnieniem algebraicznym* wyrazu a_{ij}.

TWIERDZENIE (*Kroneckera–Capellego*) Układ równań (III–1.3) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A_b})$$

gdzie $r(\mathbf{A})$ jest *rzędem* macierzy $\mathbf{A}$ a macierz $\mathbf{A_b}$ powstała z $\mathbf{A}$ przez dodanie kolumny wyrazów wolnych $\mathbf{b}$.

ROZWIĄZANIE układu (III–1.3) dla $n = m$ i $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ dane jest wzorem (*wzory Cramera*):

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{A}'_j)}{\det(\mathbf{A})}, \ j = 1, 2, \ldots, n$$

gdzie macierz $\mathbf{A}'_j$ jest utworzona z $\mathbf{A}$ przez zastąpienie j–tej kolumny kolumną wyrazów wolnych $\mathbf{b}$.

DEFINICJA: Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy *elementarną*, gdy powstała z macierzy *identycznościowej* w wyniku następujących operacji:

- zamiany dwóch wierszy (lub kolumn): $\mathbf{A}_s \longleftrightarrow \mathbf{A}_t$;
- pomnożenia wiersza (lub kolumny) przez różną od zera stałą: $\lambda\mathbf{A}_s \longleftrightarrow \mathbf{A}_s$;
- dodania do wiersza pomnożonego przez stałą innego wiersza: $\mathbf{A}_s + \lambda\mathbf{A}_t \longleftrightarrow \mathbf{A}_s$;

TWIERDZENIE Dla $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ następujące warunki są równoważne:

- macierz odwrotna $\mathbf{A}^{-1}$ istnieje, tzn. macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa;
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$;
- wiersze macierzy $\mathbf{A}$ tworzą bazę $\mathbb{R}^n$;
- kolumny macierzy $\mathbf{A}$ tworzą bazę $\mathbb{R}^n$;
- jeżeli $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, to $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
- odwzorowanie $f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Ax}$ jest przekształceniem *„różnowartościowym”* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$;
- odwzorowanie $f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Ax}$ jest przekształceniem *„na”* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$;
- $\forall_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n} \exists!_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;
- $\mathbf{A}$ jest iloczynem *macierzy elementarnych*;
- 0 **nie jest** *wartością własną* macierzy $\mathbf{A}$.

Łatwe do rozwiązania układy równań. Systemy równań *„dolnie trójkątnych”*:

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \qquad \text{(III–1.2)}}$$

Rozwiązanie (III–1.4) jest określone rekurenyjnie wzorami (oczywiście zakładamy, iż $\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn} \neq 0$):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}}, \\ x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}, \\ &\vdots \\ x_i &= \frac{b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{b_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j}{a_{nn}}. \end{aligned}$$

Co daje następujący algorytm[2] rozwiązywania (III–1.4) *„trójkątnych dolnie”* układów równań liniowych:

[2] W języku `C` tablice są indeksowane począwszy od 0!

```
for(i=0;i<n;i++)
  {
     for(j=0;j<i;j++)
       b[i] = b[i]-A[i][j]*b[j];
     b[i] = b[i]/A[i][i];
  }
```

Liczba mnożeń jaka jest wymagana przez algorytm. W instrukcji

```
b[i] = b[i]-A[i][j]*b[j];
```

jest jedno mnożenie. Biorąc pod uwagę cały algorytm otrzymujemy, że całkowita liczba mnożeń wynosi:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \cong \frac{n^2}{2}$$

Podobna też jest liczba dodawań. Ostatecznie ilość wykonywanych operacji arytmetycznych przy rozwiązywaniu układu (III–1.4) jest rzędu n^2.

Dla $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ w przyjętym zapisie kolumnowym wektorów

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

mamy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbf{y}^T \in \mathbb{R}^{1\times n}$ i $\mathbf{x}\mathbf{y}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 & \dots & x_2y_n \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 & \dots & x_3y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & x_ny_3 & \dots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

oraz $\mathbf{x}^T\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

Aby uprościć zapis wzorów macierzowych wprowadzono zapis *blokowy* macierzy, który wyjaśniamy na przykładzie:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, \text{ itp.}$$

Przy powyższych oznaczeniach *dodawanie* macierzy można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{12}+\mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{A}_{21}+\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{22}+\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

i w podobny sposób *iloczyn* macierzy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.$$

Niezależnie od wprowadzanych oznaczeń, podziału macierzy $\mathbf{A}$ na podmacierze $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}$– operacje macierzowe wykonanywane są zgodne z poprzednio wprowadzonymi.

Na poprzednim wykładzie zajmowaliśmy się rozwiązywaniem układów *dolnie trójkątnych*. Podobne wzory, można wyprowadzić dla układów *górnie trójkątnych*. Obecnie zajmiemy się przypadkiem ogólnym:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{III–1.3}$$

Definicja Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest dodatnio określona, gdy
- $\mathbf{A}$ – jest symetryczna, tzn. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$,
- $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definicja Dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

macierz $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{k\times k}, \ k = 1, \dots, n$ postaci

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

nazywamy **k**–tym **minorem podstawowym** macierzy $\mathbf{A}$.

Załóżmy, że dla macierzy $\mathbf{A}$ istnieją macierze *trójkątne* $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{III–1.4}$$

takie, że

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}. \tag{III–1.5}$$

Mając rozkład (III–1.5) rozwiązanie układu (III–1.3) sprowadza się do rozwiązania dwóch układów trójkątnych:

$$\begin{aligned} \mathbf{Lz} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{Ux} &= \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Przy założeniu, iż wszystkie operacje są dobrze określone z (III–1.5), wykorzystując postać (III–1.4) (znaczna liczba elementów zerowych!) wyprowadzimy wzory określające $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$.

Metoda rozkładu macierzy $\mathbf{A}$ na czynniki trójkątne ($\mathbf{LU}$–rozkład): Z (III–1.5) mamy

$$\boxed{a_{ij} = \sum_{s=1}^{n} l_{is}u_{sj} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is}u_{sj} \quad \text{(III–1.6)}}$$

Otrzymujemy stąd równości

$$\begin{aligned} a_{kk} &= \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk} + l_{kk}u_{kk} & \text{(III–1.7)} \\ a_{kj} &= \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj} + l_{kk}u_{kj}, \quad k+1 \le j \le n & \text{(III–1.8)} \\ a_{ik} &= \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk} + l_{ik}u_{kk}, \quad k+1 \le i \le n & \text{(III–1.9)} \end{aligned}$$

Równości (III–1.7), (III–1.8) i (III–1.9) są podstawą sukcesywnego wyliczenia elementów macierzy $\mathbf{L}$ i $\mathbf{U}$. Idea algorytmu polega na wyliczeniu w *Kroku* α kolejnego względem $k = 1, \ldots, n$ elementu leżącego na przekątnej, który w *Kroku* β służy do wyliczenia pozostałych elementów odpowiedniego wiersza lub kolumny:

Krok α : $k = 1$

$$a_{11} = l_{11}u_{11}$$

Krok β : $k = 1$

$$\begin{aligned} a_{1j} &= l_{11}u_{1j},\ j = 2,\ldots,n \\ a_{i1} &= l_{i1}u_{11},\ i = 2,\ldots,n \end{aligned}$$

Krok α : $k = 2$

$$a_{22} = \underbrace{l_{21}u_{12}}_{\text{znane}} + l_{22}u_{22}$$

Krok β : $k = 2$

$$\begin{aligned} a_{2j} &= \underbrace{l_{21}u_{1j}}_{\text{znane}} + l_{22}u_{2j},\ j = 3,\ldots,n \\ a_{i2} &= \underbrace{l_{i1}u_{12}}_{\text{znane}} + l_{i2}u_{22},\ i = 3,\ldots,n \end{aligned}$$

Krok α : $k = 3$

$$a_{33} = \underbrace{\sum_{s=1}^{2} l_{3s}u_{s3}}_{\text{znane}} + l_{33}u_{33}$$

Krok β : $k = 3$

$$\begin{aligned} a_{3j} &= \underbrace{\sum_{s=1}^{2} l_{3s}u_{sj}}_{\text{znane}} + l_{33}u_{3j},\ j = 4,\ldots,n \\ a_{i3} &= \underbrace{\sum_{s=1}^{2} l_{is}u_{s3}}_{\text{znane}} + l_{i3}u_{33},\ i = 4,\ldots,n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Określenie l_{ii} i u_{ii} w *Kroku* α nie jest jednoznaczne, dlatego też przyjęto następujące założenia dodatkowe:

- $l_{ii} = 1,\ i = 1,\ldots,n$– algorytm Doolittl'a;
- $u_{ii} = 1,\ i = 1,\ldots,n$– algorytm Crout'sa;
- $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T \Longrightarrow l_{ii}^2 = a_{ii},\ i = 1,\ldots,n$– algorytm Cholesky'ego.

W ten sposób otrzymujemy wzory:

$$\boxed{\begin{aligned} l_{kk}u_{kk} &= \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk} \\ u_{kj} &= \frac{a_{kj} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sj}}{l_{kk}}, \quad j = k+1,\ldots,n \\ l_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{is}u_{sk}}{u_{kk}}, \quad i = k+1,\ldots,n \end{aligned}}$$

Twierdzenie Jeżeli wszystkie *podstawowe minory* macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ są nieosobliwe, to wtedy dla $\mathbf{A}$ istnieje $\mathbf{LU}$– rozkład.
Dowód: Dowód zostanie przeprowadzony indukcyjnie względem wymiaru macierzy n.
Dla $n = 1$ mamy $a_{11} \neq 0$– jedyny *minor* macierzy $\mathbf{A} = [a_{11}] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ i kładąc $l_{11} = 1,\ u_{11} = a_{11}$ otrzymujemy:

$$\mathbf{LU} = [1]\,[a_{11}] = [a_{11}] = \mathbf{A}.$$

Załóżmy teraz, że dla $n = k-1$ i $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$ istnieją
macierze *trójkątne* $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ spełniające:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}.$$

Niech teraz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Z założenia *minor podstawowy* $\mathbf{A}_{k-1} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$ jest macierzą nieosobliwą. Z założenia indukcyjnego, istnieją macierze *trójkątne* $\mathbf{L}_{k-1}, \mathbf{U}_{k-1} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$ o własności:

$$\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{U}_{k-1}, \quad \det(\mathbf{A}_{k-1}) \neq 0,\ \det(\mathbf{U}_{k-1}) \neq 0.$$

Z równości (III–1.6) mamy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A_{k-1}} & & a_{1k} \\ & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L_{k-1}} & & 0 \\ & & \vdots \\ l_{k1} & \dots & l_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U_{k-1}} & & u_{1k} \\ & & \vdots \\ 0 & \dots & u_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A_{k-1}} & & a_{1k} \\ & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L_{k-1}U_{k-1}} & & \sum_{s=1}^{k-1} l_{1s}u_{sk} \\ & & \vdots \\ \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{s1} & \dots & \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk} + l_{kk}u_{kk} \end{bmatrix} \tag{III–1.10}$$

Skąd otrzymujemy układy równań:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} l_{11}u_{1k} & + & l_{12}u_{2k} & + & \dots & + & l_{1k-1}u_{k-1k} & = & a_{1k} \\ l_{21}u_{1k} & + & l_{22}u_{2k} & + & \dots & + & l_{2k-1}u_{k-1k} & = & a_{2k} \\ l_{31}u_{1k} & + & l_{32}u_{2k} & + & \dots & + & l_{3k-1}u_{k-1k} & = & a_{3k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ l_{k-11}u_{1k} & + & l_{k-12}u_{2k} & + & \dots & + & l_{k-1k-1}u_{k-1k} & = & a_{k-1k} \end{array} \right. \tag{III–1.11}$$

oraz

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} l_{k1}u_{11} & + & l_{k2}u_{21} & + & \dots & + & l_{kk-1}u_{k-11} & = & a_{k1} \\ l_{k1}u_{12} & + & l_{k2}u_{22} & + & \dots & + & l_{kk-1}u_{k-12} & = & a_{k2} \\ l_{k1}u_{13} & + & l_{k2}u_{23} & + & \dots & + & l_{kk-1}u_{k-13} & = & a_{k3} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ l_{k1}u_{1k-1} & + & l_{k2}u_{2k-1} & + & \dots & + & l_{kk-1}u_{k-1k-1} & = & a_{kk-1} \end{array} \right. \tag{III–1.12}$$

W układzie (III–1.11) $\det \mathbf{L}_{k-1} \neq 0$ i $u_{1k}, u_{2k}, u_{3k}, \dots, u_{k-1k}$ są niewiadomymi a w (III–1.12) $\det \mathbf{U}_{k-1} \neq 0$ i $l_{k1}, l_{k2}, l_{k3}, \dots, l_{kk-1}$ – niewiadome. Oba te układy określają jednoznacznie rozwiązanie (są *Cramer'owskie*). Pozostaje więc wyznaczyć l_{kk}, u_{kk} (III–1.10) z równania:

$$\sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}u_{sk} + l_{kk}u_{kk} = a_{kk}$$

gdzie można przyjąć, że $l_{kk} = 1$.

□

TWIERDZENIE (*rozkład Cholesky'ego*) Jeżeli macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest *dodatnio określona*, to wtedy istnieje jednoznacznie określona macierz $\mathbf{L}$– *dolnie trójkątna* z $l_{ii} > 0, \; i = 1, \ldots, n$ o własności:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T.$$

DOWÓD Z $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ dla $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T \neq 0$ (macierz $\mathbf{A}$ jest *dodatnio określona*) wynika, że każdy *podstawowy minor* $\mathbf{A}_k, \; k = 1, 2, \ldots, n$ jest macierzą nieosobliwą. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że istnieją macierze *trójkątne* $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ o własności:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}.$$

Z symetri macierzy $\mathbf{A}$ wynika, iż:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{L}\mathbf{U})^T = \mathbf{U}^T\mathbf{L}^T.$$

Skąd otrzymujemy:

$$\mathbf{U}(\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T.$$

W ostatniej równości macierz $\mathbf{U}(\mathbf{L}^T)^{-1}$ jest *górnie trójkątna* a $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}^T$ – *dolnie trójkątna*. Istnieje więc macierz *diagonalna* $\mathbf{D} = \mathbf{U}(\mathbf{L}^T)^{-1}$. Stąd otrzymujemy $\mathbf{U} = \mathbf{D}\mathbf{L}^T$ i $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$. Oznacza to, iż $\mathbf{D}$ jest dodatnio określona. Oznaczmy $\mathbf{D}^{1/2}$ macierz *diagonalną* o własności $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{1/2}\mathbf{D}^{1/2}$, aby otrzymać:

$$\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{L}}\widetilde{\mathbf{L}}^T, \quad \text{gdzie} \quad \widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\mathbf{D}^{1/2}.$$

□

TWIERDZENIE [3]*rozkład Choleskiego*[4] Jeżeli A jest dodatnio określoną macierzą, to istnieje L macierz *dolnie trójkątna* o własności:

$$A = LL^T.$$

DOWÓD

Niech

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right], \quad L = \left[\begin{array}{c|ccc} l_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \hline l_{21} & l_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{array}\right].$$

Podzielimy macierze na bloki (patrz: wykład 6)

$$\alpha = a_{11}, \quad a = \begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad A_* = \begin{bmatrix} a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

oraz odpowiednio

$$\rho = l_{11}, \quad r = \begin{bmatrix} l_{21} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{bmatrix}, \quad L_* = \begin{bmatrix} l_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} & \ldots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

---

[3] Dowód z książki *G. W. Stewarta*

[4] Inaczej liczył *Tadeusz Banachiewicz* (1882–1954), prof. UJ, który wprowadził rachunek krakowianowy

Zgodnie z tymi oznaczeniami mamy, iż

$$A \overset{\text{ozn}}{=} \begin{bmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{bmatrix}, \quad L \overset{\text{ozn}}{=} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ r & L_* \end{bmatrix} \text{ oraz } L^T = \begin{bmatrix} \rho & r^T \\ 0 & L_*^T \end{bmatrix}.$$

Z dodatniej określoności macierzy A wynika, iż $\alpha > 0$ i że macierz A_* (wymiar tej macierzy jest 1 mniejszy od wymiaru macierzy A, czyli znowu dowodzimy indukcyjnie !) jest też dodatnio określona. Przy takich oznaczeniach, rozkład

$$A = LL^T$$

zapisze się w postaci

$$\begin{bmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ r & L_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & r^T \\ 0 & L_*^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^2 & \rho r^T \\ r\rho & rr^T + L_* L_*^T \end{bmatrix}.$$

Z równości macierzy wynikają równości odpowiednich bloków

$$\begin{aligned} \alpha &= \rho^2, \\ a^T &= \rho r^T, \\ A_* &= L_* L_*^T + rr^T, \end{aligned}$$

i dalej przekształcając, otrzymujemy

$$\rho = \sqrt{\alpha}, \tag{III–1.13}$$

$$r^T = \rho^{-1} a^T, \tag{III–1.14}$$

$$L_* L_*^T = A_* - rr^T. \tag{III–1.15}$$

Pierwsze dwa równania (III–1.13), (III–1.14) są podstawą do wyliczenia pierwszej kolumny macierzy L. Ponieważ $\alpha > 0$, to $\rho \neq 0$ i element $l_{11} = \rho$ jest dobrze określony. Z $\rho \neq 0$ i (III–1.14) wynika, iż macierz $r^T = [l_{21}, \ldots, l_{n1}]$ jest jednoznacznie określona. Pozostaje udowodnić, iż macierz z prawej strony równości (III–1.15) jest dodatnio określona.

Niech

$$\hat{A}_* \overset{\text{ozn}}{=} A_* - rr^T = A_* - \frac{1}{\alpha} aa^T.$$

Symetryczność macierzy $\hat{A}_*^T$ wynika z równości (oczywiście $A_* = A_*^T$)

$$\hat{A}_*^T = (A_* - rr^T)^T = A_*^T - (r^T)^T r^T = A_* - rr^T = \hat{A}_*.$$

Niech $y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, wtedy $y^T a = a^T y$ i dla $y \neq 0$ udowodnimy

$$y^T \hat{A}_* y = y^T A_* y - \frac{1}{\alpha}(y^T a)(a^T y) = y^T A_* y - \frac{1}{\alpha}(a^T y)^2 > 0. \tag{III–1.16}$$

Macierz A jest dodatnio określona, więc z formy jej zapisu dla dowolnego $\eta \in \mathbb{R}$ wynika

$$0 < \begin{bmatrix} \eta & y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \alpha\eta^2 + 2a^T y\eta + y^T A_* y. \tag{III–1.17}$$

Do nierówności (III–1.17) podstawiamy $\eta = -\frac{1}{\alpha} a^T y$

$$0 < \alpha\eta^2 + 2\eta a^T y + y^T A_* y = y^T A_* y - \frac{1}{\alpha}(a^T y)^2$$

a to jest dokładnie warunek (III–1.16). W ten sposób udowodniliśmy „krok indukcyjny” względem wymiaru macierzy.

□

W przypadku algorytmu Cholesky'ego wzory na **LU**–rozkład macierzy A (patrz wykład 6) redukują się do postaci:

$$\boxed{\begin{aligned} l_{kk} &= \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}^2} \\ l_{ik} &= \frac{a_{ik} - \sum\limits_{s=1}^{k-1} l_{is} l_{ks}}{l_{kk}}, \ i = k+1, \ldots, n \end{aligned}}$$

Metoda eleminacji Gaussa

Tak jak w przypadku **LU**–rozkładu w pierwszej kolejności, przy założeniu dopuszczalności wszystkich operacji, będziemy upraszczać układ równań

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Postępując „naiwnie” otrzymujemy odpowiednio dzieląc i mnożąc, równoważny układ równań

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + \left(a_{n2} - \frac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}}\right) x_2 + \ldots + \left(a_{nn} - \frac{a_{n1}a_{1n}}{a_{11}}\right) x_n = b_n - \frac{a_{n1}b_1}{a_{11}} \end{cases}$$

Zapowiada się, iż jeżeli będziemy odpowiednio wytrwali (wszystko przy założeniu braku problemów z dzieleniem) to otrzymamy równoważny układ *górnie trójkątny*. W przypadku ogólnym, aby z macierzy $A^{(k)}$:

$$A^{(k)} = \left[\begin{array}{ccc|ccccc}
a_1^{(k)} & \dots & a_{1,k-1}^{(k)} & a_{1k}^{(k)} & \dots & a_{1j}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{k-1,k-1}^{(k)} & a_{k-1,k}^{(k)} & \dots & a_{k-1,j}^{(k)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k)} \\
\hline
0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kj}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\
\hline
0 & \dots & 0 & a_{k+1,k}^{(k)} & \dots & a_{k+1,j}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{ik}^{(k)} & \dots & a_{ij}^{(k)} & \dots & a_{in}^{(k)} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nj}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)}
\end{array}\right] \tag{III–1.18}$$

otrzymać macierz $A^{(k+1)}$ należy zastosować wzory:

$$\boxed{a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)}, & \text{dla } i \le k, \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)}, & \text{dla } i \ge k+1,\ j \ge k+1, \\ 0, & \text{dla } i \ge k+1,\ j \le k, \end{cases} \quad \text{(III–1.19)}}$$

oraz dla kolumny wyrazów wolnych

$$b_i^{(k+1)} = \begin{cases} b_i^{(k)}, & \text{dla } i \le k, \\ b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}, & \text{dla } i \ge k+1 \end{cases}. \tag{III–1.20}$$

Przedyskutujemy teraz dopuszczalność przedstawionej procedury, która jest warunkowana przez $a_{kk}^{(k)} \neq 0$. Z postaci macierzy (III–1.18) wynika, iż

$$\det(A^{(k)}) = a_{11}^{(k)} \cdot \ldots \cdot a_{k-1,k-1}^{(k)} \cdot \begin{vmatrix} a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Z własności wyznaczników oraz postaci wzorów (III–1.19) wynika, że

$$\det(A) = \det(A^{(1)}) = \det(A^{(2)}) = \cdots = \det(A^{(n)}).$$

W ten sposób otrzymaliśmy, że jeżeli $\det(A) \neq 0$ to dla każdego *kroku* k istnieje $i \in \{k, \ldots, n\}$ takie, że $a_{ik}^{(k)} \neq 0$. Więc w przypadku $a_{kk}^{(k)} = 0$ przy założeniu $\det(A) \neq 0$, należy zamienić wiersz k–ty z wierszem i–tym. Zamiana taka prowadzi oczywiście do równoważnego układu równań.

Udowodniliśmy w ten sposób:

Twierdzenie *Gauss* Jeżeli $\det(A) \neq 0$, to wzory (III–1.19) i (III–1.20) z uwzględnieniem zamiany wierszy w przypadku, gdy w *k-tym kroku* $a_{kk}^{(k)} = 0$ sprowadza układ

$$Ax = b$$

do równoważnego

$$Ux = b^{(n)}$$

gdzie macierz U jest *górnie trójkątna*.

Przykład:[5] W przykładzie bedziemy tylko stosować wzory (III–1.19) i (III–1.20), bez zamiany wierszy w przypadku, gdy „w *k-tym kroku* $a_{kk}^{(k)} = 0$".

Więc przy takich założeniach nie poradzimy sobie z układem

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Poprawimy ten układ. Więc dla $0 < \varepsilon$ do układu:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

możemy już procedurę zastosować. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązując otrzymany układ równań („*górnie trójkątny*") otrzymujemy, gdzie znakiem $\approx$ zaznaczyliśmy wpływ *przybliżeń komputerowych* na obliczenia:

$$\begin{cases} x_2 & = & \frac{2-\varepsilon^{-1}}{1-\varepsilon^{-1}} \approx 1 \\ x_1 & = & \frac{1-x_2}{\varepsilon^{-1}} \approx 0 \end{cases}$$

Sprowadzenie układu do postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^{-1} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} \\ 2 \end{bmatrix}$$

nie poprawia sytuacji

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon^{-1} \\ 0 & 1 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} \\ 2 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

otrzymujemy tak jak poprzednio

$$\begin{cases} x_2 & = & \frac{2-\varepsilon^{-1}}{1-\varepsilon^{-1}} \approx 1 \\ x_1 & = & \varepsilon^{-1} - \varepsilon^{-1} x_2 \approx 0 \end{cases}$$

Dopiero zamina wierszy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[5] za *D. Kincaid* i *W. Cheney*

prowadzi do układu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-2\varepsilon \end{bmatrix}$$

który, nie jest już tak *„czuły”* na *przybliżenia komputerowe.*

$$\begin{cases} x_2 &= \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx 1 \\ x_1 &= 2 - x_2 \approx 1 \end{cases}$$

Literatura

[1] B. Gleichgewicht, Algebra, PWN, Warszawa, 1983.

Wrocław, dnia 15 listopada 2010

(–) Krzysztof Tabisz
tabisz@math.uni.wroc.pl