Wykład Nr 04, 05

(wyk. 29 X, 5 XI 10 r.)

Procedura konstruowania rozwiązania bazowego:
1. *Wybierz m liniowo niezależne kolumny $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$.*
2. *Niech $x_i = 0$, dla $i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$.*
3. *Rozwiąż układ m równań $Ax = b$ z niewiadomymi $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$.*

Uwaga:
Wszystkie nieujemne rozwiązania otrzymane w powyższy sposób wyznaczają każde dopuszczalne rozwiązanie bazowe zagadnienia.

Jeśli x jest bazowym rozwiązaniem, to $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ nazywamy *zmiennymi bazowymi*, pozostałe są *niebazowe*. Kolumny $A_{i_1} \ldots, A_{i_m}$ nazywamy *kolumnami bazowymi*. Macierz

$$B = [A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}]$$

nazywamy *macierzą bazową*. Zmienne bazowe $x_B = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]^T$ są dane wzorem:

$$x_B = B^{-1}b.$$

Przykład:
Niech ograniczenie $Ax = b$ będzie postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Kolumny A_4, A_5, A_6, A_7 wyznaczają dopuszalne rozwiązanie bazowe $x = [0, 0, 0, 8, 12, 4, 6]^T$ a kolumny A_3, A_5, A_6, A_7 wyznaczają rozwiązanie $x = [0, 0, 4, 0, -12, 4, 6]^T$, które nie jest dopuszczalnym rozwiazaniem bazowym.

Twierdzenie 1.
Niech $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, $P \neq \emptyset$, gdzie macierz A o wymiarach $m \times n$ ma wiersze $a_1, \ldots, a_m$. Załóżmy, że $\mathrm{rank}(A) = k < m$ oraz wiersze $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ są liniowo niezależne. Rozważmy wielościan:

$$Q = \{x : a_{i_1}x = b_{i_1}, \ldots, a_{i_k}x = b_{i_k}\}.$$

Wtedy $Q = P$.

Definicja 1. *Wielościan $P \subset \mathbb{R}^n$ zawiera prostą, jeśli istnieje wektor $x \in P$ i wektor $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ taki, że $x + \lambda d \in P$ dla każdego λ.*

Twierdzenie 2. *Niech będzie dany wielościan $P = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m\}$, $P \neq \emptyset$. Wtedy, następujące waunki są równoważne:*
1. *W wielościanie P istnieje punkt ekstremalny.*
2. *Wielościan P nie zawiera prostej.*
3. *Istnieje n wektorów $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ liniowo niezależnych.*

Wniosek 1.
Każdy niepusty ograniczony wielościan i każdy niepusty ograniczny standardowy wielościan posiada przynajmniej jedno dopuszczalne rozwiązanie.

Twierdzenie 3.
Rozważmy zadanie liniowego programowania (PL), wyznaczenie minimum $c^T x$ po wielościanie P. Załóżmy, że P ma co najmniej jeden punkt ekstremalny i że istnieje optymalne rozwiązanie. Wtedy, istnieje optymalne rozwiązanie które jest ekstremalnym punktem P.

Twierdzenie 4.
Rozważmy zagadnienie PL znajdywania minimum wyrażenia $c^T x$ po wieloscianie P. Załóżmy, że P posiada co najmniej jeden punkt ekstremalny. Wtedy, albo minimalny koszt wynosi $-\infty$, albo istnieje punkt ekstremalny, który jest optymalny.

Wniosek 2.
Dla zagadnienia PL minimalizacji $c^T x$ po wielościanie albo optymalny koszt wynosi $-\infty$ albo istnieje rozwiązanie optymalne.

Twierdzenie 5.
Niepusty ograniczony wielościan jest wypukłą otoczką swoich punktów ekstremalnych.

Przykład 1.
Rozważmy wielościan:

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

Wielościan ten posiada cztery punkty ekstremalne: $x^1 = (1, 0, 0)$, $x^2 = (0, 1, 0)$, $x^3 = (0, 0, 1)$ i $x^4 = (0, 0, 0)$. Wektor $x = (1/3, 1/3, 1/4)$ należy do P i może być przedstawiony w postaci:

$$x = \frac{1}{3}x^1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{12}x^4.$$

Algorytm:

Zad. 1 Przepiszmy ograniczenie $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ do postaci

$$a_{in}x_n \geq -\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, m;$$

jeśli $a_{in} \neq 0$, to dzielimy obie strony przez a_{in}. Kładąc $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ otrzymujemy równoważne przedstawienie P postaci:

$$\begin{array}{rcll} x_n & \geq & d_i + f_i^T \bar{x}, & \text{o ile} \quad a_{in} > 0, \\ d_j + f_j^T \bar{x} & \geq & x_n, & \text{przy} \quad a_{jn} < 0, \\ 0 & \geq & d_k + f_k^T \bar{x}, & \text{gdy} \quad a_{kn} = 0. \end{array}$$

d_i, d_j, d_k są tu skalarami, każdy f_i, f_j, f_k jest wektorem w $\mathbb{R}^{n-1}$.

Zad. 2 Niech Q będzie wielościanem w $\mathbb{R}^{n-1}$ zdefiniowanym przez ograniczenia

$$\begin{array}{rcll} d_j + f_j^T \bar{x} & \geq & d_i + f_i^T \bar{x}, & \text{gdy} \quad a_{in} > 0 \wedge a_{jn} < 0, \\ 0 & \geq & d_k + f_k^T \bar{x}, & a_{kn} = 0. \end{array}$$

Twierdzenie 6. *Fourier–Motzkin elimination*
Wielościan Q skonstruowany algorytmem eleminacji jest równy rzutowi $\prod_{n-1}(P)$.

Wniosek 3.
Jeśli $\subset \mathbb{R}^{n+k}$ jest wielościanem, to wtedy zbiór

$$\{x\mathbb{R}^n : \exists_{y \in \mathbb{R}^k} \quad \text{taki, że} \quad (x, y) \in P\}$$

jest też wielościanem.

Literatura

[1] Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J.N, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, 1997.

Wrocław, dnia 18/11/2010