9. Funkcje analityczne

1. Znaleźć liczbę pierwiastków wielomianów podanych obszarach:

(a) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ w kole $|z| < 1$

(b) $z^7 - z^5 + 6z^3 + 2z - 1$ w pierścieniu $1 < |z| < 2$.

2. Dla liczby zespolonej $|c| > e$ znaleźć liczbę rozwiązań równania $e^z = cz^n$ w kole $|z| < 1$. Pokazać, że wszystkie rozwiązania są jednokrotne.

3. Pokazać, że z twierdzenia Rouche wynika zasadnicze twierdzenie algebry.

4. Ciąg funkcji holomorficznych $f_n(z)$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji holomorficznej $f(z)$ dla $|z| = r$ oraz $f(z) \neq 0$ dla $|z| = r$. Pokazać, że dla odpowiednio dużych n liczba zer funkcji f_n i f w kole $|z| < r$ jest taka sama.

5. Udowodnić, że dla $r > 0$ i odpowiednio dużych n funkcja $f_n(z) = 1 + z + \ldots + \frac{z^n}{n!}$ nie zeruje się w kole $|z| < r$.
Wskazówka $f_n(z) \to e^z$.

6. Pokazać, że dla ustalonej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje odpowiednio duża liczba n taka, że funkcja

$$f_n(z) = z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$$

zeruje się w kole $|z - 2\pi i| < \varepsilon$.