6. Zadania do wykładu
Szeregi i całki Fouriera

1. Obliczyć transformaty Fouriera podanych funkcji.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geqslant a \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{poza tym} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1 \\ 2, & 1 < |x| < 2 \\ 0, & |x| \geqslant 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$ (f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

(g) $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ (h) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

(i) $f(x) = |x|e^{-|x|}$ (j) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$

2. Dla $f \in L^1(\mathbb{R})$ obliczyć transformatę Fouriera funkcji $f_y(x) = f(x+y)$.

3. Dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R})$ i liczby niezerowej a określamy $f_{(a)}(x) = af(ax)$. Pokazać, że $f_a \in L^1(\mathbb{R})$ oraz $\widehat{f_a}(\lambda) = \operatorname{sgn}(a)\widehat{f}(\lambda/a)$. Wywnioskować, że transformata Fouriera funkcji parzystej jest parzysta, a funkcji nieparzystej nieparzysta.

4. Dla funkcji $f \in L^1(\mathbb{R})$ obliczyć transformaty Fouriera funkcji $f(x)e^{iax}$, $f(x)\cos ax$, $f(x)\sin ax$ oraz $e^{ix}f(3x)$.

5. Wyznaczyć transformaty Fouriera funkcji $f(x) = e^{-4x^2-4x-1}$ oraz $f(x) = 4xe^{-x^2}$.

6. Niech

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Znaleźć transformaty Fouriera funkcji

(a) $f(x) = H(x)e^{-ax}$.

(b) $f(x) = H(x)e^{-ax}\cos bx$.

(c) $f(x) = H(x)e^{-ax}\sin bx$.

7. Pokazać, że jeśli funkcje $f(x)$, $x^2f(x)$ są bezwględnie całkowalne, to również funkcja $xf(x)$ jest bezwzględnie całkowalna.

8. Pokazać, że jeśli funkcje $f(x)$, $x^nf(x)$ są bezwględnie całkowalne, to również funkcja $x^\alpha f(x)$ dla $0 \leqslant \alpha \leqslant n$ jest bezwzględnie całkowalna.

9. Załóżmy, że $f(x)$ jest klasy C^2, funkcje $f(x)$, $f'(x)$ i $f''(x)$ bezwzględnie całkowalne oraz $f(x)$ spełnia równanie różniczkowe

$$f''(x) + 2xf'(x) + 2f(x) = 0.$$

Jakie równanie różniczkowe spełnia funkcja $\widehat{f}$?

10. Załóżmy, że $f(x)$ jest klasy C^2 oraz funkcje $f(x), f'(x)$ i $f''(x)$ są bezwzględnie całkowalne. Przy pomocy transformaty Fouriera rozwiązać równanie różniczkowe

$$f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 0.$$

11. Dane jest $\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda^2}$. Obliczyć $[x^2 f''(x) + 2f'''(x)]\widehat{\ }(\lambda)$.

12. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = (x^2+1)^{-1}$ bezpośrednim rachunkiem.

$*$**13.** Niech f będzie funkcją z $L^1(\mathbb{R})$ taką, że w otoczeniu punktu x funkcja f jest różnicą dwu funkcji monotonicznych. Pokazać, że

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] = \frac{1}{2\pi}\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}, d\lambda.$$

14. Znaleźć transformaty Fouriera funkcji

$$f(x) = \frac{\cos bx}{a^2+x^2}, \qquad f(x) = \frac{\sin bx}{a^2+x^2}.$$

15. Obliczyć całki korzystając ze wzoru Plancherela i z obliczonych wcześniej transformat Fouriera.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \left[\frac{\sin u - u\cos u}{u^2}\right]^2 du$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(u^2+a^2)^2}\, du$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u^2}{(u^2+a^2)^2}\, du$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin \pi x}{1-x^2}\, dx$

(e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin \pi x \cos \pi x}{1-x^2}\, dx$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{x\sin \pi x}{1-x^2}\right)^2 dx$

16. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji $f(x) = \operatorname{sgn} x\chi_{[-a,a]}(x)$ dla $a > 0$. Wykorzystać ją do obliczenia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - 1}{x}\sin bx\, dx$.

17. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}$.

18. Wiadomo, że $\widehat{f}(\lambda) = (1-\lambda^2)_+$ i $\widehat{g}(\lambda) = (1-|\lambda|)_+$. Znaleźć funkcje $f(x)$ i $g(x)$.