Liniowy operator ograniczony $T : X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami Banacha, spełnia $\dim(Y/\operatorname{Im} T) = n < +\infty$. Mamy pokazać, że $\operatorname{Im} T$ jest domknięty. Możemy założyć, że T jest różnowartościowy, przechodząc do operatora określonego na $X/\ker T$ wzorem

$$x + \ker T \mapsto Tx.$$

Trzeba wiedzieć, że przestrzeń $X/\ker T$ jest przestrzenią Banacha (zadanie 10 lista 3) i że nowy operator jest nadal ograniczony (łatwe). Ponadto obraz nowego operatora jest równy $\operatorname{Im} T$. No więc przyjmujemy, że T jest "1-1". Z założenia istnieją wektory $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ takie, że

$$\operatorname{Im} T + \operatorname{lin}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} = Y.$$

Wprowadzamy przestrzeń $\widetilde{X} = X \oplus \mathbb{C}^n$ z normą $\|x \oplus v\| = \|x\| + \|v\|_\infty$. Wtedy $\widetilde{X}$ jest przestrzenią Banacha. Określmy operator

$$\widetilde{T} : \widetilde{X} \to Y$$

wzorem

$$\widetilde{T}(x \oplus v) = Tx + \sum_{k=1}^{n} v_k y_k,$$

gdzie $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Wtedy $\widetilde{T}$ jest ograniczony jako suma dwu operatorów ograniczonych. Ponadto $\widetilde{T}$ jest "na". Oczywiście $\widetilde{T}$ jest "1-1". Zatem $\widetilde{T}$ jest odwracalny. Wtedy istnieje stała $c > 0$ taka,że

$$\|\widetilde{T}(x \oplus v)\| \geqslant c\|x \oplus v\|.$$

W szczególności kładąc $v = 0$ mamy

$$\|Tx\| \geqslant c\|x\|,$$

co pociąga domkniętość obrazu $\operatorname{Im} T$.