2. Zadania z analizy funkcjonalnej 3

1. Niech U będzie częściową izometrią w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. To znaczy U jest izometrią na pewną podprzestrzeni $\mathcal{H}_0$ oraz U zeruje się na $\mathcal{H}_0^\perp$. Pokazać, że U^*U jest rzutem na $\mathcal{H}_0$. Pokazać, że jeśli dla pewnego operatora U z $B(\mathcal{H})$ operator U^*U jest rzutem, to U jest częściową izometrią. Pokazać, że jeśli U jest częściową izometrią, to również U^* jest częściową izometrią.

2. Niech T będzie operatorem zwartym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z wartością własną $\lambda \neq 0$. Wiadomo, że dla pewnej liczby n mamy $\ker(\lambda I - T)^n = \ker(\lambda I - T)^{n+1}$. Pokazać, że przestrzeń $E_\lambda = \ker(\lambda I - T)^n$ jest niezmiennicza dla operatora T, tzn. $T(E_\lambda) = E_\lambda$. Pokazać, że przestrzeń $F_\lambda = \mathrm{Im}\,(\lambda I - T)^n$ jest domknięta oraz $T(F_\lambda) \subset F_\lambda$. Udowodnić, że $E_\lambda \cap F_\lambda = \{0\}$ oraz $E_\lambda + F_\lambda = \mathcal{H}$.

3. Niech φ będzie ograniczonym funkcjonałem liniowym na C_1. Pokazać, że istnieje operator $A \in B(\mathcal{H})$ taki, że $\varphi(X) = trAX$. `Wskazówka:` Dla wektorów x i y z $\mathcal{H}$ niech $X_{x,y}v = \langle v, y\rangle x$. Pokazać, że $\|X_{x,y}\| = \|X_{x,y}\|_1 = \|x\|\,\|y\|$. Pokazać, że forma półtoraliniowa $B(x,y) = \varphi(X_{x,y})$ jest ograniczona.

4. Pokazać, że każdy ograniczony funkcjonał liniowy φ na przestrzeni $K(\mathcal{H})$ operatorów zwartych ma postać $\varphi(X) = tr(AX)$ dla pewnego operatora A z C_1. `Wskazówka:` Korzystając ze wskazówki do poprzedniego zadania znaleźć operator $A \in B(\mathcal{H})$ spełniający $\varphi(X_{x,y}) = trAX_{x,y}$. Następnie udowodnić, że A jest śladowy. W tym celu zbadać działanie funkcjonału na operatorach postaci $X = \sum_{n=1}^N X_{e_n,f_n}$, dla dwu układów ortonormalnych $\{e_n\}_{n=1}^N$ i $\{f_n\}_{n=1}^N$. Zauważyć, że $\|X\| = 1$. Dobrać odpowiednio układy ortonormalne zgodnie z rozkładem $A = U|A|$.