5. Zadania do wykładu
analiza 3B

1. (a) Niech $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ będą funkcjami ciągłymi na przedziale $[a,b]$ takimi, że $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ dla $a \leqslant x \leqslant b$. Niech

$$D = \{(x,y) \,:\, a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}.$$

Pokazać, że jeśli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła, to

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

(b) Niech $\psi_1(y), \psi_2(y)$ będą funkcjami ciągłymi na przedziale $[c,d]$ takimi, że $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ dla $c \leqslant y \leqslant d$. Niech

$$D = \{(x,y) \,:\, c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}.$$

Pokazać, że jeśli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła, to

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

`Obszary tej postaci nazywamy  elementarnymi.`

2. Obliczyć $\int_T (x^3y + \cos x)\,dx\,dy$, gdzie T jest trójkątem ograniczonym przez proste $y = 0,\ x = \pi/2,\ y = x$.

3. Znaleźć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyznami $y = 0,\ z = 0,\ x = 0$ i $y - x + z = 1$.

4. Po zamianie całki podwójnej po obszarze D na całki iterowane otrzymano całki

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\,dx, \qquad \int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy\,dx,$$
$$\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y)\,dy\,dx, \quad \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\,dy\,dx.$$

Obliczyć te całki i naszkicować obszar D.

5. Powtórzyć poprzednie zadanie dla następujących całek:

$$\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2+y)\,dx\,dy, \qquad \int_{-1}^1 \int_{-2|y|}^{|y|} e^{x+y}\,dx\,dy,$$
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x\,dy\,dx,$$
$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n + y^m)\,dx\,dy, \quad m,n > 0 \qquad \int_{-1}^0 \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx.$$

6. Za pomocą całki podwójnej obliczyć pole elipsy z półosiami a i b.

7. Zbudowano stodołę na podstawie prostokąta o wymiarach 12 m na 20 m; ściana frontowa (na boku 12 m) ma wysokość 10 m, a tylna 15 m. Stodoła ma płaski dach. Jaka jest pojemność stodoły ?

8. Niech D będzie obszarem zawartym pomiędzy osią y i parabolą $x = -4y^2 + 3$. Obliczyć $\int_D x^3 y\,dx\,dy$.

9. Niech D będzie obszarem określonym przez $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$ i $y \geqslant 0$. Czy D jest obszarem elementarnym ? Obliczyć całkę $\int_D (1+xy)\,dx\,dy$.

10. Obliczyć objętość obszaru położonego wewnątrz powierzchni $z = x^2 + y^2$ pomiędzy $z = 0$ i $z = 10$.

11. Obliczyć $\int_D y\,dx\,dy$, gdzie D składa się z punktów spełniających $0 \leqslant 2x/\pi \leqslant y,\ y \leqslant \sin x$.

12. Niech D będzie obszarem określonym warunkami $-\varphi(x) \leqslant y \leqslant \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, gdzie φ jest ciągłą nieujemną funkcją na $[a,b]$. Załóżmy, że $f(x,y) = -f(x,-y)$ dla $(x,y) \in D$. Uzasadnić, że $\int_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

13. Znaleźć pola figur ograniczonych krzywymi

$$y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x = 4; \quad (x^2+y^2)^2 = 2ax^3;$$
$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2); \quad x^3+y^3 = xy,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

14. Znaleźć objętości figur ograniczonych powierzchniami

$$z = x^2+y^2,\ z = x^2+2y^2,\ y = x,\ y = 2x, x = 1;$$
$$x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x^2+y^2 = R(R-2z);$$
$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3x;$$
$$x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x^2+y^2 = ax;$$
$$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1.$$

15. Pokazać, że przeliczalna suma zbiorów miary zero jest też zbiorem miary zero.

$*$**16.** Zbiór A składa się z liczb przedziału $[0,1]$, których rozwinięcie dziesiętne nie zawiera cyfry 9. Pokazać, że zbiór A ma miarę zero na prostej. Jaką moc ma zbiór A ?

$*$**17.** Pokazać, że przedział $[a,b]$, $a<b$, nie jest zbiorem miary zero na prostej. Pokazać, że prostokąt $[a,b]\times[c,d]$, gdzie $a<b$ i $c<d$ nie jest zbiorem miary zero na płaszczyźnie.

$*$**18.** Niech $T(x,y)$ będzie funkcją klasy C^1 odwzorowującą $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$. Pokazać, że obraz zbioru miary zero jest miary zero. Pokazać, że jeśli T jest odwzorowaniem odwracalnym i T^{-1} jest też klasy C^1, to obraz zbioru mierzalnego w sensie Jordana jest mierzalny w sensie Jordana.