

6. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy równań.

$$\begin{aligned} y = x^3, y = x^{1/3}; & & y = x^2 + 1, y = 2x + 9; \\ y = x^3 + 1, y = (x + 1)^2; & & y^2 = 6x, x^2 = 6y; \\ y^2 = 2x - 5, y = x - 4; & & y = x + 2, y = -3x + 6, y = (2 - x)/3; \\ x = y^2 - y, x = y - y^2; & & x = y^2, x = 6 - y - y^2. \end{aligned}$$

2. Obliczyć długość krzywych opisanych parametrycznie.

$$\begin{aligned} x = 3t, & & y = 2t^{3/2}, & & 0 \leq t \leq 3; \\ x = \frac{1}{4}t^4 + 1, & & y = \frac{1}{6}t^6 - 1, & & 0 \leq t \leq 1; \\ x = \sin t - t \cos t, & & y = t \sin t + \cos t, & & 0 \leq t \leq \pi/2; \\ x = \frac{2}{3}t^{3/2}, & & y = \frac{4}{9}t^{9/4}, & & 0 \leq t \leq 4 \\ x = \cos^3 t, & & y = \sin^3 t, & & 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned}$$

3. Obliczyć długość krzywych podanych równaniem we współrzędnych biegunowych.

$$\begin{aligned} r = 2 \cos \theta; & & r = \theta^2, & & 0 \leq \theta \leq 4\sqrt{2}; \\ r = 2\theta, & & 0 \leq \theta \leq 2\pi; & & r = \sin^2 \frac{\theta}{2}, & & 0 \leq \theta \leq \pi; \\ r = \sin^3 \frac{\theta}{3}, & & 0 \leq \theta \leq 2\pi; & & \theta = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}), & & 1 \leq r \leq 3. \end{aligned}$$

4. Obliczyć pole powierzchni otrzymanej przez obrót wokół osi x podanych wykresów.

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x}, [2, 6]; & & f(x) = \frac{1}{3}x^3, [0, \sqrt{2}]; \\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2}, [1, \sqrt{2}]; & & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1; \\ x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, [0, \pi/2]; & & x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

5. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi x obszarów pod wykresami podanych funkcji.

$$\begin{aligned} f(x) = x^{3/2}, [0, 1]; & & f(x) = \frac{-1}{x}, [-3, -2]; \\ g(x) = \sqrt{\cos x}, [0, \pi/6]; & & f(x) = \sqrt{x}(1 - x)^{1/4}, [0, 1]. \end{aligned}$$

6. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi x obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

- (a) $f(x) = \sqrt{x + 1}, g(x) = \sqrt{x - 1}, [1, 3]$.
- (b) $f(x) = \cos x + \sin x, g(x) = \cos x - \sin x, [0, \pi/4]$.
- (c) $f(x) = 2x - x^2, g(x) = x^2 - 2x$.
- (d) $y = x^{1/2}, y = 2x^{1/4}$.
- (e) $y = x^3 + 2, y = x^2 + 2x + 2$.

7. Obliczyć objętość brył opierając się na informacji o przekrojach.

- (a) Podstawą bryły jest trójkąt równoramienny prostokątny o ramionach L_1 i L_2 długości 4. Przekroje prostopadłe do L_1 są półkami.

- (b) Podstawą bryły jest koło o promieniu 1. Przekroje prostopadłe do ustalonej średnicy podstawy są kwadratami.
- (c) Podstawą bryły jest trójkąt równoboczny o boku 10. Przekroje prostopadłe do ustalonej wysokości trójkąta są kwadratami.
8. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi y obszarów pod wykresami podanych funkcji.

$$f(x) = \frac{4}{x^3}, [1, 3]; \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, [0, \sqrt{3}];$$
$$g(x) = \sin(x^2), [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}]; \quad h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}, [0, 4].$$

9. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi y obszaru ograniczonego przez podane wykresy.
- (a) $f(x) = 1, g(x) = x - 2, [2, 3]$.
- (b) $f(x) = \cos(x^2), g(x) = \sin(x^2), [0, \sqrt{\pi}/2]$.
10. W kuli o promieniu 2 wydrążono otwór o promieniu 0,5. O ile zmniejszyła się objętość ?