KOŃCE A BRZEG GRUPY HIPERBOLICZNEJ (K∂G 1)

CEL: dla grupy hiperbolicznej G, przyporządkowanie $\partial G \to Ends(G)$ zadane przez

$$[\rho]_{\partial G} \to [\rho]_{Ends(G)} \quad (\rho - \text{promień geod w } C(G,S) \text{ o początku w } e)$$

jest dobrze określone i zadaje bijekcję pomiędzy komponentami spójności w ∂G a końcami G.

(WNIOSEK: grupa hiperboliczna G ma 1 koniec $\Leftrightarrow$ ∂G spójny.)

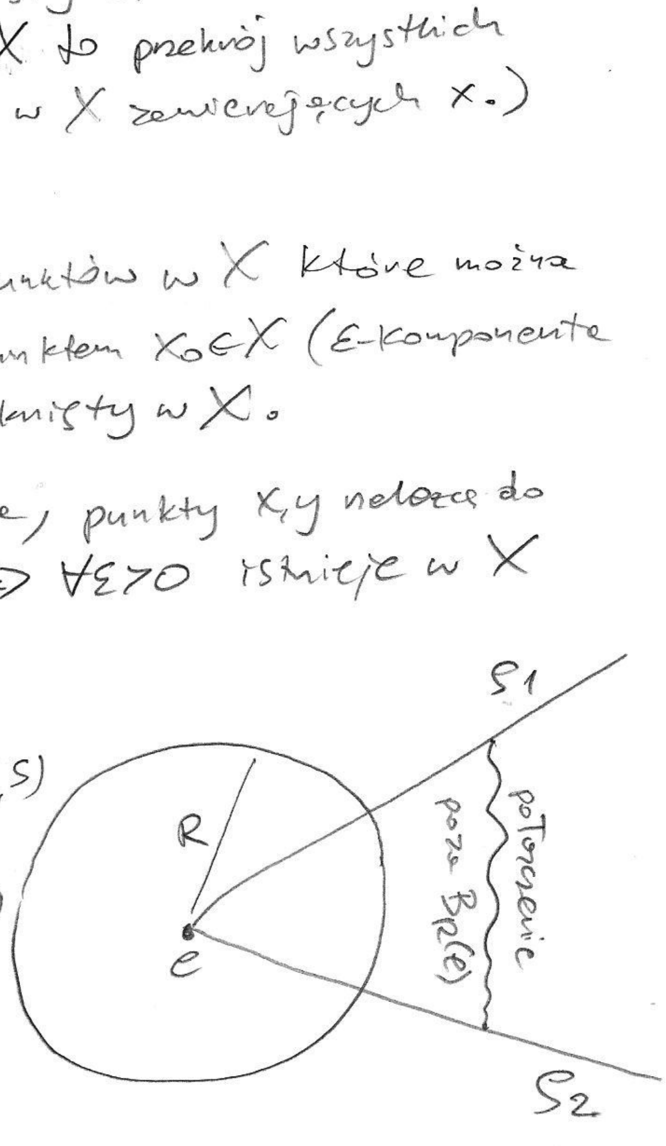
PRZYPOMNIENIE: punkty x, y przestrzeni topologicznej X są w tej samej komponencie spójności w X $\Leftrightarrow$ nie da się ich oddzielić zbiorami otwarto-domkniętymi.
(Komponenta spójności punktu x w X to przekrój wszystkich otwarto-domkniętych podzbiorów w X zawierających x.)

FAKTY POMOCNICZE.

(1) Przy ustalonym $\varepsilon > 0$, zbiór punktów w X które można połączyć ε-drogą z ustalonym punktem $x_0 \in X$ (ε-komponenta punktu x_0) jest otwarty i domknięty w X.

(2) Gdy X jest zwarta metryczna, punkty x, y należą do tej samej komponenty w X $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ istnieje w X ε-droga od x do y.

PRZYPOMNIENIE: promienie w $C(G,S)$ są współkońcowe gdy $\forall R > 0$ da się je połączyć drogą w $C(G,S)$ poza kulą $B_R(e)$.



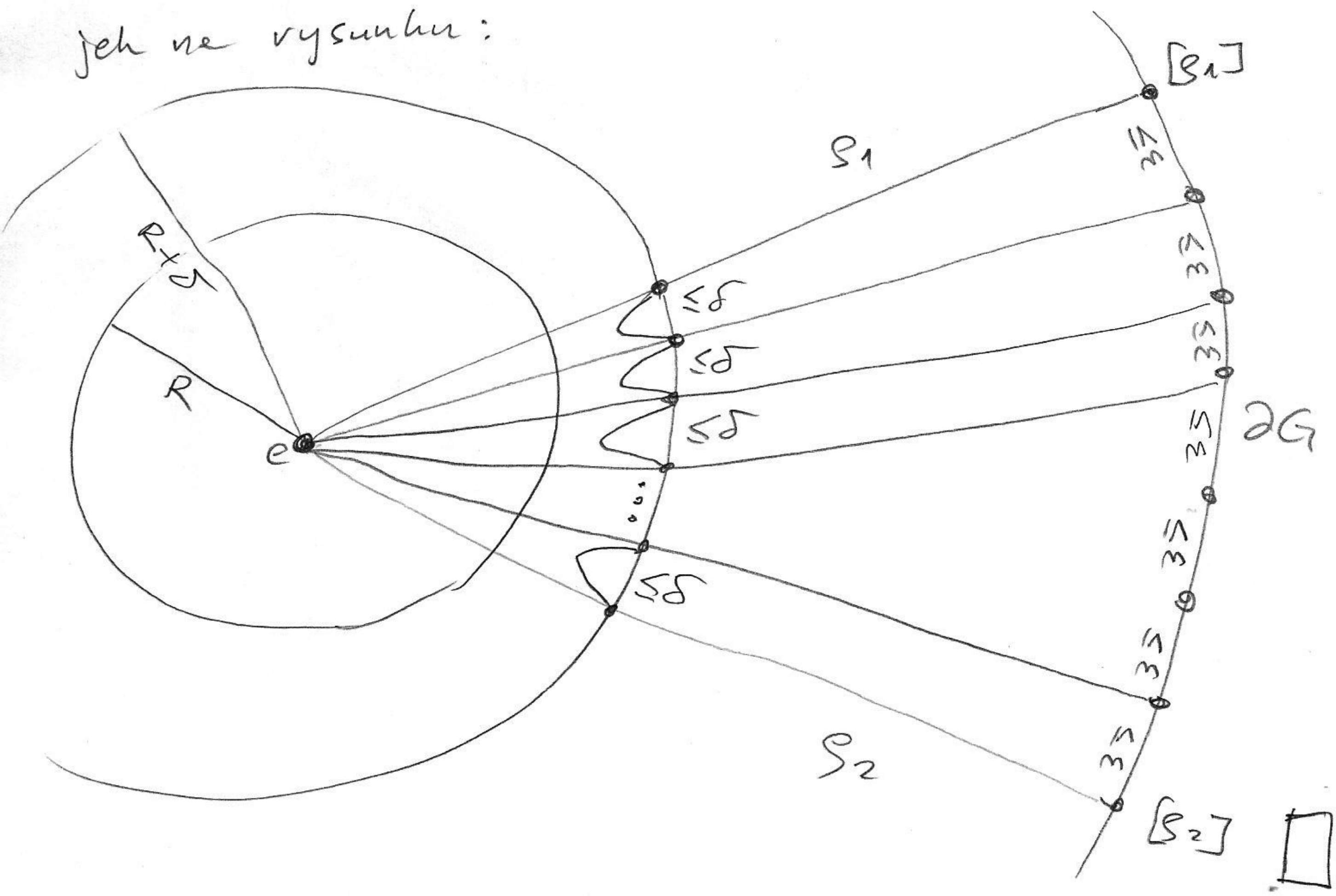
KAG 2

FAKT 1 Jeśli promienie geodezyjne ϱ_1, ϱ_2 w $C(G,S)$ o początku w e reprezentują punkty z tej samej komponenty spójności w ∂G (np. ten sam punkt) to promienie te są współkońcowe.

D-d Ustalmy $R>0$. Chcemy pokazać, że ϱ_1, ϱ_2 są połączone drogą w $C(G,S)$ poza $B_R(e)$.

Niech $\varepsilon>0$ będzie tak małe, że dowolne promienie ϱ, ϱ' o początku e, dla których $d_{\partial G}([\varrho],[\varrho'])<\varepsilon$ pozostają δ-bliskie na dystansie $R+\delta$ od e.

Wówczas ε-droga w ∂G pomiędzy $[\varrho_1]$ i $[\varrho_2]$ (istniejąca na mocy FAKTU POMOCNICZEGO ②) w sposób wyznacza drogę od ϱ_1 do ϱ_2 poza $B_R(e)$ w sposób jak na rysunku:



$\square$

KdG3

FAKT 2 Współkońcowe promienie geod. ρ_1, ρ_2 w $C(G,S)$ (o początku w e) reprezentują punkty z tej samej komponenty spójności w ∂G.

UWAGA: Będziemy potrzebować następującej własności ogólnej grupy hiperbolicznej G:
istnieje stała $C>0$ (zależna od G, S) t.że $\forall x \in C(G,S)$ w odległości nie większej niż C od x przebiega promień geodezyjny o początku w e
(jednostajna „gęstość" promieni geodezyjnych o początku w e w $C(G,S)$).

DOWÓD POMIJAMY — wykorzystuje on fakt że geodezyjne w $C(G,S)$ dadzą się wyrazić ze pomocą automatu.

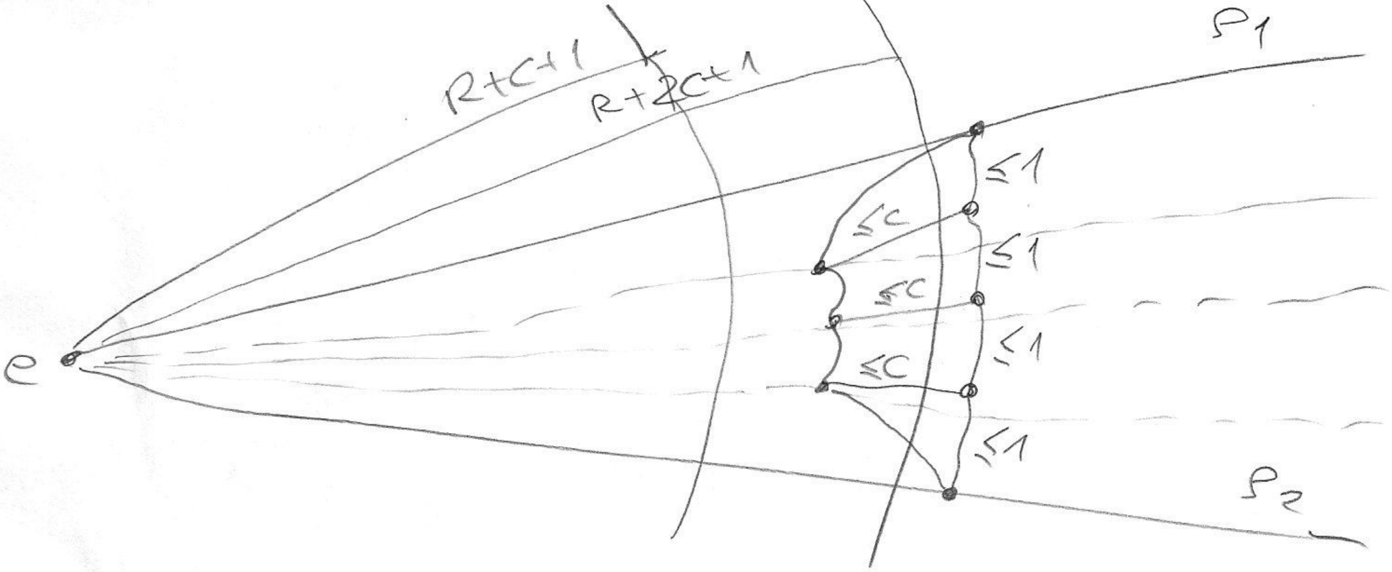
D-d FAKTU 2

Ustalmy $\varepsilon>0$; chcemy pokazać że $[\rho_1], [\rho_2] \in \partial G$ można połączyć ε-drogą.
Ustalmy R tak duże, że promienie biegnące δ-blisko na dystansie $\geq R$ wyznaczają punkty w ∂G odległe o $<\varepsilon$.

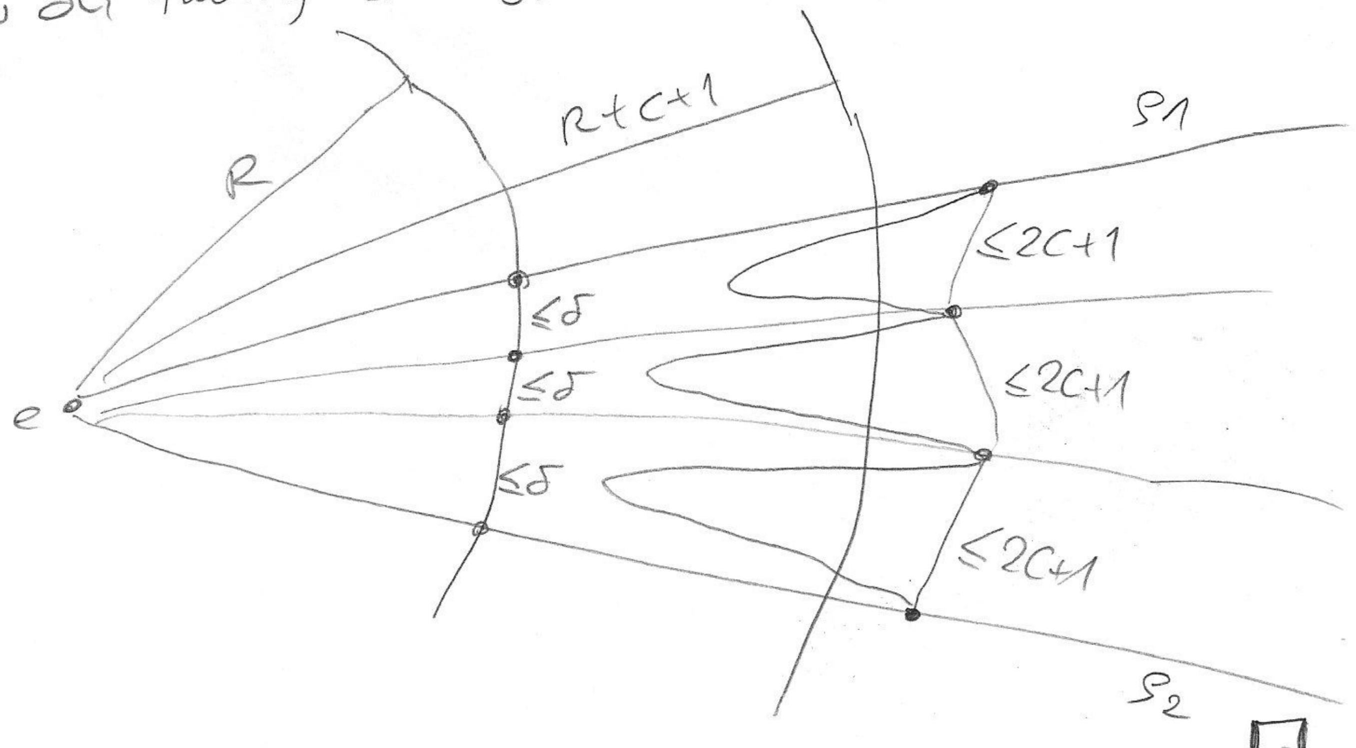
Niech γ będzie drogą w $C(G,S)$ łączącą ρ_1 i ρ_2 poza kulą $B_{R+2C+1}(e)$
(istnieje ze współkońcowości ρ_1, ρ_2).
Konstruujemy ε-drogę w ∂G pomiędzy $[\rho_1]$ a $[\rho_2]$ w następujących 2 krokach:

Krok 1 Droga γ wyznaczona (K∂G 4)

$(2C+1)$-drogę łączącą ϱ_1 z ϱ_2 poza kulą $B_{R+C+1}(e)$ złożoną z punktów leżących na promieniach geodezyjnych o początku w e (tworzących ciąg promieni geodezyjnych „łączących” ϱ_1 z ϱ_2).



Krok 2 Sąsiednie promienie z powyższego ciągu pozostają (dzięki δ-cienkości trójkątów geodezyjnych w $C(G,S)$) δ-bliskie na dystansie $\geq R$, więc ciąg ich „obrazów” w ∂G tworzy ε-drogę łączącą $[\varrho_1]$ z $[\varrho_2]$.



□