WYMIAR ASYMPTOTYCZNY asdim

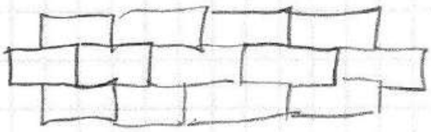
$\boxed{P1}$

X zwarta metryczna

$\dim X = \min\{n :$ $\forall \varepsilon>0$ istnieje skończone pokrycie $\mathcal{U}_\varepsilon$ przestrzeni X otwartymi zbiorami o średnicy $<\varepsilon$ i że każdy $x\in X$ należy do $\leq n+1$ zbiorów z $\mathcal{U}_\varepsilon \}$

[„krotność" $\mathcal{U}_\varepsilon \leq n+1$]

PRZYKŁAD. $\dim([0,1]\times[0,1]) \leq 2$



$\frac{\varepsilon}{3}$-otoczenie tych cegiełek

DEF. $\operatorname{asdim} X = \min\{n :$ $\forall R>0$ istnieje (na ogół nieskończone) pokrycie $\mathcal{U}_R$ przestrzeni X zbiorami jednostajnie ograniczonymi (niekoniecznie otwartymi) t. że $\forall x\in X$ kula $B_R(x)$ należy do $\leq n+1$ zbiorów z $\mathcal{U}\}$ „R-krotność" $\mathcal{U}_R \leq n+1$

Yu [1998] $\operatorname{asdim}(G)<\infty \Rightarrow$ G spełnia hipotezę Nowikowa

Roe [2003] $\operatorname{asdim}(G)<\infty \Rightarrow$ G zgrubnie zanurza się w przestrzeń Hilberta

ĆWICZENIA/UWAGI

(0) asdim jest niezmiennikiem q.i.

(1) $\operatorname{asdim}(\{n^3 : n\in\mathbb{Z}\}) = 0$

(2) dla X asymptotycznie spójnej, $\operatorname{asdim} X = 0 \Leftrightarrow$ X ograniczona

$\Rightarrow \operatorname{asdim}(\mathbb{Z}) = \operatorname{asdim}(\mathbb{R}) = 1$

$\Rightarrow \operatorname{asdim}(G) = 0 \Leftrightarrow$ G skończona

(3) $\operatorname{asdim}(\mathbb{Z}^n) \leq n$ - argument cegiełkowy

(4) $\operatorname{asdim}(X\times Y) \leq \operatorname{asdim} X + \operatorname{asdim} Y$ [Bell-Dranishnikov]

(łatwo pokazać że $\leq \operatorname{asdim} X + \operatorname{asdim} Y + 1$ ćw.)

(5) $Y\subset X$ z obciętą metryką, to $\operatorname{asdim} Y \leq \operatorname{asdim} X$.

JAK POKAZAĆ ŻE asdim $\mathbb{Z}^n \geq n$? $\boxed{D2}$

metoda homologiczna

DEF. Dla $\varepsilon > 0$, q-wymiarowy ε-sympleks w p. metr. X to układ $(x_0, x_1, \dots, x_q)$ punktów z X t.że $d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$ dla $0 \leq i \neq j \leq q$.

W oczywisty sposób określamy q-wym. ε-łańcuchy, brzegowanie, oraz ε-homologie $H_*^{\varepsilon} X$.

Dla ε-łańcucha u w X, <u>nośnik</u> $\mathrm{supp}(u)$ to zbiór wszystkich wierzchołków we wszystkich ε-sympleksach z u (mających niezerowy współczynnik).

Dla ε-cyklu z, jego <u>ε-wypełnieniem</u> w X nazywamy dowolny ε-łańcuch w taki, że $\partial w = z$.

DEF. (asymptotyczny wymiar homologiczny asdimh)

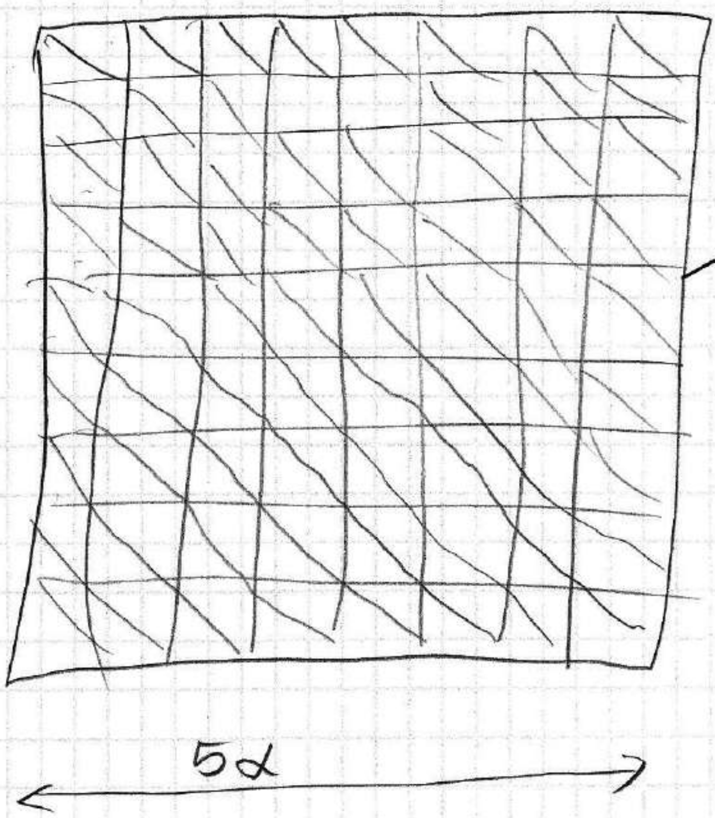
$\mathrm{asdim}_h(X) \leq p$ gdy $\forall r > 0 \; \exists \alpha > 0$ (zależne tylko od X oraz r) t.że dla $q \geq p$ dowolny q-wymiarowy r-cykl ϕ r-homologicznie trywialny w X jest także α-homologicznie trywialny w $\mathrm{supp}(\phi)$.

• $\mathrm{asdimh}(X) = \min\{p : \mathrm{asdim}_h(X) \leq p\}$.

FAKT. asdimh jest niezmiennikiem quasi-izometrii. [ćw.]

D3

SZKIC ARGUMENTU, ŻE $\operatorname{asdim}_h(\mathbb{Z}^n) = \operatorname{asdim}_h(\mathbb{R}^n) \geq n$

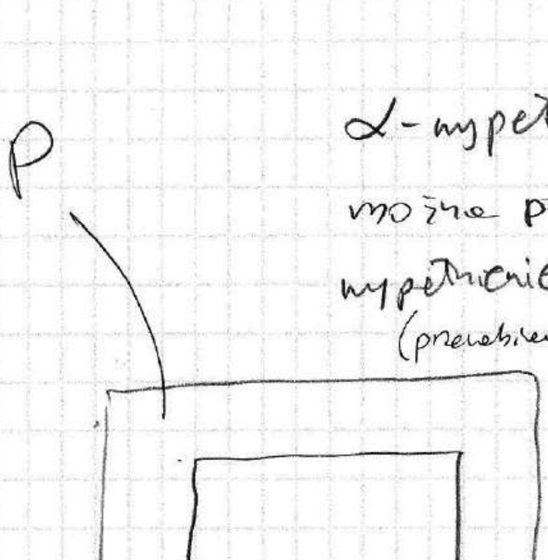


Φ - $(n-1)$-wymiarowy r-cykl r-homologicznie trywialny w $\mathbb{R}^n$

α - homologicznie nietrywialny w $\operatorname{supp}\Phi$

UZASADNIENIE

α-wypełnienie Φ w $\operatorname{supp}\Phi$ można przerobić na singularne wypełnienie Φ w „pierścieniu" P (przerabiamy α-sympleksy na liniowe singularne sympleksy).



Ale $[\Phi] \neq 0$ w $H^{n-1}_{sing} P$ - sprzeczność.

D4

SZKIC ARGUMENTU, że asdim $X \geq$ asdim$_h X$

Zał. że asdim $X = p$
Chcemy: asdim$_h X \leq p$.

Ustalmy $r > 0$. Dla pewnego $q \geq p$
niech ϕ będzie q-wym. r-cyklem
r-homologicznie trywialnym w X.

Niech $\mathcal{U}_r$ będzie pokryciem X zbiorami o średnicach $\leq R$
t. że dowolna kula $B_r(x)$ przecina co najwyżej $p+1$ zbiorów z $\mathcal{U}_r$.
Rozważ r-nerw N dla $\mathcal{U}_r$:
$V(N) = \mathcal{U}_r$
$U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{U}_r$ rozpinają sympleks w N
gdy istnieje kula $B_r(x)$ przecinająca $U_1, \ldots, U_m$
N jest p-wymiarowym kompleksem symplicjalnym.

Dla każdego $x \in X$ wybieramy $U_x \in \mathcal{U}_r$ t. że $x \in U_x$
zaś dla każdego $U \in \mathcal{U}_r$ wybierzmy reprezentanta $z_U \in X$ t. że $z_U \in U$

Przyporządkowanie $x \to U_x$ zamienia ϕ
na symplicjalny q-wymiarowy cykl ϕ_N w N
symplicjalnie homologiczny zeru
Ponieważ w N nie ma $(q+1)$-sympleksów,
oznacza to w szczególności że $\phi_N = 0$ jako łańcuch.

Przyporządkowanie $x \mapsto Z_{ux}$ przekształca ϕ

w q-wymiarowy $(r+2R)$-cykl ϕ'

$(r+2R)$-homologiczny z ϕ przez „przedłużony" $(q+1)$-łańcuch W

Ale $\phi' = 0$ jako łańcuch, tak samo jak ϕ_N

więc W jest $(r+2R)$-wypełnieniem ϕ

o wierzchołkach oddalonych o nie więcej niż R od $\mathrm{supp}\,\phi$

Wierzchołki W leżące poza $\mathrm{supp}\,\phi$ przesuwamy o nie więcej niż R do $\mathrm{supp}\,\phi$

otrzymując $(r+4R)$-wypełnienie ϕ w $\mathrm{supp}(\phi)$.

Zatem dla $\alpha = r+4R$,

ϕ jest α-homologicznie trywialny w swoim nośniku.

Stąd $\mathrm{asdimh}(X) \leq p \ [= \mathrm{asdim}(X)]$ $\square$

WNIOSEK.

$\mathrm{asdim}(\mathbb{Z}^n) \geq \mathrm{asdimh}(\mathbb{Z}^n) \geq n$.

czyli $\mathrm{asdim}(\mathbb{Z}^n) = n$.

D6

ZGRUBNA (COARSE) NIEZMIENNICZOŚĆ

wymiaru asymptotycznego

Def. (odwzorowanie) $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ jest zgrubnym zanurzeniem (coarse embedding) jeśli istnieją dwie funkcje $\lambda,\mu:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ t.że $\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\infty=\lim_{t\to\infty}\mu(t)$

t.że $\forall x,y\in X$ mam

$$\lambda(d_X(x,y))\le d_Y(f(x),f(y))\le \mu(d_X(x,y)).$$

f jest ponadto zgrubną równoważnością jeśli $\exists L>0 : f(X)$ jest L-siecią w (Y,d_Y)

($\Leftrightarrow$ jeśli istnieje zgrubne zanurzenie $g:Y\to X$ t.że $f\circ g$ oraz $g\circ f$ są w skończonej odległości od identyczności).

- jest to relacja równoważności

2 PRZYKŁADY NATURALNEGO WYSTĘPOWANIA:

(1) $H<G$ sk. gen. podgrupa w sk. gen. grupie

S - sk. zb. gen w G

T - ,, — w H

metryki d_T oraz $d_S|_H$ na H są zgrubnie równoważne (inaczej $(H,d_T)\hookrightarrow(G,d_S)$ jest zgrubnym włożeniem)

(2) ważone metryki słów na grupach przeliczalnie generowanych

wagi przypisane generatorom (i krawędziom w $C(G,S)$) dążące do ∞.

FAKT. dowolne 2 takie metryki na G są zgrubnie równoważne.

FAKT

Wymiar asymptotyczny jest niezmiennikiem zgrubnej równoważności p. metrycznych.

WNIOSKI (1) Jeśli X posiada zgrubne włożenie w Y to $\operatorname{asdim}(X) \leq \operatorname{asdim}(Y)$.

(2) Jeśli $H < G$ oraz H, G sk. gen. to $\operatorname{asdim}(H) \leq \operatorname{asdim}(G)$.

(3) Istnieje naturalne pojęcie $\operatorname{asdim}(G)$ dla przeliczalnie generowanych grup G.

PRZYKŁAD UŻYCIA ZGRUBNEJ RÓWNOWAŻNOŚCI:

$$Nil = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

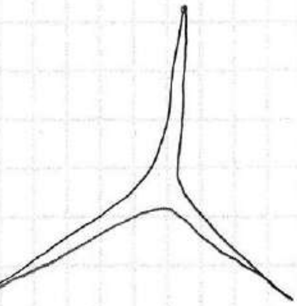
- grupy Nil i $\mathbb{Z}^3$ nie są quasi-izometryczne, ale są zgrubnie równoważne poprzez $f: \mathbb{Z}^3 \to Nil$, $f(a,b,c) = (a,b,c)$, bo dla $x = (a,b,c)$, $y = (a',b',c')$ mamy

$$d_{Nil}(x,y) \leq d_{\mathbb{Z}^3}(x,y) \leq \left(d_{Nil}(x,y)\right)^2$$

- stąd $\operatorname{asdim}(Nil) = \operatorname{asdim}(\mathbb{Z}^3) = 3$

D8

GRUPA HIPERBOLICZNA



$\exists \delta$: każdy trójkąt geodezyjny jest δ-szczupły

(TAK JEST NA $\mathbb{H}^2$)

FAKT. Hiperboliczność jest niezmiennikiem quasi-izometrii.

PRZYKŁADY.

(1) grupy wolne i wirtualnie wolne

(2) grupy podstawowe ujemnie zakrzywionych zwartych rozmaitości
(np. tzw. grupy powierzchni)

(3) grupy podstawowe kompleksów o ujemnej krzywiźnie
(np. 7-systoliczne – ujemne krzywizne kombinatoryczne TJ–JŚ)

(4) grupy losowe
grupy małych skreśleń

(5) klasa zamknięta na produkty wolne z amalgamacją
względem podgrup
(a) skończonych
(b) maksymalnych wirtualnie cyklicznych
(c) quasi-izometrycznie wypukłych
i malnormalnych
[Bestvina–Feighn [1992] combination]

[Istotne uogólnienia ostatniego i
Alexandre Martin, Damian Osajda
2015, 2021]

NIEHIPERBOLICZNE: grupy zawierające $\mathbb{Z}^2$
ogólniej, grupy zawierające Baumslaga-Solitara $B(m,n)$ | dowolne grupy zawierające zdystorsowaną podgrupę cykliczną

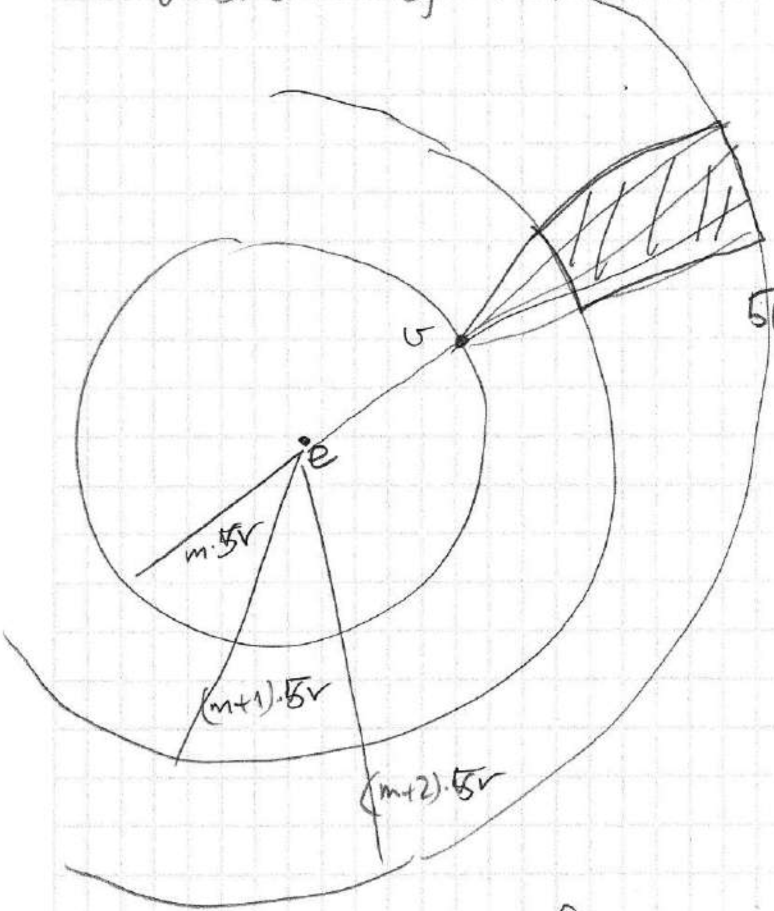
$\boxed{D\ 9}$

[Gromov, ok. 1990]

FAKT. Każda grupa hiperboliczna G ma skończony wymiar asymptotyczny, $\operatorname{asdim}(G) < \infty$.

[wg Gromova, ok. 1990]

Dowód: ustalmy $r > 0$ (bso zał. $r \geq \delta$) konstruujemy jednostajnie ograniczone pokrycie G o skończonej r-krotności.



dla $v \in S_{5mr}(e)$

$U_v = \{z \in G :$ $5(m+1)r \leq d(e,z) \leq (m+2)5r$, v leży na pewnej geodezyjnej od z do $e\}$

$\operatorname{diam}(U_v) \leq 20r$

(bo $U_v \subset B_{10r}(v)$)

$$\mathcal{U} = \{B_{5r}(e)\} \cup \{U_v : v \in B_{5mr}(e),\ m \geq 1\}$$

wszystkie zbiory w $\mathcal{U}$ mają średnicę $\leq 20r$

UWAGA. Dla $|m_1 - m_2| \geq 2$, $v_1 \in B_{5m_1 r}(e)$, $v_2 \in B_{5m_2 r}(e)$, $d(U_{v_1}, U_{v_2}) \geq 5r$

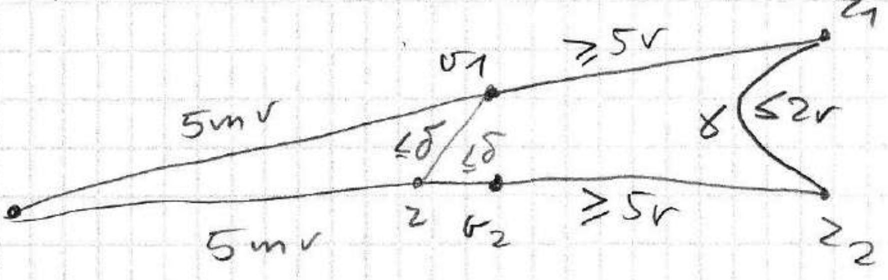
więc nie istnieje kula $B_r(x)$ przecinająca obie U_{v_1}, U_{v_2}.

Jeśli jedna kula $B_r(x)$ przecina U_{v_1}, U_{v_2}

to $d(U_{v_1}, U_{v_2}) \le 2r$

więc $\exists z_1 \in U_{v_1}, z_2 \in U_{v_2} : d(z_1, z_2) \le 2r$

Rozważmy przypadek gdy $v_1, v_2 \in S_{5mr}(e)$. Wtedy



Ponieważ $r > \delta$, $v_1 \notin N_\delta(\gamma)$ #.

Zatem $v_1 \in N_\delta([e, z_2])$

$d(v_1, z) \le \delta$ dla pewnego $z \in [e, z_2]$

Ale wtedy $5mr - \delta \le d(z, e) \le 5mr + \delta$

więc $d(z, v_2) \le \delta$

Ostatecznie $d(v_1, v_2) \le 2\delta$.

Mamy

$\{v \in S_{5mr} : d(U_v, U_{v_0}) \le 2r\} \subset B_{2\delta}(v_0)$

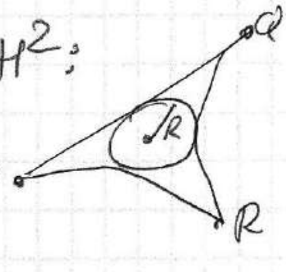
Stąd już łatwo wynika, że r-krotność pokrycia $\mathcal{U}$ jest $\le 2 \cdot |B_{2\delta}|$

Zatem $\operatorname{asdim}(G) \le 2 \cdot |B_{2\delta}| - 1$. □

- asdim (mapping class group) $< \infty$ [Bestvina-Bromberg-Fujiwara, 2010]
- OTWARTE: czy $\operatorname{asdim}(\operatorname{Out}(F_n)) < \infty$ dla $n > 2$?

BRZEG GROMOVA i jego związek z asdim

Na płaszczyźnie hiperbolicznej $\mathbb{H}^2$:

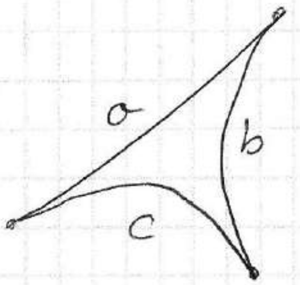


$R < \ln(1+\sqrt{2})$

dla dowolnego trójkąta PQR

[trójkąty są uniwersalnie szczupłe]

DEF. Geodezyjna p. metr. (X,d) jest <u>hiperboliczna</u> gdy $\exists \delta \geq 0$ t.że dowolny geodezyjny trójkąt w X jest <u>δ-szczupły</u>:



$\forall x \in a \quad d(x, b \cup c) \leq \delta \quad [\Leftrightarrow a \subset N_\delta(b \cup c)]$

$b \subset N_\delta(a \cup c)$

$c \subset N_\delta(a \cup b)$

FAKT. Hiperboliczność jest niezmiennikiem quasi-izometrii geod. p. metr.

DEF. Sk. gen. grupa G jest hiperb. gdy jej dowolny graf Cayleya $C(G,S)$ $(|S|<\infty)$ jest hiperboliczny.

|WŁASNOŚĆ G, a nie pary (G,S)|!

PRZYKŁADY. $\mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}^n$ $n \geq 2$,

grupy wolne F_n (drzewa są 0-hiperboliczne)

$\pi_1(M^-)$ dla M^- zwarta rozmaitość z ujemną krzywizną Riem. (niekoniecznie stałą)

grupy losowe w sensie Gromova

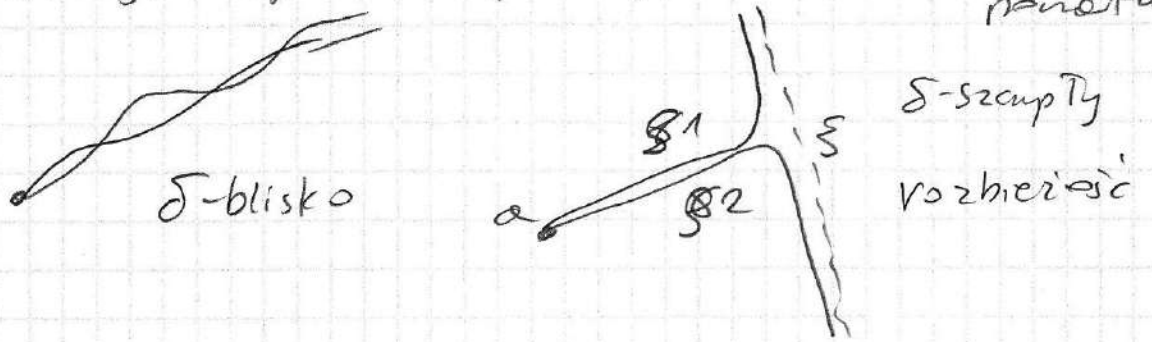
Nie są hiperboliczne: grupy zawierające $\mathbb{Z}^2$, grupy zawierające zdystorsowane podgrupy cykliczne

BRZEG GROMOVA (brzeg idealny, brzeg w ∞)

promienie geodezyjne w X: $\varrho : [0,\infty) \to X$ izometria

$\varrho(0) = x_0$ – początek

W hiperbolicznej X dychotomia (dla 2 promieni geod. o wspólnym początku)



$\langle \varrho_1, \varrho_2 \rangle \approx d(a, \xi)$

produkt Gromova

$\partial_\infty X$ = promienie geod. o początku a / δ-bliskość

$d_\infty([\varrho_1], [\varrho_2]) \approx a^{\langle \varrho_1, \varrho_2 \rangle}$ dla odp. $a > 1$

TW. (a) $\partial_\infty X$ jako p. top. nie zależy od wyboru a.

(b) $f : X \to Y$ – quasi-izometria

indukuje $\tilde{f} : \partial_\infty X \to \partial_\infty Y$ homeo

(c) $f : X \to Y$ – włożenie quasi-izometryczne p. hiperbolicznych

indukuje $\tilde{f} : \partial_\infty X \to \partial_\infty Y$ top. włożenie

PRZYKŁADY. $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = S^1$, $\partial_\infty \mathbb{H}^n \cong S^{n-1}$

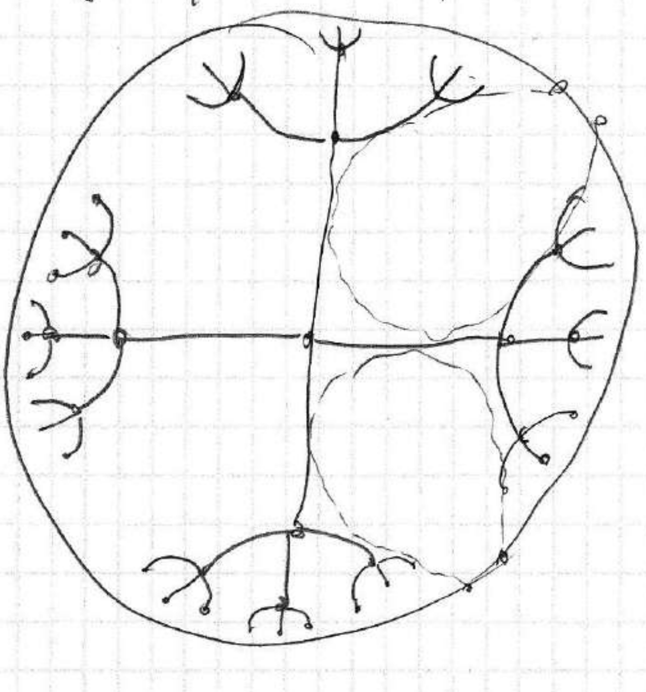
M – n-wym zwarte o ujemnej krzywiźnie

$\Rightarrow \partial_\infty(\tilde{M}) = \partial_\infty \pi_1(M) \cong S^{n-1}$

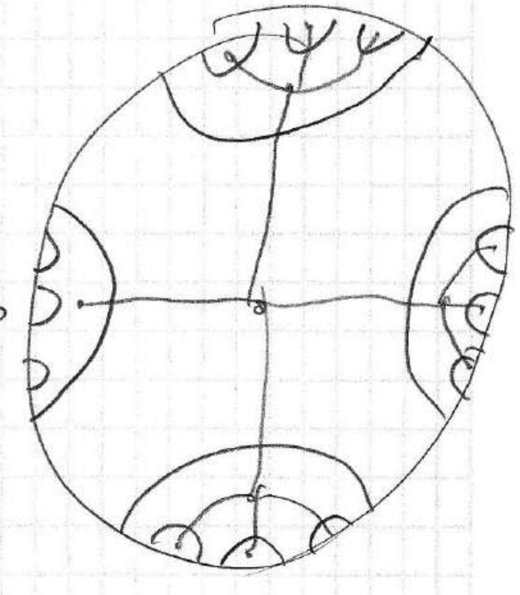
nakrycie uniwersalne

PRZYKŁADY (c.d.)

$\exists f: T_4 \to \mathbb{H}^2$ q.i.-włożenie



dużo do



$\partial_\infty T_4 = \partial_\infty F_2 \cong \partial_\infty \mathbb{H}^2 \setminus$ kolekcja segmentów

$=$ zb. Cantora.

TW. Γ - grupa hiperboliczna. Wówczas $\partial_\infty \Gamma$ jest zwartą przestrzenią o skończonym wymiarze topologicznym, w naturalny sposób kompaktyfikującą (jako reszta kompaktyfikacji) graf Cayleya $C(\Gamma, S)$.

PRZYKŁADY sugerują, że

$\dim \partial_\infty \Gamma = \operatorname{asdim} \Gamma - 1$

(np. $\dim(\text{Cantor}) = 0$, $\operatorname{asdim}(F_2) = 1$,

$\dim \partial_\infty \widetilde{M}^n = \dim S^{n-1} = n-1$

$\operatorname{asdim} \widetilde{M}^n = n$).

D14

TW [JŚ, 1995] $\operatorname{asdim}\Gamma \geq \dim \partial_\infty \Gamma + 1$.

TW [Buyalo-Lebedeva, 2007] $\operatorname{asdim}\Gamma = \dim \partial_\infty \Gamma + 1$.

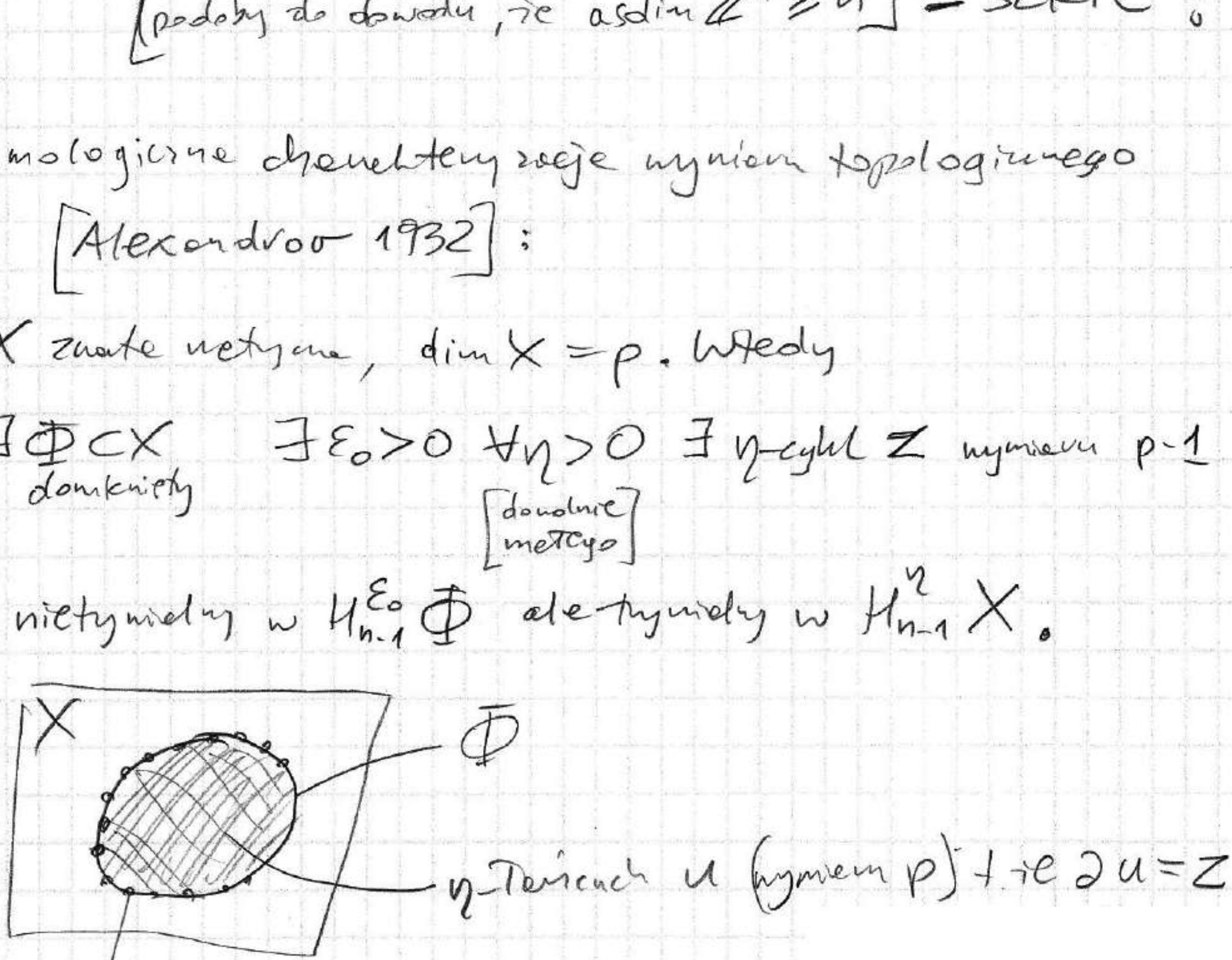
Dowód że $\operatorname{asdim}\Gamma \geq \dim \partial_\infty\Gamma + 1$, wg [JŚ 1995],
[podobny do dowodu, że $\operatorname{asdim}\mathbb{Z}^n \geq n$] – SZKIC :

• Homologiczne charakteryzacje wymiaru topologicznego [Alexandrov 1932] :

X zwarte metryczne, $\dim X = p$. Wtedy

$\exists \underset{\text{domknięty}}{\Phi \subset X} \quad \exists \varepsilon_0 > 0 \ \underset{\text{[dowolnie małego]}}{\forall \eta > 0} \ \exists$ η-cykl Z wymiaru $p-1$

nietrywialny w $H_{n-1}^{\varepsilon_0}\Phi$ ale trywialny w $H_{n-1}^{\eta}X$.



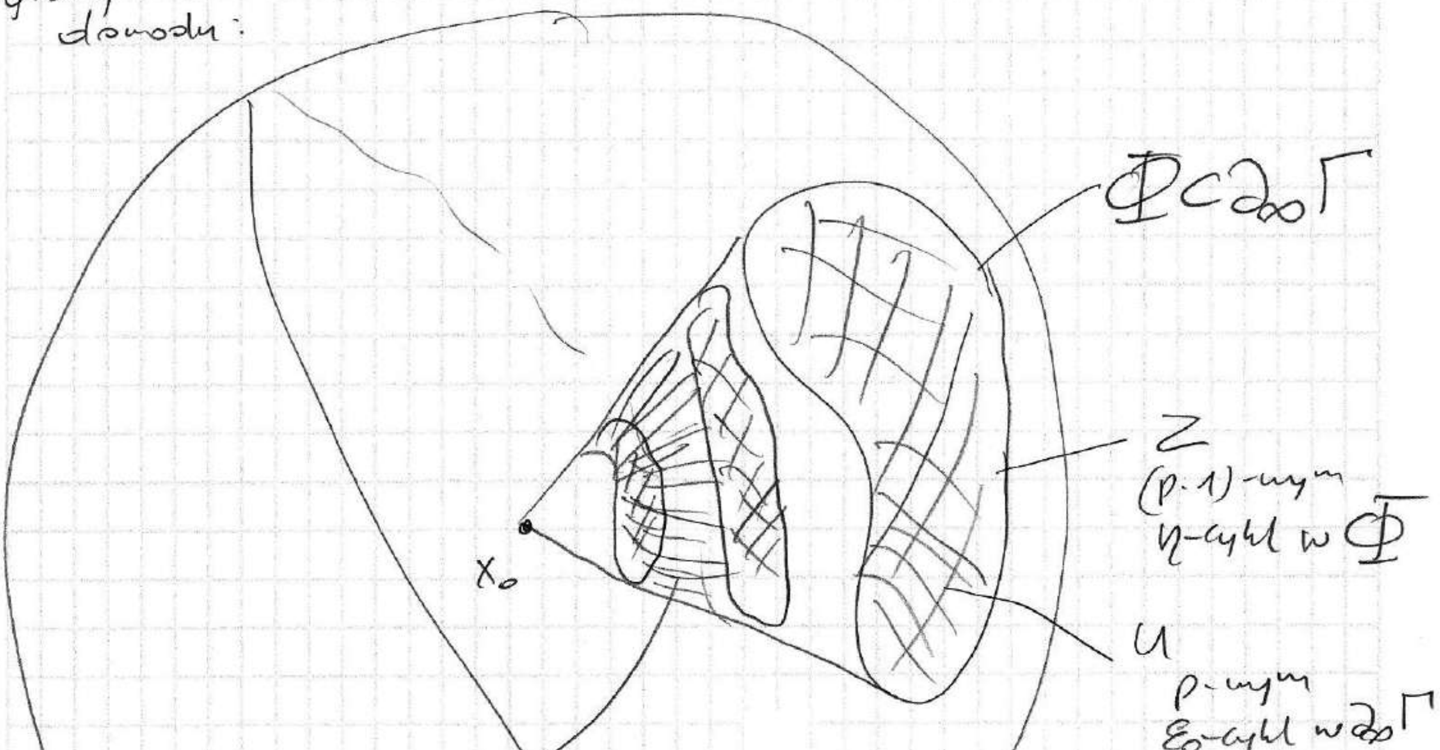
$\boxed{D15}$

- wcześniej ustaliliśmy własność osdim :

Jeśli $\exists d>0\ \forall \alpha>0\ \exists$ q-wymiarowy d-cykl Ψ d-homologicznie trywialny w X, oraz α-homologicznie nietrywialny w swoim nośniku

to $\operatorname{osdim} X \geq q$.

- ogólny krok dowodu:



p-wym „cylindryczny" d-cykl w Γ d-homologicznie trywialny w Γ oraz α-homologicznie nietrywialny w swoim nośniku

$\square$