WZROST W GRUPACH

W1

Def. G - grupa, S - skończony układ generatorów.

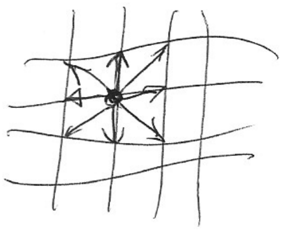
Funkcja wzrostu $\beta_{G,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ to

$$\beta_{G,S}(k) = |B_k^{G,S}(e)| = |\{g \in G : d_S(e,g) \le k\}|.$$

(funkcja wzrostu liczebności kul).

PRZYKŁADY.

① $G = \mathbb{Z}^n$, $S = \left\{ \sum \pm \delta_i \right\}$ - dowolne sumy parami różnych z dowolnymi kombinacjami znaków



$$\beta_{\mathbb{Z}^n,S}(k) = (2k+1)^n$$

[wielomian stopnia n]

ćw. wylicz $\beta_{\mathbb{Z}^2,\{\delta_1,\delta_2\}}$.

② $G = F_m$, $S_m = \{x_1, \dots, x_m\}$ - standardowy

$$\beta_{F_m,S_m}(k) = 1 + 2m + 2m(2m-1) + \dots + 2m(2m-1)^{k-1} =$$

$$= \frac{m}{m-1}(2m-1)^k - \frac{1}{m-1}$$ [funkcja wykładnicza]

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI.

Ⓐ podmultyplikatywność: $\beta_{G,S}(k+k') \le \beta_{G,S}(k) \cdot \beta_{G,S}(k')$ ćw.

Ⓑ $|G| = \infty \Rightarrow \beta_{G,S}$ ściśle rosnąca $\Rightarrow \beta_{G,S}(k) \ge k+1$

(oszacowanie dolne liniowe)

Ⓒ $$\beta_{G,S}(k) \le \beta_{F_S,S}(k) = \begin{cases} 2|S|+1 & \text{gdy } |S|=1 \\ \frac{|S|}{|S|-1}(2|S|-1)^k - \frac{1}{|S|-1} & \text{gdy } |S| \ge 2 \end{cases}$$

(oszacowanie górne wykładnicze)

(D) G generowana przez S, $T \subset S$, $H = \langle T \rangle < G$. **W2**

Wówczas $\beta_{H,T}(k) \leq \beta_{G,S}(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. [ćw]

ABSTRAKCYJNE FUNKCJE WZROSTU — QUASI-DOMINACJA I QUASI-RÓWNOWAŻNOŚĆ

Def. abstrakcyjna funkcja wzrostu to dowolna niemalejąca

$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

UWAGA. Funkcja wzrostu $\beta_{G,S}$ indukuje abstrakcyjną funkcję wzrostu

$\tilde{\beta}_{G,S}(t) := \beta_{G,S}(\lceil t \rceil)$.
↑SUFIT

Także $\tilde{\beta}_{G,S}(t)$ jest w dalszym ciągu pod-multyplikatywna [ćw]

[Będziemy pisać $\beta_{G,S}(t)$ zamiast $\tilde{\beta}_{G,S}(t)$]

Def $g \succ f$ (g quasi-dominuje f) gdy $\exists c \geq 1, b \geq 0$ t.że

$\forall r \geq 0 \quad f(r) \leq c \cdot g(c \cdot r + b) + b$.

PRZYKŁAD (1) Dla każdego wielomianu $w(t)$ stopnia n o dodatnich współczynnikach mamy $w(t) \prec t^n$ ćw.

(2) dla dowolnych $a, b > 1$ mamy

$a^t \prec b^t$ [nawet gdy $a > b$]

UWAGA. Quasi-dominacja jest relacją przechodnią i zwrotną ($f \prec f$).

W3

Def. f, g są <u>quasi-równoważne</u> ($f \sim g$)

gdy $f \prec g$ oraz $g \prec f$.

Jest to relacja równoważności –

– jej klasy nazywamy <u>typami wzrostu</u> (growth rate types).

PRZYKŁADY.

(1) dla $a \geq 0$ funkcje $t \mapsto t^a$ określają parami różne typy wzrostu [ćw]

(2) dla $0 > a > b$ mamy $e^{ta} \sim e^{tb}$

[jest to tzw. <u>typ wzrostu eksponencjalnego</u>]

(3) $\forall a \geq$ $t^a \prec e^t$ i są to różne typy wzrostu

$[t^a \not\succ e^t]$ [ćw]

(4) wszystkie funkcje wzrostu grup, $\beta_{G,S}(t)$ są quasi-zdominowane przez e^t, $\beta_{G,S}(t) \prec e^t$.

Aby pokazać, że grupa (G, S) ma typ wzrostu eksponencjalny, $\beta_{GS}(t) \sim e^t$, wystarczy więc pokazać, że $\beta_{GS}(t) \succ e^t$ a to jest równoważne nierówności

$$\beta_{GS}(t) \geq c \cdot a^t - b$$

dla pewnych $c > 0$, $a > 1$, $b \geq 0$

W4

PROPOSITION.

(G,S), (H,T) – grupy ze skończonymi zbiorami generatorów.
Jeśli istnieje quasi-izometryczne zanurzenie $f:(G,d_S)\to(H,d_T)$
to $\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$. [dowód za chwilę]

WNIOSKI.

① Jeśli grupy (G,S), (H,T) są quasi-izometryczne,
to mają ten sam typ wzrostu: $\beta_{G,S} \sim \beta_{H,T}$.

② Typ wzrostu jest jednoznaczny dla sk. gen. grupy G, tzn.
$\beta_{G,S_1} \sim \beta_{G,S_2}$ dla dowolnych skończonych zbiorów generatorów S_1, S_2.

[typ wzrostu jest niezmiennikiem quasi-izometrii grup skończenie generowanych]

WYRÓŻNIAMY:

- grupy o wzroście wielomianowym : $\beta_G \prec t^a$ dla pewnego $a>0$
  (np. wzrost liniowy, kwadratowy)
  * Okazuje się, że wtedy $\beta_G \sim t^m$ dla pewnego $m\in\mathbb{N}$
  nie ma więc grup o typach wzrostu ułamkowo-potęgowego
  albo o typie wzrostu $t\log t$, itp.
- grupy o wzroście eksponencjalnym
- grupy o wzroście pośrednim (intermediate growth)
  ani wielomianowym, ani eksponencjalnym

UWAGI. Istnieją grupy o wzroście pośrednim, [W5]

np. tzw. grupa Grigorchuka

Wiadomo dla niej, że

$$e^{t^\alpha} \prec \beta_G \prec e^{t^\beta} \quad \text{dla pewnych } 0<\alpha<\beta<1$$

ale typ wzrostu nie jest jednoznacznie wyznaczony.

Jest ona nieskończenie prezentowalna.

Otwarte pozostają hipotezy:

- G ma wzrost pośredni $\Rightarrow$ $\beta_G \succ e^{n^\alpha}$ dla pewnego $0<\alpha<1$

- grupy skończenie prezentowalne nie dopuszczają pośredniego wzrostu (albo wielomianowe, albo eksponencjalne)

Dla żadnej grupy o pośrednim wzroście nie jest wyznaczony jej (dokładny) typ wzrostu.

W6

DOWÓD PROPOSITION

Niech $f:(G,d_S)\to(H,d_T)$ - quasi-izometryczne zanurzenie.

Oznacza to, że $\exists C\geq 1$ t. że $\forall g,g'\in G$

$$\frac{1}{C}d_S(g,g') - C \le d_T(f(g),f(g')) \le C\cdot d_S(g,g')+C$$

Oznaczmy $e'=f(e)$, i niech $r\in\mathbb{N}$; wtedy mamy

$$g\in B_r^{G,S}(e) \Rightarrow d_T(f(g),e')\le C\cdot d_S(g,e)+C \le C\cdot r + C$$

czyli $f(B_r^{G,S}(e))\subset B^{H,T}_{Cr+C}(e')$

Znajdźmy teraz oszacowanie górne (uniwersalne) na moc przeciwobrazów punktów przez quasi-izometrię f:

jeśli $f(g)=f(g')$ to mamy

$$d_S(g,g')\le C\left[d_T(f(g),f(g'))+C\right]=C^2$$

[z lewej nierówności powyżej w 3. linijce]

Ponieważ kule o ustalonym promieniu są równoliczne w grafach Cayleya, mamy oszacowanie

$$|f^{-1}(h)|\le |B^{G,S}_{C^2}(e)| \quad \forall h\in H$$

stała niezależna od r

Stąd dostajemy:

$$|B_r^{GS}(e)|\le |B^{HT}_{Cr+C}(e')|\cdot|B^{GS}_{C^2}(e)|$$

czyli $\beta_{GS}(r)\le |B^{GS}_{C^2}(e)|\cdot\beta_{HT}(Cr+C)$

a więc $\beta_{GS}\prec\beta_{HT}$. □

WNIOSKI I PRZYKŁADY.

- $\mathbb{Z}^n \overset{q.i.}{\approx} \mathbb{Z}^m \iff n=m$

  (bo $\beta_{\mathbb{Z}^n} \sim t^n \not\sim t^m \sim \beta_{\mathbb{Z}^m}$ dla $n \neq m$)

- $F \overset{q.i.}{\not\approx} \mathbb{Z}^m$ bo $\beta_F \sim e^t \not\sim t^m \sim \beta_{\mathbb{Z}^m}$

- dla sk. gen podgrup $H<G$ mamy $\beta_H \prec \beta_G$

  WN. Każda grupa zawierająca podgrupę wolną (nieabelową) ma wzrost eksponencjalny.

- grupa Heisenberga $H = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

  ma $\beta_H \sim t^4$ oraz $\operatorname{asdim}(H) = 3$

  więc nie jest q.i. ani z $\mathbb{Z}^3$ ani z $\mathbb{Z}^4$.

  Możemy też wywnioskować, że H nie zawiera wolnej podgrupy (bo nie ma wzrostu eksponencjalnego).

GRUPY O WZROŚCIE WIELOMIANOWYM – W8

– raport z ich dość kompletnego zbadania.

PRZYKŁADY (grupy nilpotentne)

Dla grupy G indukcyjnie określamy $C_n(G)$ przez
$C_0(G) = G$, $C_{n+1}(G) = [G, C_n(G)]$ (tzw. dolny ciąg centralny).

Grupa jest <u>nilpotentna</u> gdy $C_n(G) = 0$ dla pewnego n.

Zachodzi $C_{j+1}(G) \triangleleft C_j(G)$ oraz $C_j(G)/C_{j+1}(G)$ jest abelowa.
Ponadto, gdy G sk. gen. to wszystkie $C_j(G)$ i ilorazy $C_j(G)/C_{j+1}(G)$ są też sk. gen.

<u>Wymiar jednorodny $d(G)$ grupy nilpotentnej G</u>

- sk. gen. grupa abelowa A ma jednoznaczny rozkład (z dokł. do izomorf.) jako $A = \mathbb{Z}^m \oplus B$, B – skończona.
  Definiujemy wtedy $\mathrm{rk}(A) = m$.
- $d(G) := \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\, \mathrm{rk}\left[C_j(G)/C_{j+1}(G)\right]$ – suma skończona

FAKT. Dla dowolnej sk. gen. grupy nilpotentnej G zachodzi $\beta_G \sim t^{d(G)}$
(wzrost G jest wielomianowy stopnia $d(G)$).

PRZYKŁAD. Dla grupy Heisenberga $H = \mathbb{Z} \ltimes_A \mathbb{Z}^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, która jest nilpotentna, mamy

$C_1(H) \cong \mathbb{Z}$, $C_0(H)/C_1(H) = H/C_1(H) \cong \mathbb{Z}^2$,
$C_2(H) = 0$, $C_1(H)/C_2(H) = \mathbb{Z}$
$d(H) = \mathrm{rk}(\mathbb{Z}^2) + 2 \cdot \mathrm{rk}(\mathbb{Z}) = 2 + 2 \cdot 1 = 4.$

Def. Sk. gen grupa G jest wirtualnie nilpotentna jeśli zawiera skończonego indeksu podgrupę nilpotentną. $\boxed{W9}$

TWIERDZENIE (Gromov)
Skończenie generowana grupa G ma wzrost wielomianowy $\iff$ G jest wirtualnie nilpotentna.

WNIOSKI.
① Wśród grup o wzroście wielomianowym nie ma innych typów wzrostu niż $t^m : m \geqslant 1$

② NOWY DOWÓD, że grupa G q.i. z $\mathbb{Z}$ jest wirtualnie $\mathbb{Z}$:

ta grupa ma wzrost jak $\mathbb{Z}$, więc wielomianowy, więc jest wirtualnie nilpotentna (tw. Gromova)
Niech $G_0 < G$ nilpotentna sk. indeksu.
Ponieważ $\beta_{G_0} \sim t^1$, więc $d(G_0) = 1$.
Stąd trzeba jakoś wywnioskować, że G_0 jest wirtualnie $\mathbb{Z}$, więc G również jest wirtualnie $\mathbb{Z}$. □

②' Podobnie można uzasadnić, że grupa G q.i. z $\mathbb{Z}^m$ jest wirtualnie $\mathbb{Z}^m$
(czyli że grupy $\mathbb{Z}^m$ są q.i.-sztywne).

W10

ZWIĄZEK ZE WZROSTEM OBJĘTOŚCI:

Def. M – zupełna rozmaitość z metryką Riemanna g, z indukowaną metryką d_g, oraz z miarą objętości Vol_g

Funkcja wzrostu objętości (volume growth) na rozmaitości M [względem punktu bazowego $p \in M$] to funkcja $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ zadana przez $r \xmapsto{\beta_g^{M,p}} Vol_g(B_r(p))$, gdzie $B_r(p)$ to kula względem metryki d_g.

LEMAT MILNORA-ŠVARCA (współczesne sformułowanie):
Niech M będzie zamkniętą, spójną rozmaitością z metryką Riemannowską g, niech $\tilde{M}$ będzie nakryciem uniwersalnym M z indukowaną (podniesioną) metryką Riemannowską $\tilde{g}$. Wówczas dowolna funkcja wzrostu objętości $\beta_{\tilde{g}}^{\tilde{M},p}$ na $\tilde{M}$ jest quasi-równoważna z funkcją wzrostu $\beta_{\pi_1 M}$ grupy podstawowej.

W11

Dowód:

Grupa podstawowa $\pi_1 M$ zamkniętej rozmaitości M jest skończenie generowalna, i działa geometrycznie (przez izometrie, właściwie i kozwarcie) za pomocą deck-transformacji na nakryciu $(\tilde{M}, d_{\tilde{g}})$.

Ustalmy układ $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ generatorów dla $\pi_1 M$.

Niech $p \in M$ – dowolny.

Przypomnijmy, że

$$\operatorname{injrad}(M,g) = \frac{1}{2} \inf \left\{ |\gamma|_g : \begin{array}{l} \gamma \text{ jest gładką homotopijnie} \\ \text{nietrywialną pętlą w } M \end{array} \right\}$$

jest zawsze liczbą dodatnią.

Niech $0 < \varepsilon < \operatorname{injrad}(M,g)$.

Wówczas kule $B_\varepsilon(g \cdot p) : g \in \pi_1 M$

(wokół punktów z orbity p względem $\pi_1 M \curvearrowright \tilde{M}$)

są parami rozłączne.

Niech $D = \max\{ d_{\tilde{g}}(p, s \cdot p) : s \in S\}$

Wówczas $\forall g \in \pi_1 M \quad d_{\tilde{g}}(p, g \cdot p) \leq D \cdot |g|_S$ [ćw.]

Oznacza to, że dla dowolnego $m \geq 0$ kula $B_{D \cdot m}(p)$ zawiera wszystkie punkty $g p : |g|_S \leq m$

Z kolei kula $B_{Dm+\varepsilon}(p)$ zawiera wszystkie te punkty wraz z otaczającymi je kulami $B_\varepsilon(g \cdot p)$.

$\boxed{W12}$

Objętości wszystkich kul $B_\varepsilon(gp)$ są jednakowe, bo $\pi_1 M \curvearrowright \tilde{M}$ przez izometrie, i zachodzi

$$B_\varepsilon(g\cdot p) = g\cdot B_\varepsilon(p).$$

Mamy zatem

$$\mathrm{Vol}_{\tilde{g}}\left[B_{D\cdot m+\varepsilon}(p)\right] \geq$$

$$\geq \beta_{\pi_1 M, S}(m)\cdot \mathrm{Vol}\left[B_\varepsilon(p)\right]$$

STAŁA

Stąd $$\beta^{\pi_1 M, S}(m) \leq \frac{1}{\mathrm{Vol}\left[B_\varepsilon(p)\right]}\cdot \mathrm{Vol}\left[B_{Dm+r}(p)\right]$$

To oznacza, że funkcja wzrostu objętości w $\tilde{M}$ quasi-dominuje nad funkcją wzrostu $\beta^{\pi_1 M, S}$.

Dla dowodu odwrotnej quasi-dominacji, przypomnijmy że działanie $\pi_1 M \curvearrowright \tilde{M}$ jest kozwarte.

Niech $D>0$ będzie takie, że

$$\bigcup_{g\in\pi_1 M} g\cdot B_D(p) = \tilde{M} \quad \left[= \bigcup_{g\in\pi_1 M} B_D(g\cdot p)\right]$$

Dla dowolnego $r>0$ kula $B_r(p)$ zawiera się wtedy w sumie tych kul $B_D(g\cdot p)$ dla których $d(p, gp) \leq r+D$

$$B_r(p) \subset \bigcup\left\{B_D(g\cdot p) : d(p, g\cdot p) \leq r+D\right\}$$

Z poprzedniej wersji lematu Milnora-Švarca $\boxed{W13}$

wiemy, że odwzorowanie

$$\pi_1 M \ni g \longmapsto g\cdot p \in (\tilde{M}, d_{\tilde{g}})$$

jest quasi-izometrią. Niech (L, C) będą stałymi

takimi, że $$d(p, g p) \geq \frac{1}{C}|g|_S - L$$

Wtedy zbiór $\{g \in \pi_1 M : d(p, gp) \leq r + D\}$

zawiera się w zbiorze

$$\{g \in \pi_1 M : |g|_S \leq C\cdot(r + D + L)$$

Mamy więc:

$$Vol[B_r(p)] \leq \beta_{\pi_1 M, S}\big(C\cdot r + C(D+L)\big)\cdot Vol[B_D(p)]$$

a więc funkcja wzrostu objętości jest quasi-zdominowana przez funkcję wzrostu $\beta^{\pi_1 M, S}$ grupy $\pi_1 M$. □

UWAGA.
Milnor [w roku 1968] wiedział, że funkcje wzrostu objętości w rozmaitościach $\tilde{M}$ o ujemnej krzywiźnie są wykładnicze, zaś w rozmaitościach o krzywiźnie nieujemnej są quasi-zdominowane przez wielomian stopnia $\dim(M)$.
Jego wynik kładł nacisk na własności wzrostu grup podstawowych $\pi_1 M$ – Milnor traktował to jako analogony wcześniej znanego faktu, że grupy podstawowe rozmaitości o dodatniej krzywiźnie są skończone.