EO

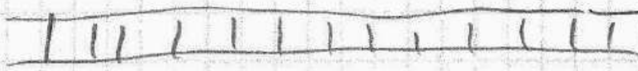
Końce grup (w nieskończoności)

Chcemy sformalizować intuicje dotyczące stwierdzeń:

• $\mathbb{Z}^2$ ma 1 koniec (w ∞)

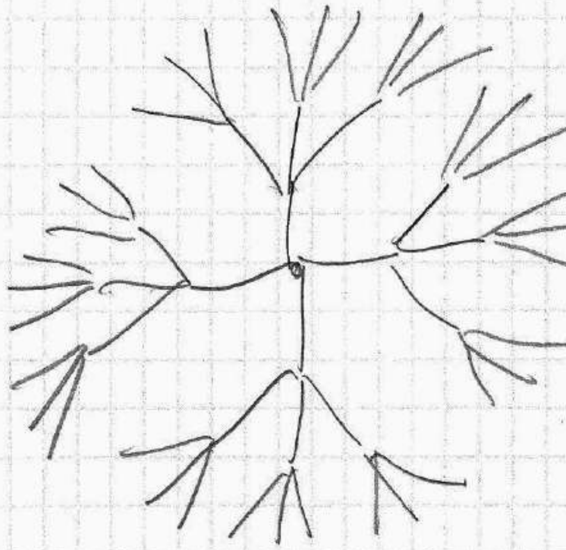
• $\mathbb{Z}$ ma 2 końce (w ∞)

[$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$ ma 2 końce



]

• F_2 ma ∞ wiele końców



• grupy skończone mają 0 końców

Chcemy z liczby końców
(całej przestrzeni końców)
uczynić tzw. niezmiennik asymptotyczny
czyli cechę niezmienniczą na quasi-izometrie
właściwych geodezyjnych p. metrycznych.
(a co za tym idzie –
– sk. gen. grup)

KOŃCE - PODEJŚCIE PRZEZ GRANICE ODWROTNE

DEF. Zbiór z częściowym porządkiem $(\Lambda, \leq)$ jest skierowany gdy $\forall \lambda_1, \lambda_2 \; \exists \lambda : \; \lambda \geq \lambda_1, \lambda \geq \lambda_2$.

DEF. System odwrotny nad zbiorem skierowanym Λ to rodzina zbiorów $\mathcal{X} = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ oraz odwzorowań $f_{\lambda\mu} : X_\mu \to X_\lambda$ dla $\mu \geq \lambda$:

(1) $\forall \lambda \in \Lambda \quad f_{\lambda\lambda} = id_{X_\lambda}$

(2) $\forall \lambda \leq \mu \leq \nu \qquad f_{\lambda\nu} = f_{\lambda\mu} \circ f_{\mu\nu}$.

OZN. $F = \{f_{\lambda\mu} : \lambda \leq \mu\}$.

DEF. Granicą odwrotną systemu $(\Lambda, \mathcal{X}, F)$ j.w. nazywamy zbiór $\varprojlim (\Lambda, \mathcal{X}, F) = \{\xi \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : \; \xi_{\lambda'} = f_{\lambda'\lambda}(\xi_\lambda)$ dla dowolnych $\lambda' \leq \lambda\}$

[elementy ξ j.w. nazywamy nićmi (threads) w systemie odwrotnym $(\Lambda, \mathcal{X}, F)$]

[Ciąg odwrotny to system odwrotny nad zbiorem skierowanym $(\mathbb{N}, \leq)$ liczb naturalnych.
[Zwykle/często mówimy wtedy jedynie o odwzorowaniach $f_{i,i+1} : X_{i+1} \to X_i$.]]

DEF. Odwzorowania graniczne

$f_\lambda : \varprojlim (\Lambda, \mathcal{X}, F) \to X_\lambda$ są zadane jako $f_\lambda(\xi) = \xi_\lambda$, i spełniają

$$\begin{tikzcd} & \varprojlim X \arrow[dl, "f_\lambda"'] \arrow[d, "f_{\lambda'}"] \\ X_\lambda & X_{\lambda'} \arrow[l, "f_{\lambda\lambda'}"] \end{tikzcd}$$

<u>topologia granicy odwrotnej</u>

zaś odwzorowania $f_{\lambda\lambda'}: X_{\lambda'} \to X_\lambda$ są ciągłe,

- gdy zbiory X_λ w systemie odwrotnym $\underline{X} = (\Lambda, \mathcal{X}, \mathcal{F})$ są p. topologicznymi, to na granicy odwrotnej $\varprojlim \underline{X} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ rozważamy topologię dziedziczoną z topologii produktowej na $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, a więc topologię w której bazą są zbiory postaci $f_\lambda^{-1}(U) : \lambda\in\Lambda, U\subset X_\lambda$-otwarty. [ćw]

- gdy przestrzenie X_λ są Hausdorffa, to $\varprojlim \underline{X}$ jest domkniętym podzbiorem w $\prod X_\lambda$ [ćw]

- gdy X_λ są zwarte metryczne, to $\prod X_\lambda$ też, a więc $\varprojlim \underline{X}$ także jest wtedy zwarta metryczna

- w szczególności, gdy X_λ są skończonymi zbiorami (z domyślną topologią dyskretną) to $\varprojlim \underline{X}$ jest zwarte metryczne. Bazę topologii stanowią wtedy zbiory

$$f_\lambda^{-1}(x) : \lambda\in\Lambda, x\in X_\lambda$$

czyli zbiory

$$\{\xi\in \varprojlim X : \xi_\lambda = x\}.$$

PRZYKŁAD. $\Lambda = (\mathbb{N}, \leq)$,
X_k - zb. ciągów 0-1-kowych długości k,
dla $k\leq m$ $f_{km}: X_m \to X_k$
to wzięcie początkowego podciągu długości k.
Wówczas $\varprojlim (\{X_k\}, \{f_{km}\})$ = zbiór Cantora.

ćw. Podać warunek konieczny i dostateczny na system odwrotny zbiorów skończonych, by jego granica była zbiorem Cantora.

X – p. metr. geod. właściwa

- $\mathcal{K}$ – rodzina wszystkich zwartych podzbiorów w X z relacją inkluzji: $K_1 \leq K_2$ gdy $K_1 \subset K_2$.
- dla $K \in \mathcal{K}$, niech π_K^X oznacza zbiór nieograniczonych komponent spójności w dopełnieniu $X \setminus K$
- dla $K \subset K'$, każda nieogr. komponenta C' w $X \setminus K'$ zawiera się w dokładnie jednej nieogr. komponencie C w $X \setminus K$; przyporządkowanie $C' \to C$ definiuje odwzorowanie $f_{KK'}: \pi_{K'}^X \to \pi_K^X$, $f_{KK'}(C') = C$.

FAKT 1. Trójka $\left(\mathcal{K}, \{\pi_K^X\}, \{f_{KK'}\}\right) = \pi^X$ tworzy system odwrotny nad $\mathcal{K}$.

FAKT 2. Dla każdego $K \subset \mathcal{K}$ zbiór π_K^X jest skończony.

Dowód:

- $K \subset B_r(x_0)$; niech $R > r$, kula $B_R(x_0)$ jest zwarta
- każda nieogr. komponenta (C w) $X \setminus K$ przecina niepusto (z geodezyjności X) sferę $S_R(x_0)$, więc $C \cap B_R(x_0)$ jest niepusty

Wtedy rodzina

$$\left\{ C \cap B_R(x_0) : \begin{matrix} C \text{ jest komponentą } X \setminus K \\ \text{[niekoniecznie nieogr.]} \end{matrix} \right\} \cup \{\mathring{B}_R(x_0)\}$$

otw. kula

stanowi otwarte pokrycie $B_R(x_0)$; każde podpokrycie tego pokrycia musi zawierać wszystkie zbiory $C \cap B_R(x_0)$: C nieogr. komp. $X \setminus K$.

[Otwartość wynika z otwartości każdej C w X, bo jako p. geodezyjna X jest lok. spójne, więc $X \setminus K$ też lok. spójny, więc jego komponenty są otwarte]

- Ze zwartości $B_R(x_0)$, istnieje skończone podpokrycie, stąd π_K^X też skończony. $\square$

DEF. Zbiorem (przestrzenią) końców, $\mathrm{Ends}(X)$, właściwej geod. p. metr. X nazywamy granicę odwrotną

$$\mathrm{Ends}(X) := \varprojlim \pi^X = \varprojlim \left(\mathcal{K}, \{\pi_K^X\}, \{f_{KK'}\}\right).$$

Jest to zwarta przestrzeń metryczna.

PRZYKŁADY. • $\mathrm{Ends}(\text{ogr}) = \emptyset$, 0 końców

• $\mathrm{Ends}(\quad) = \{*\} = \mathrm{Ends}(\mathbb{R}^2)$, 1 koniec

• $|\mathrm{Ends}(\quad)| = |\mathrm{Ends}(\mathbb{R})| = 2$

• $\mathrm{Ends}(\text{drzewo } k\text{-reg. } k \geq 3) \cong \text{Cantor}$, ∞-wiele końców

• $\mathrm{Ends}(G_1 * G_2)$ - dla nieskończonych grup sk. gen. jest nieskończona

TWIERDZENIE. Przestrzeń końców (w szczególności liczba końców) jest niezmiennikiem quasi-izometrii geodezyjnych przestrzeni właściwych. Dokładniej, quasi-izometryczne przestrzenie geodezyjne i właściwe mają homeomorficzne przestrzenie końców.

E5

ALTERNATYWNY OPIS PRZESTRZENI KOŃCÓW ZA POMOCĄ PROMIENI

X właściwa p. geod
(takie przestrzenie są lokalnie drogowo spójne, więc ich otwarte podzbiory $U\subset X$ są spójne $\Leftrightarrow$ są drogowo spójne)

- właściwy promień (krótko - promień) w X to dowolne (ciągłe) odwzorowanie $\rho:[0,\infty)\to X$ t.że $\lim_{t\to\infty} d_X(\rho(0),\rho(t))=\infty$
- zbiór wszystkich promieni w X ozn. ρ^X
- promienie ρ_1,ρ_2 mają ten sam koniec w X (są współ-końcowe) jeśli dla dowolnego zwartego $K\subset X$ $\exists R>0$ taki, że $\rho_1([R,\infty))$ oraz $\rho_2([R,\infty))$ leżą w tej samej komponencie dopełnienia $X\setminus K$ (ozn. $\rho_1 \overset{E}{\sim} \rho_2$)
- jest to relacja równoważności w zbiorze ρ^X
- Zbiór klas abstrakcji ρ^X/E w naturalny sposób utożsamia się z $Ends(X)$:
  - niech $\rho\in\rho^X$;
    $\forall K\subset X$ mamy jedyną komponentę $C^\rho_K\in\Pi^X_K$ do której należy $\rho((R,\infty))$ dla dostatecznie dużych R
  - $(C^\rho_K)_{K\in\mathcal{K}}$ jest nicią w systemie odwrotnym Π^X
  - współkońcowe promienie wyznaczają tą samą nić
  - mamy dobrze określone $\beta:\rho^X/E\to Ends(X)$,
    $\beta([\rho])=(C^\rho_K)_{K\in\mathcal{K}}\in Ends(X)$
  - β jest różnowartościowe, bo dla niewspółkońcowych ρ_1,ρ_2 $\exists K\subset X$ takie że $C^{\rho_1}_K\neq C^{\rho_2}_K$ (z def.)

E6

– β jest surjekcją na $Ends(X)$:

* niech $\xi = (\xi_K) \in Ends(X)$, $\xi_K \in \pi_K^X$

* rozważmy wstępujący ciąg kul $B_n = B_n(x_0)$ o całkowitych promieniach

* $\forall n$ wybierzmy punkty $y_n \in \xi_{B_n}$ – niezbyt komponenta w $X \setminus B_n$
oraz $y_0 = x_0$

* określmy promień $\varrho = [y_0 y_1] \cup [y_1 y_2] \cup [y_2 y_3] \cup \ldots$

złożony z geodezyjnych:
$\varrho|_{[n, n+1]}$ to jednostajny przebieg po $[y_n, y_{n+1}]$

* dla tego ϱ mamy $C^{\varrho}_{B_n} = \xi_{B_n}$

* dla dowolnego $K \subset X$ zwartego
z racji że $K \subset B_n$ dla pewnego n, mamy
$C^{\varrho}_K = \xi_K =$ jedyna komponenta w $X \setminus K$
zawierająca komponentę ξ_{B_n} w $X \setminus B_n$

* stąd $\beta([\varrho]) = \xi$ – i mamy surjektywność. $\square$

UWAGA. Na $\mathcal{R}^X/\mathcal{E}$ mamy topologię indukowaną
przez bijekcję β z topologii na $Ends(X)$.
Bazą tej topologii są zbiory postaci
U^K_C gdzie $K \subset X$ zwarty, C nieogr. komp w $X \setminus K$

$$\mathcal{U}^K_C = \{[\varrho] : \varrho([R, \infty)) \subset C \text{ dla pewnego } R\}$$

$\boxed{E7}$

DOWÓD quasi-izometrycznej niezmienniczości $\mathrm{Ends}(X)$

Niech $f: X \to Y$ będzie

(L, C)-quasiizometrią.

ciągłe drogi $r: [a,b] \to X$, lub $r: [0,\infty) \to X$

przerabiamy na ciągłe drogi r_f w Y następująco

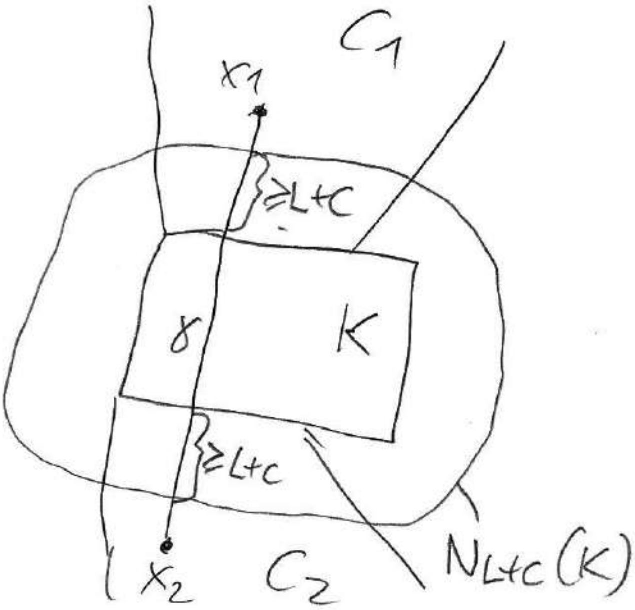
- Niech $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$
  [lub $a = t_0 < t_1 < \dots$] takie, że
  $$d_X(r(t_k), r(t_{k+1})) \leq 1 \quad \forall k$$
- Wtedy ciąg $f(r(t_k))$ jest $(L+C)$-drogą w Y
  $\left(\text{tzn. } d_Y\left(f(r(t_k)), f(r(t_{k+1}))\right) \leq L+C \quad \forall k\right)$
- Łączymy te punkty $f(r(t_k))$ kolejno odcinkami geodezyjnymi w Y
- otrzymujemy ciągłą drogę r_f w Y
  zawierającą się w $(L+C)$-otoczeniu obrazu
  $f(r([a,b]))$ łączącą $f(r(a))$ z $f(r(b))$
- gdy r jest promieniem w X, to r_f jest promieniem w Y, o początku $f(r(0))$, zawierającym się w $(L+C)$-otoczeniu obrazu $f(r([0,\infty)))$

$\boxed{E8}$

TECHNICZNY LEMAT.

Niech $f: X \to Y$ będzie (L, C)-quasi-izometrią. Wówczas $\forall K \subset Y \ \exists K' \subset X$: dla każdej komponenty C' w $X \setminus K'$ „pogrubiony" obraz $N_{L+C}[f(C')]$ zawiera się w pojedynczej komponencie $Y \setminus K$.

- jeśli $C_1 \neq C_2$ są nieogr. komponentami w $Y \setminus K$, to ich przekroje $C_1 \cap [Y \setminus N_{L+C}(K)]$, $C_2 \cap [Y \setminus N_{L+C}(K)]$ są $(2L+2C)$-oddzielone (tzn. dystans w Y pomiędzy tymi przekrojami jest $\geq 2L+2C$)



$\gamma = [x_1, x_2]$ - geodezyjne

- $\exists K' \subset X$ t.że $f(X \setminus K') \subset Y \setminus N_{L+C}(K)$ [ćw]
- gdy C' jest komponentą w $X \setminus K'$ to $f(C) \subset Y \setminus N_{L+C}(K)$
- każde 2 punkty z C' można połączyć ciągłą drogą r w C' więc ich obrazy są połączone drogą r_f zawartą w $N_{L+C}(f(C')) \subset Y \setminus K$
- Stąd $f(C')$ zawiera się w pojedynczej komponencie w $Y \setminus K$. $\square$

E9

WNIOSEK.
Jeśli r, r' są współkońcowymi promieniami w X, to utworzone z nich promienie r_f, r'_f w Y są współkońcowe.

BEZPOŚREDNIO WYNIKA Z TECHNICZNEGO LEMATU I Z TEGO ŻE $im(r_f) \subset N_{L+C}[im(r)]$

Zatem przyporządkowanie
$$\mathcal{E}^X \ni [r] \xmapsto{f_E} [r_f] \in \mathcal{E}^Y$$
jest dobrze określone.

Mamy też podobne przyporządkowanie
$$\mathcal{E}^Y \ni [r] \xmapsto{g_E} [r_g] \in \mathcal{E}^X$$
dla „odwrotnej" quasi-izometrii $g: Y \to X$.

Przy tym, obraz promienia $(r_f)_g$ w X zawiera się w D-otoczeniu obrazu r (dla odpowiedniego D)

Stąd $(r_f)_g \overset{E}{\sim} r$ [ćw.]

A zatem powyższe przyporządkowania $\overbrace{\text{}}^{f_E \text{ i } g_E}$ są bijekcjami.
(są do siebie odwrotne).

$\boxed{E10}$

Odwzorowanie $f_E: \mathcal{S}^X/E \to \mathcal{S}^Y/E$

zadane przez $f_E([r]) = [rf]$ jest ciągłe.

Niech U_K^C będzie bazowym otoczeniem $[rf]$

tzn. $K \subset Y$ zwarty, C - nieogr. kmp $Y \setminus K$

i że $rf([R,\infty)) \subset C$

$\left(U_K^C = \{ [\varrho] \in \mathcal{S}^Y : \varrho([R,\infty)) \subset C \text{ dla pewnego } R>0 \} \right)$

Niech $K' \subset X$ będzie jak w technicznym

lemacie, i niech C' będzie tą nieogr. komponentą

w $X \setminus K'$ dla której $r([R,\infty)) \subset C'$.

Wówczas C jest tą komponentą w $Y \setminus K$ w której zawiera się $N_{L+c}[f(C')]$.

Niech $U_{K'}^{C'}$ będzie bazowym otoczeniem $[r]$ w $\mathcal{S}^X/E$

$\left(U_{K'}^{C'} = \{ [\varrho] \in \mathcal{S}^X : \varrho([R,\infty)) \subset C' \text{ dla pewnego } R>0 \} \right)$

Twierdzę, że $f_E(U_{K'}^{C'}) \subset U_K^C$

Jeśli $[\varrho] \in U_{K'}^{C'}$ $[\varrho([R,\infty)) \subset C']$ to

$(\varrho|_{[R,\infty)})f$ ma obraz w pojedynczej komponencie $Y \setminus K$

i jest to ta sama komponenta w której zawiera się

$N_{L+c}(f(C'))$, czyli C. Zatem $f_E([\varrho]) \in U_K^C$. $\square$

$\boxed{E11}$

TW. [Freudenthal 1931, Hopf 1943]

Skończenie generowane grupa ma 0, 1, 2 lub ∞ końców. Gdy $|Ends(G)| = \infty$, to $Ends(G)$ jest przestrzenią bez punktów izolowanych – w szczególności mocy continuum [Hopf]; W istocie, $Ends(G)$ jest wtedy zbiorem Cantora.

Dowód: wiemy, że $Ends(G) = 0, 1, 2$ jest możliwe. Zał zatem, że $|Ends(G)| \geq 3$.

Oznacza to, że dla $X = Cay(G, S)$, $\exists_{\text{zwarty}} K \subset X$ t. że π^X_K ma ≥ 3 elementy ($X \setminus K$ ma ≥ 3 nieogr. komponenty spójności).

Pokażemy, że dla dowolnego zwartego $L \subset X$ i dla dowolnej $C \in \pi^X_L$, istnieje $L' \subset X$, $L' \supset L$ oraz $C_1' \neq C_2' \in \pi^X_{L'}$ t. że $C_1', C_2' \subset C$ ($f_{LL'}(C_i') = C$ w π^X).

To, że z tego wynika, że $|Ends(G)| = \infty$ oraz że $Ends(G) \cong$ Cantor zostawiam jako ćwiczenia.

Ustalmy $L \subset X$, oraz nieogr. komp. C w $X \setminus L$.

Niech $M \subset X$ będzie zbiorem z def. właściwości działania $G \curvearrowright X$, tzn. t. że $\bigcup_{g \in G} g \cdot M = X$, i bez straty ogólności zał. że $K \subset M$, a co za tym idzie $|\pi^X_M| \geq 3$.

E12

Z nieograniczoności C nietrudno zauważyć, że

$\exists g \in G$ t.że

- $g \cdot L \subset C$
- K zawiera się w pojedynczej komponencie $X \setminus g \cdot L$, a więc nie zawiera się w przynajmniej 2 innych nieograniczonych komponentach $X \setminus g \cdot L$, C_1' i C_2'.

(mamy wtedy $C_1, C_2 \subset C$)

Dla $L' = g \cdot L \cup K$,

C_1' i C_2' są nieogr. komp. w $X \setminus L'$ jak zapowiedziano wyżej. $\square$

$\boxed{E13}$

DALSZE USTALENIA:

(1) [Wall 1967] Grupa ma 2 końce $\Leftrightarrow$ wirtualnie $\mathbb{Z}$.

(2) [Stallings 1968 beztorsyjne, 1971 ogólne] $|Ends(G)| = \infty$

$\Rightarrow$ G rozkłada się w sposób nietrywialny (i nie 2-końcowy) nad skończoną podgrupą H

tzn. $G = G_1 *_H G_2$, $(G_i : H) \geq 3$ dla przynajmniej jednego i

lub $G = *_H G_0$ (HNN-rozszerzenie) i $(G_0 : \varphi_i(H)) \geq 2$ dla przynajmniej jednego i

$\boxed{\text{jest też wersja dla } \boxed{|Ends(G)| = 2}}$

(2+) [Dunwoody 1985, accessibility dla sk. prezentowalnych G]: iterowany proces rozkładów nad skończonymi podgrupami kończy się (końcowe faktory mają ≤ 1 końców, i są w pewnym sensie jednoznaczne).

Dla sk. gen. ogólnie nie jest to prawda.

Powyższe pokazuje, że jeśli skończone grupy są nieciekawe to najciekawsze są grupy z 1 końcem – „1-ended".