E14

Tw. Każda grupa o 2 końcach zawiera skończonego indeksu podgrupę cykliczną ($\cong \mathbb{Z}$).

UWAGI. (1) Przeciwna implikacja wynika z quasi-izometryczności grup współmiernych (grupy i sk. indeksu podgrupy), oraz z q.i.-niezmienniczości liczby końców.

(2) WNIOSEK [quasi-izometryczna sztywność $\mathbb{Z}$]
Każda grupa q.i. z $\mathbb{Z}$ zawiera $\mathbb{Z}$ jako podgrupę sk. indeksu.

UWAGI I FAKTY PRZYGOTOWAWCZE.

(A) Sk. gen grupa G indukuje w naturalny sposób działanie przez permutacje na zbiorze swoich końców homomorfizm $h^E: G \to Sym(Ends(G))$.
Jest on zadany na jeden z dwóch sposobów

(I) izometria $\varphi: X \to X$ wyznacza automorfizm $\varphi^{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ przez $\varphi^{\mathcal{K}}(K) = \varphi(K)$, zaś dla każdego $K \in \mathcal{K}$ bijekcję $\varphi_K: \pi_K^X \to \pi_{\varphi(K)}^X$ zadaną przez $\varphi_K(C) = \varphi(C)$. To razem daje automorfizm $\varphi^X: \pi^X \to \pi^X$, który indukuje homeomorfizm granic odwrotnych (w szczególności, bijekcję).

(II) izometria $\varphi: X \to X$ zadaje $h_\varphi^E: End(X) \to End(X)$ przez $h_\varphi^E([\rho]) = [\ \varphi \circ \rho]$ (ρ-promień w X).

(B) FAKT. $\Gamma \curvearrowright X$ właściwie, kozwarcie (X - właściwa, geodezyjna), $H < \Gamma$.
Wówczas $(\Gamma : H) < \infty \iff H \curvearrowright X$ kozwarcie.

E15

<u>D-d</u>: Jeśli $(\Gamma : H) < \infty$ i $Hg_1 \cup \dots \cup Hg_m = \Gamma$,

i jeśli $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \cdot K = X$, to $\bigcup_{h \in H} h(\underbrace{g_1 K \cup \dots \cup g_m K}_{\text{zwarty}}) = X$

stąd kozwartość działania H (implikacja $\Rightarrow$).

Dla dowodu $\Leftarrow$, niech $L \subset X$ zwarty t.że $\bigcup_{h \in H} h \cdot L = X$.

Z właściwości $\Gamma \curvearrowright X$, $\{\gamma \in \Gamma : \gamma L \cap L \neq \emptyset\}$ - skończony

$$\{\gamma \in \Gamma : \gamma L \cap L \neq \emptyset\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$$

Twierdzę, że wtedy $H\gamma_1 \cup \dots \cup H\gamma_m = \Gamma$.

Istotnie, niech $\gamma \in \Gamma$. Wtedy $\exists h \in H$ t.że $h \cdot L \cap \gamma \cdot L \neq \emptyset$ (bo $\bigcup_{h \in H} h \cdot L = X$).

Wtedy $L \cap h^{-1}\gamma L \neq \emptyset$, $h^{-1}\gamma = \gamma_j$, $\gamma = h\gamma_j \in H\gamma_j$ dla pewnego $1 \leq j \leq m$. $\square$

E16

(C) Dla właściwej geodezyjnej przestrzeni X i dla danego zwartego $K \subset X$, liczba komponent (ograniczonych i nieograniczonych) w $X \setminus K$ jest skończona i każda z tych komponent jest otwarta w X.

Stąd, każdy $K \subset X$ możemy uzupełnić o ograniczone komponenty $X \setminus K$, otrzymując K_+ że komponenty $X \setminus K_+$ to dokładnie nieogr. komponenty $X \setminus K$ (przy tym K' okazuje się zwarty, bo ograniczony i domknięty, a we właściwych przestrzeniach to oznacza zwartość).

B.S.O możemy myśleć że $X \setminus K$ to skończona suma nieograniczonych komponent tego dopełnienia (i wszystkie są otwarte w X).

(D) Dla X j.w, $K \subset X$ zwartego. Każda komponenta E w $X \setminus K$ (ograniczona czy nie) zawiera punkty dowolnie bliskie K.

[bo np. pierwszy punkt na geodezyjnej łączącej punkt z E z punktem z K nienależący do E musi należeć do K]

$\boxed{E17}$

D-d twierdzenia (o grupach 2-końcowych):

Niech Γ będzie dowolną grupą o 2 końcach. Rozważmy homomorfizm $h^E : \Gamma \to Sym(Ends(G)) = \mathbb{Z}_2$ i jego jądro $\Gamma_0 = \ker(h^E) < \Gamma$ - podgrupa indeksu ≤ 2.

Γ_0, jako podgrupa skończonego indeksu, w dalszym ciągu działa kozwarcie na X, oraz zachowuje wszystkie końce.

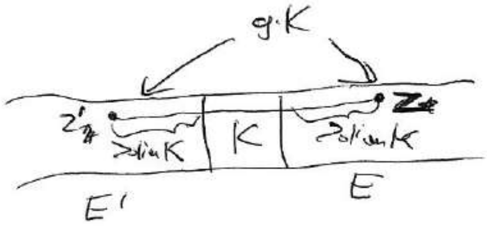
E18

Szukamy generatora $g\in\Gamma_0$ dla cyklicznej podgrupy $\langle g\rangle$ skończonego indeksu w Γ_0.

Ustalmy K t.że $X\setminus K = E\cup E'$ - nieogr. komp. spójności oraz $\bigcup_{\gamma\in\Gamma_0}\gamma\cdot K = X$.

Niech $z\in E$ t.że $d_X(z,K) > 2\,\mathrm{diam}\, K$

- Niech $g\in\Gamma_0$ t.że $z\in g\cdot K$; ponieważ $\mathrm{diam}(gK)=\mathrm{diam}\, K$, mamy wtedy $d_X(K,gK) > \mathrm{diam}\, K$ a stąd $gK\subset E$ (bo inaczej

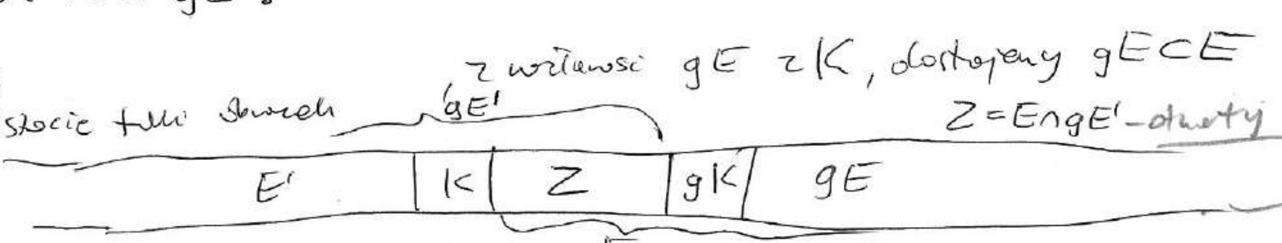


sprzeczność z $\mathrm{diam}(gK)=\mathrm{diam}\, K$)

- Ponieważ $E'\cap gK=\emptyset$, E' zawiera się w dokł. jednej komponencie $X\setminus gK$; te komponenty to gE oraz gE', a z zachowania końców przez $g\in\Gamma_0$, ta komponenta musi być gE'; zatem $E'\subset gE'$.

- Ponownie, z tego że $d_X(K,gK)>\mathrm{diam}\, K=\mathrm{diam}(gK)$ wynika, że K zawiera się w pojedynczej komponencie $X\setminus gK$.
  Gdyby K zahaczało o gE, to E' też by zahaczało o gE (bo w E' są punkty dowolnie bliskie K) a to byłoby sprzeczne z tym że $E'\subset gE'$ oraz rozłącznością gE' z gE.
  Zatem $K\subset gE'$.
- Wtedy z rozłączności gE z K, dostajemy $gE\subset E$
  a w istocie taki obrazek

$Z=E\cap gE'$ - otwarty



Pokażemy, że działanie $H:=\langle g\rangle < \Gamma_0 < \Gamma$ na X $\boxed{E19}$

jest kozwarte. (To będzie oznaczać że $(\Gamma : H)<\infty$).

Rozważmy $M = K\cup gK\cup Z = X\setminus E'\setminus gE$.

Jest to zbiór domknięty, jako dopełnienie otwartego.

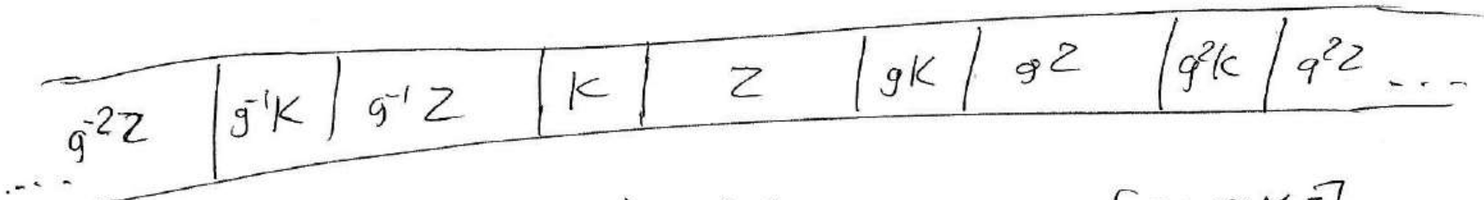
Ponadto, wiemy że istnieje zwarty L taki że

$X\setminus L = U\cup U'$ – nieogr. komponenty oraz

$U\subset gE$, $U'\subset E'$

To znaczy, że $K\cup Z\cup gK\subset L$, więc jest zwarte.

Mając powyższe oznaczenia dostajemy:



Twierdzę, że $\bigcup_{g\in H}(gK\cup gZ) = X$ [POTRZEBNY ARGUMENT!]

Oznaczmy $Y = \bigcup_{g\in H} gK\cup gZ$.

Y jest otwarty w X, bo jest suma przesunięć otwartych zbiorów $Z\cup gK\cup gZ$ (te ostatnie są otwarte, bo Z otwarty, $\mathring{N}_{\partial K}(K)$ otwarty, $Z\cup gK\cup gZ = Z\cup \mathring{N}_{\partial K}(K)\cup gZ$)

Y jest też domknięty w X, bo jest lokalnie skończona suma przesunięć domkniętych $K\cup Z\cup gK$

Ponieważ X spójne, więc $Y=X$.

W takim razie działanie $H=\langle g\rangle \curvearrowright X$ jest kozwarte

Stąd $H<\Gamma$ skończonego indeksu. $\square$