$\boxed{\text{M1}}$

METRYKA SŁÓW I GRAF CAYLEYA

G – grupa, S – układ generatorów

- metryka słów $d_S(g_1, g_2) = \min\{n : g_2 = g_1 s_1 \cdots s_n,\ s_i \in S \cup S^{-1}\}$

- lewoniezmiennicza: $d_S(\gamma g_1, \gamma g_2) = d_S(g_1, g_2)$

  $G \curvearrowright (G, d_S)$ (lewostronnie) przez izometrie

- graf Cayleya $C(G,S)$

  $V = G$, $E = \{(g, gs) : g \in G,\ s \in S\}$

  krawędzie skierowane etykietowane przez odp. $s \in S$

  * Spójny graf

  * $G \curvearrowright C(G,S)$ (lewostronnie) $\quad \gamma \cdot g = \gamma g$

  $\gamma \cdot (g, gs) = (\gamma g, \gamma g s)$

  przez automorfizmy (grafowe)

  * $G = \mathrm{Aut}\ C(G,S)$

  (automorfizmy grafu skierowanego respektujące etykiety) [ćw? nic nie ma w książce zadań]

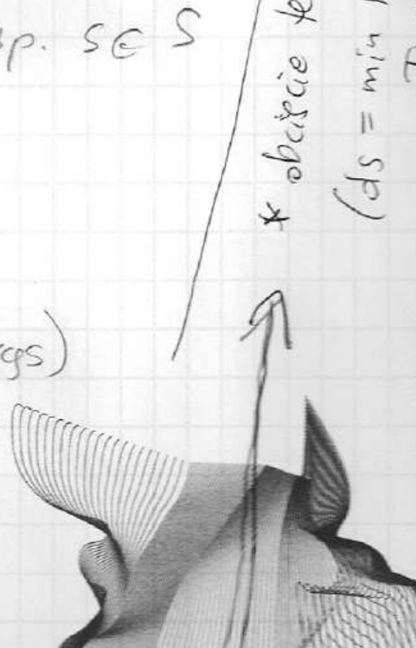
- graf Cayleya jako p. metryczna
  - każdą krawędź $\cong [0,1]$, ~~automorfizmy~~

  * $G \curvearrowright C(G,S)$ przez izometrie

- wariant: $E = \{\{g_1, g_2\} : d_S(g_1, g_2) = 1\}$ – niezorientowane krawędzie

* obcięcie tej metryki do G pokrywa się z d_S
(d_S = min kombinatorycznej długości drogi. Trzeba, wierzchołki w $Cay(G,S)$)

UOGÓLNIENIE: dla surjekcji $\pi : F_S \to G$ (np. gdy $G = \langle S \mid R \rangle$) definiujemy $C(G,S)$ w ogólny sposób • FAJNA UWAGA: metryka d_S ma sens
Ponieważ $\pi|_S$ nie musi być ~~surjekcją~~ injekcją, może więc więcej ponadto o wielokrotnych krawędzi. AHA – dalej!



M2

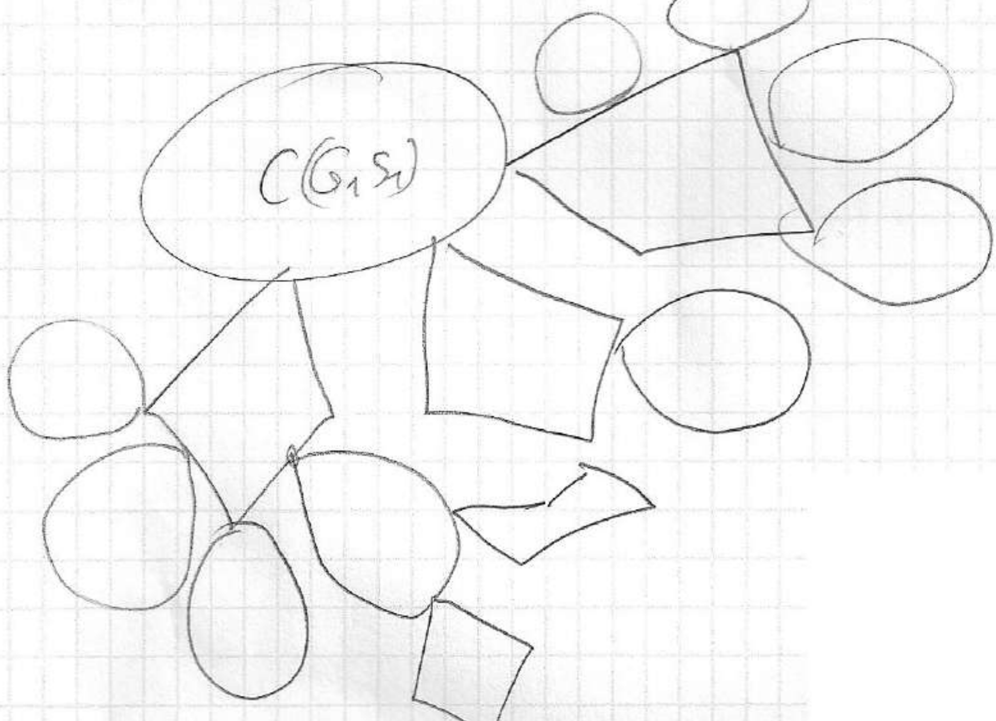
WAŻNE PRZYKŁADY

- graf Cayleya ~~grupy~~ wolnej $C(F_S, S)$ jest drzewem stopnia $2|S|$

- graf Cayley produktu jest „produktem" grafów Cayleya [ZDEFINIUJ TEN PRODUKT GRAFÓW]

- dla $(G_1, S_1), (G_2, S_2)$ $C(G_1 * G_2, S_1 \cup S_2)$ jest „sumą drzewiastą" kopii grafów $C(G_1, S_1)$ i $C(G_2, S_2)$

[ZDEFINIUJ TĄ SUMĘ DRZEWIASTĄ, I UDOWODNIJ TEN FAKT]



[ćw! nie ma ne liście żadnej]

Q1

QUASI-IZOMETRIE

(X_i, d_i) – przestrzenie metryczne, $i = 1,2$

- $f: X_1 \to X_2$ jest quasi-izometrycznym zanurzeniem

gdy $\exists\, C \geq 1,\ L \geq 0$ t.że $\forall x, y \in X_1$

$$\frac{1}{C} d_1(x,y) - L \leq d_2\big(f(x), f(y)\big) \leq C \cdot d_1(x,y) + L .$$

- $f: X_1 \to X_2$ jest quasi-izometrią jeśli ponadto $\exists D \geq 0$ t.że obraz $f(X_1)$ jest D-gęsty (jest D-siecią) w X_2 tzn.

$$\forall y \in X_2\ \exists x \in X_1\quad d_2\big(y, f(x)\big) \leq D .$$

B.S.O. będziemy przyjmować $D = L$ i będziemy mówić o (C, L)-quasi-izometriach [gdy to będzie potrzebne].

UWAGI. (1) złożenie quasi-izometrii jest quasi-izometrią [ćw]

(2) Dla q.i. $f: X_1 \to X_2$ istnieje q.i. $g: X_2 \to X_1$ t.że $d(fg(x_2), x_2) \leq D$ oraz $d(gf(x_1), x_1) \leq D$ dla pewnego $D \geq 0$ oraz $\forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2$. [ćw]

(X_1, d_1) jest q.i. z (X_2, d_2), $X_1 \overset{q.i.}{\cong} X_2$, gdy istnieje q.i. $f: X_1 \to X_2$.

Bycie q.i. jest relacją równoważności.

Q2

PRZYKŁADY.

(1) dowolne ogr. p. metr. jest q.i. z punktem (iff)

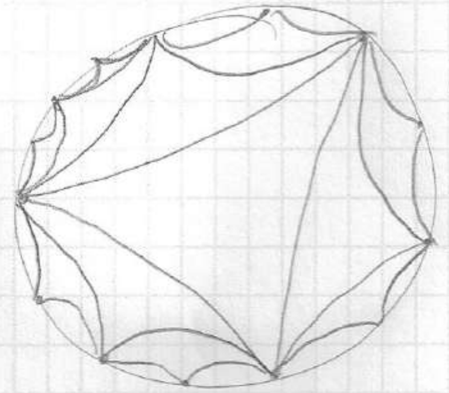
Ogólniej, X jest q.i. ze swoją dowolną D-siecią $Y \subset X$, przez inkluzję.

Np. inkluzja $(G, d_S) \hookrightarrow Cay(G, S)$ jest q.i.

Np $X \times D$, D ogr., jest q.i. z X.

(2) dowolne 2 regularne drzewa T_k stopni $k \geq 3$ są q.i.

(3) drzewo $T_W = T_{S_0}$ jest q.i. z grafem Fareya:



FAKT. Niech G będzie grupą skończenie generowaną i niech S_1, S_2 będą dwoma skończonymi zb. generatorów. Wówczas $id_G : (G, d_{S_1}) \to (G, d_{S_2})$ jest quasi-izometrią.

Dokładniej, id_G jest (C, L)-q.i. dla

$$C = \max\left(\max\{|s_1|_{S_2} : s_1 \in S_1\}, \max\{|s_2|_{S_1} : s_2 \in S_2\}\right)$$

$$L = 0.$$

WNIOSEK. Skończenie generowana grupa G jest dobrze zdefiniowanym obiektem metrycznym z dokładnością do quasi-izometrii.

PROBLEM. Sklasyfikować grupy sk. gen z dokładnością do quasi-izometrii.

„ZASADNICZE TW. GEOM. T.GP" – Q3 Q6
– LEMAT MILNORA – ŠVARCA

DEF. geodezyjna w p. metr. (X,d) łącząca punkty $a,b \in X$ to izometryczne włożenie $\gamma : [0, d(a,b)] \to X$ t.że $\gamma(0) = a$, $\gamma(d(a,b)) = b$

$$[\, d(\gamma(t), \gamma(s)) = |t-s| \,].$$

Na ogół geodezyjna od a do b w p. X może nie istnieć, lub może być wiele różnych takich geodezyjnych.

DEF. P. metr X jest geodezyjna gdy $\forall a,b \in X$ istnieje w X geodezyjna od a do b [niekoniecznie jedyna].

DEF. P. metr. X jest właściwa (proper) jeśli domknięte kule $B_r(x)$ w X, $\forall r < \infty$, są zwarte.

PRZYKŁADY.

(1) Spójna gładka rozm. Riemannowska M jest p. metr. z metryką ϱ (minimizowanie dł. krzywych łączących punkty). Gdy M jest zupełna, to (M, ϱ) jest geodezyjna oraz właściwa.

(2) Graf Cayleya sk. gen. grupy jest p. właściwa i geodezyjna. | graf jest lok. skończony, a kule zawierają sk. wiele wierzchołków

P. właściwa jest oczywiście lok. zwarta, i jest też zupełna. Dla p. geodezyjnych mamy odwrotność: geodezyjna p. ~~zw~~ lok. zwarta i zupełna jest właściwa
[Gro-L-P-81] [ćw?]

$\boxed{Q4}$ $\boxed{Q7}$

LEMAT (Milnor–Švarc)

Niech X będzie właściwą p. geodezyjną, i niech grupa Γ działa na X przez izometrie, w sposób właściwy i kozwarty.
Wówczas grupa Γ jest skończenie generowana i quasi-izometryczna z X. Dokładniej, dla dowolnego $x_0 \in X$ odwzorowanie $\Gamma \to X$ zadane przez $g \mapsto g \cdot x_0$ jest quasi-izometrią.

PRZYPOMNIENIA (na lok. zwartej przestrzeni)

① Działanie $\Gamma \curvearrowright X$ jest właściwe, gdy dla dowolnego zwartego $K \subset X$ zbiór $\{g \in \Gamma : gK \cap K \neq \emptyset\}$ jest skończony. ② Działanie jest kozwarte, gdy istnieje zwarty $K \subset X$ t.że rodzina $\{g \cdot K : g \in \Gamma\}$ pokrywa X.

PRZYKŁADY: $\mathbb{Z}^n \curvearrowright E^n = (\mathbb{R}^n, d_{euklid})$

grupa symetrii reg. parkietażu/wzoru $\curvearrowright E^2$

kozwarte dyskretne podgrupy w grupach Liego $G \curvearrowright G$

w grupach Isom(p. symetr. X) $\curvearrowright X$

np. $\mathbb{H}^2, \mathbb{H}^n$

π_1(sk. kompleks symplicjalny K) $\curvearrowright \widetilde{K}$ – nakrycie uniwersalne K z metryką kawałkami euklidesową (standardową).

Q5 Q8

Dowód:

wybieramy punkt bazowy $x_0 \in X$.

Z kozwartości, istnieje $R < \infty$ t. że dla kuli $B = B_R(x_0)$ mamy że $\{g \cdot B : g \in G\}$ jest pokryciem X.

Rozważmy zbiór $S = \{s \in \Gamma : s \neq 1$ oraz $s \cdot B \cap B \neq \emptyset\}$

Z właściwości działania, S jest skończony. (kula B jest zwarta z właściwości X).

Mamy też $S = S^{-1}$.

Określmy
$r := \inf\{d(B, g \cdot B) : g \in \Gamma \setminus S \setminus \{1\}\}$

liczby dodatnie

CLAIM 1 $r > 0$.

$\forall g \in \Gamma \setminus S \setminus \{1\}$ $d(B, g \cdot B) > 0$.

Gdyby $\inf = 0$, mielibyśmy ciąg parami różnych g_n t. że $d(B, g_n \cdot B) \searrow 0$. Stąd mielibyśmy punkty $z_n \in B$ t. że $d(z_n, g_n B) \searrow 0$. Ciąg z_n miałby pt skupienia z_0 i przechodząc do podciągu $z_{n_k} \to z_0$ mielibyśmy

$d(z_0, g_{n_k} \cdot B) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

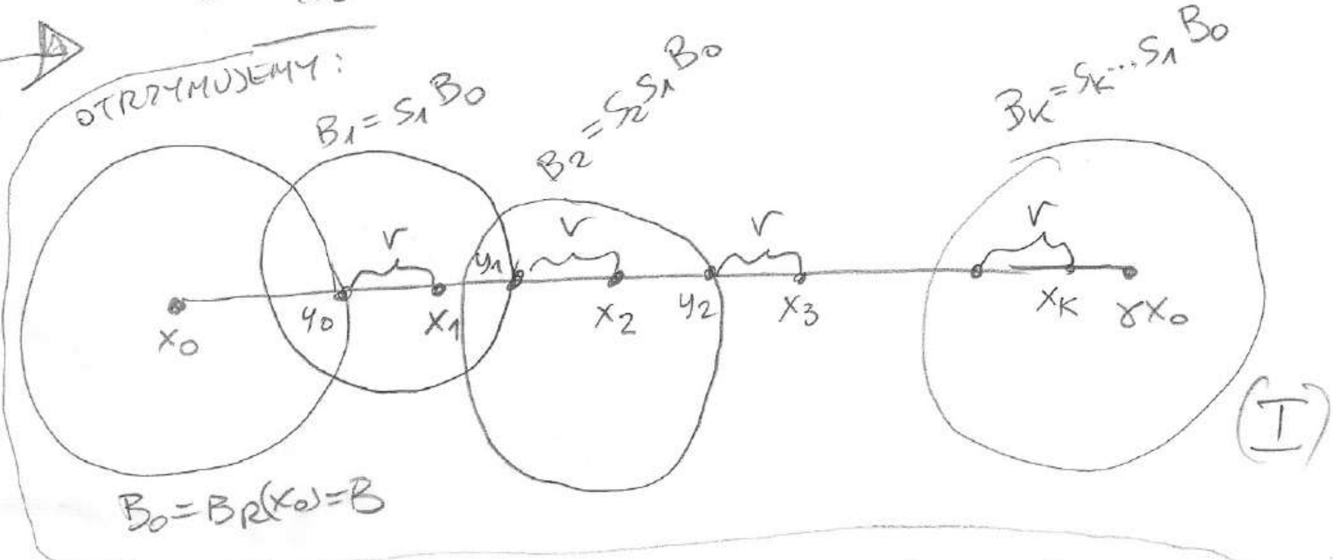
To oznacza, że $B_{2R}(x_0)$ przecięłby niepusto ∞ wiele spośród $g_{n_k} \cdot B_{2R}(x_0)$ – sprzeczność z właściwością.

CLAIM 2 S generuje Γ oraz Q6 Q9

(*) $$\frac{1}{\lambda} d(x_0, \gamma x_0) \le d_S(1,\gamma) \le \frac{1}{r} d(x_0,\gamma x_0) + 1$$

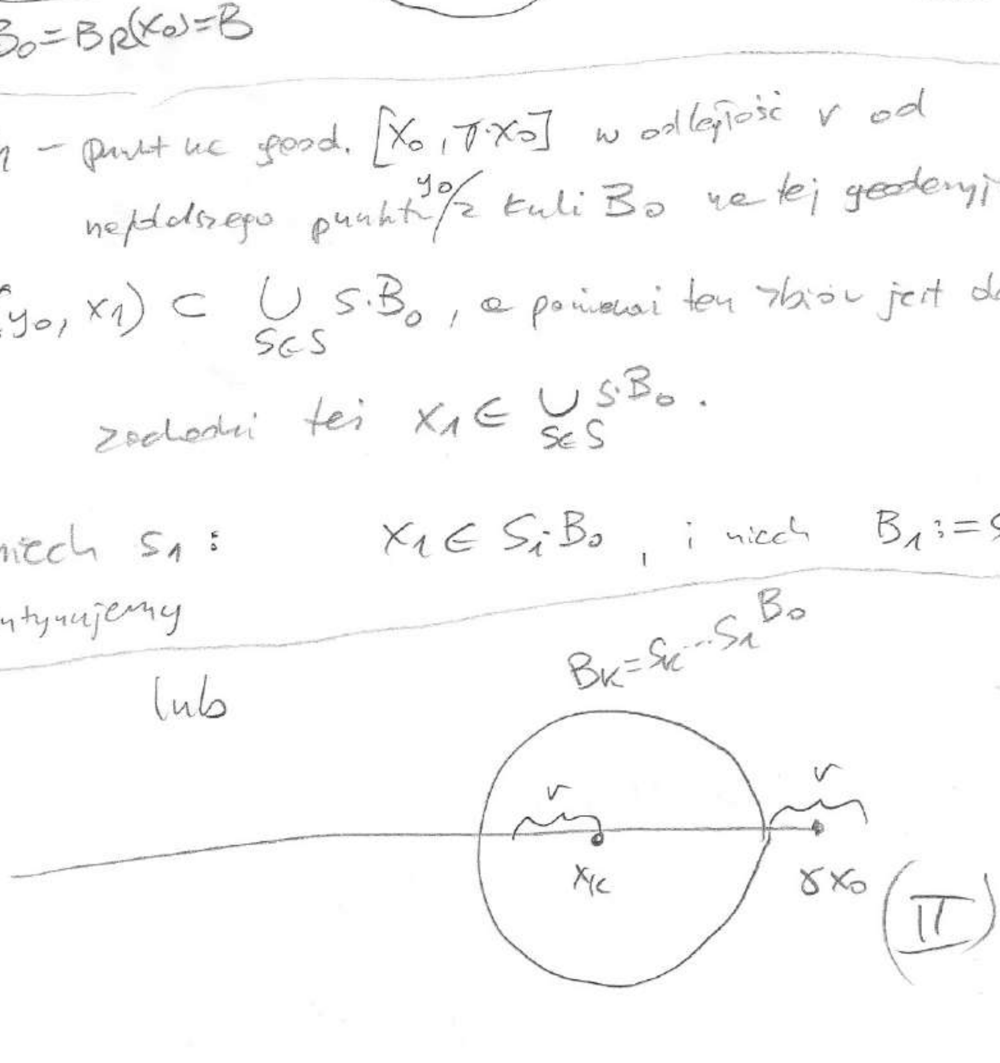
dla $\gamma \in \Gamma$, gdzie $\lambda := \max_{s\in S} d(x_0, s x_0)$.

D-d rozważ dowolne $\gamma\in\Gamma$, oraz geodezyjną od x_0 do $\gamma \cdot x_0$



* x_1 – punkt na geod. $[x_0, \gamma x_0]$ w odległości r od najdalszego punktu y_0 z kuli B_0 na tej geodezyjnej
* $(y_0, x_1) \subset \bigcup_{s\in S} s\cdot B_0$, a ponieważ ten zbiór jest domknięty, zachodzi też $x_1 \in \bigcup_{s\in S} s\cdot B_0$.
* niech s_1: $x_1\in s_1 B_0$, i niech $B_1 := s_1 B_0$
* kontynuujemy

lub



$\boxed{Q7}$ $\boxed{Q10}$

Ad (I).

- $\gamma B_0 \cap S_k \cdots S_1 B_0 \neq \phi$ (γx_0 należy do obu)

- ...

$$S_1^{-1} \cdots S_k^{-1} \gamma B_0 \cap B_0 \neq \phi$$

$$S_1^{-1} \cdots S_k^{-1} \gamma = 1 \Rightarrow \gamma = S_k \cdots S_1, \text{ lub}$$

$$S_1^{-1} \cdots S_k^{-1} \gamma = S_{k+1} \Rightarrow \gamma = S_k \cdots S_1 S_{k+1}$$

Ad (II)

$$d(\gamma x_0, S_k \cdots S_1 B) \leq r$$

$$d(x_0, \gamma^{-1} S_k \cdots S_1 B) < r$$

$$\gamma^{-1} S_k \cdots S_1 = S_{k+1} \Rightarrow \gamma = S_k \cdots S_1 S_{k+1}^{-1}$$

TAK CZY OWAK, S generuje Γ. □

OSZACOWANIA (w obu przypadkach (I) i (II)):

$$d_S(1, \gamma) \leq k+1 \leq \frac{1}{r} d(x_0, \gamma x_0) + 1$$

bo $d(x_0, \gamma x_0) \geq k \cdot r$

DRUGIE OSZACOWANIE:

Jeśli $d_S(1,\gamma) = m$, $\gamma = S_1 \cdots S_m$, to mamy

$$d(S_1 \cdots S_k x_0, S_1 \cdots S_{k-1} x_0) = d(S_k x_0, x_0) \leq \lambda$$

$$d(S_1 \cdots S_{k-1} x_0, S_1 \cdots S_{k-2} x_0) = d(S_{k-1} x_0, x_0) \leq \lambda$$

$$\vdots$$

$$d(S_1 x_0, x_0) \leq \lambda$$

$$d(\gamma x_0, x_0) \leq m \cdot \lambda = d_S(1,\gamma) \cdot \lambda$$

$$\frac{1}{\lambda} d(x_0, \gamma x_0) \leq d_S(1, \gamma) \quad □$$

Q11

Q8

CLAIM 3. Odwzorowanie $f:(\Gamma, d_S) \to (X, d)$, $f(\gamma) = \gamma \cdot x_0$, jest quasi-izometrią.

- Mamy $\frac{1}{\lambda} d(x_0, \gamma x_0) \leq d_S(1, \gamma) \leq \frac{1}{r}(d x_0, \gamma x_0) + 1$

- Z lewoniezmienniczości d_S mamy

$$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = d_S(1, \gamma_1^{-1}\gamma_2)$$

- Z lewoniezmienniczości d mamy

$$d(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = d(\gamma_1 x_0, \gamma_2 x_0) = d(x_0, \gamma_1^{-1}\gamma_2 x_0)$$

- Otrzymujemy $(\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma)$

$$\frac{1}{\lambda} d(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq \frac{1}{r} d(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) + 1$$

czyli

$$r \cdot d_S(\gamma_1, \gamma_2) - r \leq d(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) \leq \lambda \cdot d_S(\gamma_1, \gamma_2)$$

Zatem f jest q.i.-włożeniem

Ponadto, f jest R-gęste

bo $\forall x \in X \quad \exists \gamma \in \Gamma$: $\qquad x \in \gamma B_R(x_0) = B_R(\gamma x_0)$

(kozwartość)

a wtedy $d(x, \gamma x_0) \leq R$

$$\overset{\shortparallel}{d(x, f(\gamma))} \qquad \square$$

$\boxed{Q9}$ $\boxed{Q12}$

KONSEKWENCJE

(1) $H < \underset{\text{sk.gen}}{G}$, $(G:H) < \infty \Rightarrow H$ sk. gen

oraz $i : H \hookrightarrow G$ jest q.i.

[$H \curvearrowright C(G,S)$ właściwie i kozwarcie]

(2) $1 \to K \to \Gamma \to G \to 1$ [$G = \Gamma/K$, $q : \Gamma \to G$ ilorazowe]

G sk. gen, K skończone

$\Rightarrow \Gamma$ sk.gen zaś $q : \Gamma \to G$ jest q.i.

[$\Gamma \curvearrowright C(G,S)$, $\gamma \cdot g := q(\gamma) \cdot g$,

właściwie i kozwarcie]

(3) $\Gamma = \pi_1(M)$ - M zwarta (ogólniej, zwarta spójna) rozmaitość Riemanna

Wówczas $\underset{\substack{\text{geom} \\ \| \\ \text{przez izometrie} \\ \text{właściwie} \\ \text{kozwarcie}}}{\Gamma \curvearrowright} \tilde{M}$ - nakrycie uniwersalne M z metryką indukowaną z podniesionej metryki Riemanna

A zatem $\Gamma \overset{q.i}{\cong} \tilde{M}$.

Np. dla powierzchni Σ_g genusu $g \geq 2$,

$\pi_1(\Sigma_g) \overset{q.i}{\cong} \mathbb{H}^2$ - pł. hiperboliczna

(4) G - spójna grupa Liego, $\Gamma < G$ jednostajna krata (uniform lattice) czyli dyskretna podgrupa t.że $\Gamma \backslash G$ zwarte. Wtedy Γ sk.gen. oraz $i : \Gamma \hookrightarrow G$ jest q.i.

Q10 Q3

OBSERWACJA/ĆWICZENIE. Jeśli $H < G$ jest podgrupą skończonego indeksu w sk. gen. grupie G, to H jest sk. gen., zaś inkluzja jest quasi-izometrią.
(więc H i G są quasi-izometryczne).

DEF. Grupy G_1, G_2 są <u>współmierne</u> (commensurable) gdy posiadają izomorficzne podgrupy skończonego indeksu $H_1 < G_1$, $H_2 < G_2$, $H_1 \cong H_2$.

WNIOSEK. Grupy współmierne są quasi-izometryczne.

PYTANIE: czy quasi-izometryczność nie sprowadza się aby do współmierności?

ODP: czasem tak, ale na ogół nie.

<u>Def.</u> Grupa G jest <u>współmiernościowo</u> <u>sztywna</u> jeśli każda grupa H q.i. z G jest współmierna z G.
(oczywiście, jeśli G współmiernościowo sztywna to każda $H \overset{q.i.}{\cong} G$ też współmiernościowo sztywna
więc mówimy o klasach współmiernościowo sztywnych).

Q11

Q4

PRZYKŁADY KLAS q.i. współmiernościowo-sztywnych.

(1) grupy skończone:

grupa H jest q.i. ze skończoną grupą G iff H jest skończona

(2) grupy wirtualnie $\mathbb{Z}$:

grupa H jest q.i. z $\mathbb{Z}$ iff H jest wirtualnie $\mathbb{Z}$

(zawiera skończonego indeksu podgrupę $\cong \mathbb{Z}$)

(3) grupy wirtualnie $\mathbb{Z}^n$ (trudny dowód – używa Tw. Gromova o wzroście wielomianowym).

(4) grupy wirtualnie wolne (rangi ≥ 1)

(5) grupy powierzchni $\pi_1(S_g)$, $g \geq 1$ (Stallings, Dunwoody)

PRZYKŁADY GRUP q.i. ale niewspółmiernych.

(1) grupy podstawowe $\pi_1(M_1)$, $\pi_1(M_2)$ zamkniętych 3-wymiarowych hiperbolicznych rozmaitości M_1, M_2 o niewspółmiernych objętościach $\mathrm{vol}(M_1)$, $\mathrm{vol}(M_2)$.

~~WIADOMO, ŻE TAKIE ISTNIEJĄ~~

obie są q.i. z H^3 (lemat Milnora–Švarca) więc są q.i. ze sobą

Argument (że niewspółmierne)

- Tw. Mostowa o sztywności [1968]:
Dwie zamknięte hiperboliczne rozmaitości o izomorficznych grupach podstawowych są izometryczne (w szczególności mają równe objętości).
- gdyby $\pi_1(M_1)$, $\pi_1(M_2)$ współmierne, to miałyby wspólną podgrupę H sk. indeksu. Niech $\widetilde{M_1}$, $\widetilde{M_2}$ nakrycia M_1, M_2 odp. podgrupie H, z indukowanymi metrykami hiperbolicznymi. Wtedy $\mathrm{vol}(M_1) = \mathrm{vol}(\widetilde{M_1}) \cdot 1/(\pi_1 M_1 : H)$, $\mathrm{vol}(M_2) = \mathrm{vol}(\widetilde{M_2}) / (\pi_1(M_2) : H)$. Ale $\mathrm{vol}(\widetilde{M_1}) = \mathrm{vol}(\widetilde{M_2})$ (z Tw. Mostowa), bo $\pi_1(\widetilde{M_1}) = H = \pi_1(\widetilde{M_2})$. Stąd $\mathrm{vol}(M_1)$ i $\mathrm{vol}(M_2)$ współmierne. SPRZECZNOŚĆ.

Q12 Q5

(2) Niech $G_A = \mathbb{Z}^2 \rtimes_A \mathbb{Z}$, gdzie $A: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ jest zadane macierzą z $SL_2\mathbb{Z}$.

Gdy A jest hiperboliczne ($|tr(A)| > 2$, A posiada 2 rzeczywiste i odwrotne do siebie wartości własne),

to grupa G_A jest kratą (podgrupa kozwartą, czyli o zwartym ilorazie) w grupie Liego

$$Sol = (\mathbb{R}^3, \cdot) \text{ gdzie}$$

$$(x,y,z)\cdot(a,b,c) = (e^z a + x, e^{-z} b + y, z+c).$$

Każda taka grupa G_A jest q.i. z grupą Sol z dowolną lewoniezmienniczą metryką Riemanna, więc są też q.i. między sobą.

Jednak na ogół grupy G_A nie są ze sobą współmierne.

(1-1 correspondence of commensurability classes with real quadratic number fields generated by the eigenvalues of A)

[W. Neumann, 1996]. □

G_A współmierne z $G_B \iff$

$\exists p,q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}: A^p$ oraz B^q są sprzężone w $GL_2\mathbb{Q}$

$\iff \exists p,q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}: \lambda_A^p = \lambda_B^q$

dla wartości własnych λ_A w A oraz λ_B w B