Zadania do wykładu "Geometryczna teoria grup"
Lista 3: wymiar asymptotyczny

1. Uzasadnij, że wymiar asymptotyczny asdim jest niezmiennikiem zgrubnej równoważności (coarse equivalence) przestrzeni metrycznych.
2. Uzasadnij, że $\mathrm{asdim}(\{n^3 : n \in Z\}) = 0$.
3. Uzasadnij, że dla przestrzeni metrycznych X asymptotycznie spójnych mamy równoważność: $\mathrm{asdim}(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X jest ograniczona. Wywnioskuj stąd, że $\mathrm{asdim}(Z) = 1$, oraz że dla G skończenie generowalnej mamy $\mathrm{asdim}(G) = 0$ iff G jest skończona.
4. Uzasadnij, że $\mathrm{asdim}(X \times Y) \leq \mathrm{asdim}(X) + \mathrm{asdim}(Y) + 1$.
5. Podaj szczegóły argumentu, że $\mathrm{asdim}(Z^n) \leq n$.
6. Uzasadnij, że dla dowolnego nieskończonego drzewa T mamy $\mathrm{asdim}(T) = 1$.
7. Uzasadnij, że dla podprzestrzeni $Y \subset X$ z obciętą metryką zachodzi $\mathrm{asdim}(Y) \leq \mathrm{asdim}(X)$.
8. Uzasadnij, że jeśli H jest skończenie generowalną podgrupą w skończenie generowalnej grupie G, to zanurzenie H w G jest zgrubne (innymi słowy, metryka na H obcięta z metryki słów w G, oraz własna metryka słów w grupie H są zgrubnie równoważne). Wywnioskuj, że zachodzi wtedy $\mathrm{asdim}(H) \leq \mathrm{asdim}(G)$.
9. Uzasadnij, że asymptotyczny wymiar homologiczny asdim_h jest niezmiennikiem quasi-izometrii, a nawet zgrubnej równoważności.
10. (a) Uzasadnij, że w dowolnej przeliczalnie generowalnej (czyli przeliczalnej) grupie G z ważoną metryką słów dowolna kula metryczna jest skończona.
    (b) Uzasadnij, że każde dwie ważone metryki słów na dowolnej grupie przeliczalnie generowalnej G są zgrubnie równoważne, a dokładniej, że identyczność id_G jest zgrubną równoważnością dla tych metryk.
11. Uzasadnij, że dla przeliczalnej (czyli przeliczalnie generowalnej) grupy G z ważoną metryką słów zachodzi: $\mathrm{asdim}(G) = 0$ iff każda skończenie generowalna podgrupa $H < G$ jest skończona (taką własność grupy G nazywa się jej *lokalną skończonością*).
12. Pokaż ogólniej, że dla przeliczalnej grupy G mamy

$$\mathrm{asdim}(G) = \sup\{\mathrm{asdim}(H) : H \text{ jest skończenie generowalną podgrupą w } G\}.$$

    Wywnioskuj, że $\mathrm{asdim}(Q) = 1$, gdzie Q jest addytywną grupą liczb wymiernych.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.