Zadania do wykładu "Geometryczna teoria grup"
Lista 2: quasi-izometrie

0. Uzasadnij, że dla dowolnej quasi-izometrii $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ istnieje quasi-izometria $g : (Y, d_Y) \to (X, d_X)$ taka, że

$$\sup_{x \in X} d_X(gf(x), x) < \infty \quad \text{oraz} \quad \sup_{y \in Y} d_Y(fg(y), y) < \infty.$$

1. Uzasadnij, że quasi-izometryczność jest relacją równoważności.
2. Na przestrzenie wektorowej V iloczyn skalarny ρ wyznacza metrykę d_ρ. Uzasadnij, że dla dowolnych dwóch iloczynów skalarnych ρ, ρ' na skończenie wymiarowej przestrzeni V odwzorowanie id_V jest quasi-izometrią $(V, d_\rho) \to (V, d_{\rho'})$.
3. Na dowolnej grupie Liego G, każde dwie lewoniezmiennicze metryki Riemanna indukują quasi-izometryczne metryki.
4. Niech M będzie zwartą spójną gładką rozmaitością, i niech $\widetilde{M}$ będzie dowolnym spójnym nakryciem M. Dla metryki Riemanna d na M, niech $\tilde{d}$ będzie indukowaną na $\widetilde{M}$ (podniesioną) metryką. Dla dowolnych metryk Riemanna d_1, d_2 na M indukowane metryki $\tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ na $\widetilde{M}$ są quasi-izometryczne (uzasadnij to bezpośrednio, bez powoływania się na lemat Milnora-Švarca).
5. Niech X będzie przestrznią metryczną, i niech Y_1, Y_2 będą jej podprzestrzeniami pozostającymi w skończonej odległości Hausdorffa. Uzasadnij, że przestrzenie Y_1 i Y_2, z obciętymi z X metrykami, są quasi-izometryczne.
6. Wszystkie grupy wolne skończonej rangi ≥ 2 są quasi-izometryczne.
7. Grupy podstawowe wszystkich powierzchni zamkniętych o ujemnej charakterystyce Eulera są quasi-izometryczne.
8. Niech M będzie gładką zamkniętą rozmaitością, i niech $\widetilde{M}$ oznacza jej nakrycie uniwersalne. Uzasadnij, że grupa podstawowa $\pi_1 M$ jest quasi-izometryczna z rozmaitością $\widetilde{M}$ zaopatrzoną w dowolną metrykę indukowaną z metryki Riemanna na M.
9. Uzasadnij, że zerownie się (oraz niezerowanie się) dugości translacyjnej elementu $g \in G$ nie zależy od wyboru skończonego układu generatorów S w skończenie generowalnej grupie G.
10. Uzasadnij, że jeśli G jest skończenie generowalna, to odwzorowanie $Z \to G$ zadane poprzez $n \to g^n$ jest quasi-izometrycznym zanurzeniem wtedy i tylko wtedy gdy długość translacyjna $\tau(g)$ (względem dowolnego skończonego układu generatorów) jest niezerowa. Mówi się, że podgrupa cykliczna $\langle g \rangle$ jest wtedy *niezdystorsowana* (undistorted), lub że *ma trywialną dystorsję*.
11. Dla stałej $C > 0$, *C-drogą* w przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy dowolny skończony ciąg $x_0, x_1, \ldots, x_m$ taki, że dla $1 \leq i \leq m$ mamy $d(x_{i-1}, x_i) \leq C$. Mówimy, że przestrzeń metryczna (X, d) jest *C-spójna*, gdy dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje łącząca je C-droga. Przestrzeń metryczna (X, d) jest *asymptotycznie spójna* jeśli istnieje stała $C > 0$ taka, że X jest C-spójna. Uzasadnij, że asymptotyczna spójność jest niezmiennikiem quasi-izometrii.
12. Mówimy, że X jest *asymptotycznie niespójna w nieskończoności* gdy dla dowolnego $R > 0$ istnieją nieograniczone podprzestrzenie $X_1, X_2 \subset X$ takie, że $d_X(X_1, X_2) > R$

oraz dopełnienie $X \setminus (X_1 \cup X_2)$ jest ograniczone. W przeciwnym wypadku mówimy, że X jest *asymptotycznie spójna w nieskończoności.*

(a) Asymptotyczna niespójność (oraz spójność) w nieskończoności jest niezmiennikiem quasi-izometrii.

(b) Grupa cykliczna Z, grupy wolne F_k, oraz produkty wolne $H * G$ nietrywialnych grup skończenie generowalnych są asymptotycznie niespójne w nieskończoności.

(c) Uzasadnij, że grupy abelowe Z^k, dla $k \geq 2$, są asymptotycznie spójne w nieskończoności. Wywnioskuj stąd, że grupy Z i Z^k (dla dowolnego $k \geq 2$) nie są quasi-izometryczne.

13. (a) Czy zbiory Z i N (liczb cakowitych i naturalnych) z metrykami dziedziczonymi z euklidesowej metryki na osi liczbowej R są quasi-izometryczne?
    (b) Czy zbiory Z i $\{n^3 : n \in Z\}$ z metrykami obciętymi z R są quasi-izometryczne?
14. Uzasadnij, że grupy Z oraz $F_k, k \geq 2$ nie są quasi-izometryczne.
15. Uzadsadnij, że złożenie quasi-izometrycznych włożeń jest quasi-izometrycznym włożeniem, zaś złożenie quasi-izometrii jest quasi-izometrią.
16. Niech $\widetilde{QI}(X)$ będzie zbiorem wszystkich quasi-izometrii $X \to X$ przestrzeni metrycznej X, i niech $QI(X) := \widetilde{QI}(X)/\cong$ będzie zbiorem klas abstrakcji relacji równoważności polegającej na pozostawaniu odwzorowań w skoczonym dystansie względem normy jednostajnej.
    (a) Uzasadnij, że odwzorowanie $QI(X) \times QI(X) \to QI(X)$ określone przez
    $$([f],[g]) \to [f \circ g]$$
    jest dobrze określonym działaniem na $QI(X)$.
    (b) Uzasadnij, że $QI(X)$ z wyżej określonym działaniem jest grupą. Grupę tą nazywamy *grupą quasi-izometrii* przestrzeni X.
17. Niech R będzie euklidesową prostą.
    (a) Uzasadnij, że obraz grupy izometrii $\mathrm{Isom}(R)$ w grupie $QI(R)$ przez naturalny homomorfizm $f \to [f]$ jest podgrupą rzędu 2.
    (b) Uzasadnij, że grupa $QI(R)$ jest nieprzeliczalna. Czy jest ona nieprzemienna?
18. Niech X będzie regularnym nieskończonym drzewem. Uzasadnij, że naturalny homomorfizm $\mathrm{Aut}(X) \to QI(X)$ jest injektywny.
19. Na następnej stronie przedstawiona jest konstrukcja tzw. *grafu Farey'a*, nieskończonego i lokalnie nieskończonego grafu. Uzasadnij, że graf ten jest quasi-izometryczny z drzewem. UWAGA: okrąg w ktry wpisany jest graf, z wyjątkiem wierzchołkw, nie jest częścią tego grafu, zaś w kolejnych etapach konstrukcji wierzchołki gęsto zapełniają ten okrąg (ale jest ich przeliczalnie wiele).