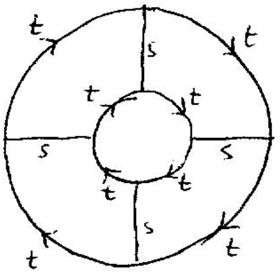
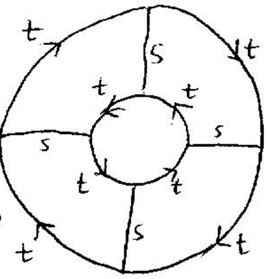
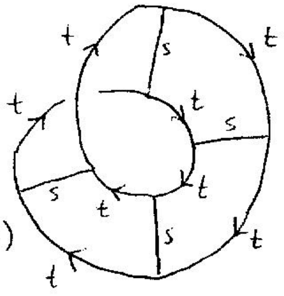
Zadania do wykładu "Geometryczna teoria grup"
Lista 1: metryka słów i graf Cayleya grupy

1. Niech Q będzie tzw. *grupą kwaternionową* złożoną z kwaternionów jednostkowych, $Q = \{\pm 1, \pm i. \pm j, \pm k\}$. Narysuj graf Cayleya $\mathrm{Cay}(Q, \{i, j\})$.
2. Jakim grupom odpowiadają trzy przedstawione poniżej grafy Cayleya? UWAGA: krawędź bez orientacji oraz z etykietą "s" jest skrótowym oznaczeniem dwóch krawędzi zorientowanych przeciwnie i z tą samą etykietą "s".

(1)  (2)  (3) 

3. Dla jakiej grupy G i jakiego zbioru generatorów S następujący graf jest grafem Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ [odpowiedź nie musi być jednoznaczna]:
   (a) pełny graf o 5 wierzchołkach - $K(5)$;
   (b) pełny graf dwudzielny $K(4, 4)$, czyli graf o 4 wierzchołkach "czarnych" i 4 "białych", w którym po jednej krawędzi łączy dowolony wierzchołek czarny z dowolnym białym.
4. Dane są: graf Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ pewnej grupy G, oraz element $g \in G$ wyrażony jako iloczyn generatorw z S i ich odwrotności. Jak rozpoznać na podstawie tego grafu
   (a) czy grupa G jest przemienna;
   (b) jaki jest rząd dowolnego generatora $s \in S$, oraz jaki jest rząd elementu g;
   (c) czy element g należy do centrum $Z(G)$ grupy G;
   (d) czy podgrupa cykliczna generowana przez jeden z genetratorów $s \in S$ jest normalna.
5. Dane są: graf Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ pewnej grupy G, element $g \in G$ wyrażony jako iloczyn generatorów z S i ich odwrotności, oraz pogrupa $H = \langle T \rangle$ generowana przez podzbiór $T \subset S$.
   (a) Uzasadnij, że komponenty grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$ powstałe po usunięciu krawędzi etykietowanych generatorami $t \in S \setminus T$ są izomorficzne (jako grafy etykietowane) z grafem Cayleya $\mathrm{Cay}(H, T)$. Ustal ponadto, że komponenty te odpowiadają warstom podgrupy H w G (lewostronnym czy prawostronnym?).

   Jak poznać za pomocą grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$
   (b) czy podgrupa H jest normalna;
   (c) czy element g należy do normalizatora podgrupy H w G.
6. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania, i przy dodatkowym założeniu, że podgrupa H jest normalna w G, znajdź sposób wyznaczenia grafu Cayleya $\mathrm{Cay}(G/H, S \setminus T)$ grupy ilorazowej G/H względem generatorów ze zbioru $S \setminus T$ rozumianych jako

odpowiednio indukowane elementy w grupie ilorazowej, w terminach samego grafu Cayleya Cay(G, S) (bez konieczności rozumienia w inny sposób czym są grupy G, H).

7. Kiedy graf Cayleya ma (a) krawędzie wielokrotne, (b) krawędzie-pętle?
8. Dla $i = 1, 2$ niech S_i bdzie zbiorem generatorów grupy G_i. Niech $G = G_1 \oplus G_2$, i niech $S = S_1 \cup S_2$ będzie w naturalny sposób zbiorem generatorów w G.
   (a) Uzasadnij, że $d_S((g_1, g_2), (g'_1, g'_2)) = d_{S_1}(g_1, g'_1) + d_{S_2}(g_2, g'_2)$.
   (b) Opisz odpowiednie pojęcie produktu dwóch grafów tak, by graf Cayleya $C(G, S)$ okazał się produktem grafów Cayleya $C(G_i, S_i)$.
   (c) Uogólnij (a) i (b) na przypadek produktu prostego dowolnej rodziny grup.
9. Uzasadnij, że graf Cayleya nieskończonej grupy względem skończonego układu generatorów zawiera izometrycznie włożoną kopię (euklidesowej) prostej.
10. (a) Dla dowolnego $g_0 \in G$ określmy $\phi : G \to G$ poprzez $\phi(g) = gg_0$. Uzasadnij, że odwzorowanie ϕ jest w skończonej odległości jednostajnej od odwzorowania identycznościowego id_G, tzn

$$\sup_{g \in G} d_S(\phi(g), g) < \infty.$$

   (b) Niech $H < G$ będzie podgrupą. Uzasadnij, że każda lewostronna warstwa gH pozostaje w skończonej odległości Hausdorffa (względem dowolnej metryki słów d_S w G) od pewnego sprzężenia podgrupy H w G, i vice versa.
11. Dla $g \in G$, wprowadźmy oznaczenie $|g|_S := d_S(1, g)$, gdzie 1 to element neutralny grupy G.
   (a) Uzasadnij, że dla dowolnego $g \in G$ istnieje skończony kres górny

$$\limsup_{n \to \infty} (|g^n|_S / n).$$

   Ten kres górny, krótko oznaczany przez $\tau(g)$, nazywać będziemy *długością translacyjną* elementu g względem S.
   (b) Uzasadnij, że dla dowolnego $g \in G$ mamy $0 \leq \tau(g) \leq |g|_S$.
   (c) Uzasadnij, że długość translacyjna jest niezmiennicza na sprzężenia, oraz że

$$\tau(g^k) = |k| \cdot \tau(g)$$

   dla $g \in G$ oraz dowolnego całkowitego k.
   (d) Uzasadnij, że $\tau(gg') \leq \tau(g) + \tau(g')$.
   (e) Uzasadnij, że jeśli $\tau(g) > 0$, to istnieją stałe $0 < \lambda \leq \mu$ takie, że dla każdego naturalnego n zachodzi $\lambda \cdot n \leq |g^n|_S \leq \mu \cdot n$.
12. Niech G będzie grupą funkcji liniowych $f : R \to R$ postaci $f(x) = 2^k \cdot x + m \cdot 2^j$, dla całkowitych k, m, j, z działaniem składania.
   (a) Uzasadnij, że zbiór S złożony z funkcji $x \to \frac{1}{2}x$ oraz $x \to x + 1$ generuje grupę G.
   (b) Uzasadnij, że generator $x \to x + 1$, mimo nieskończonego rzędu, ma zerową długość translacyjną względem S.
   (c) Uzasadnij, że generator $x \to \frac{1}{2}x$ ma długość translacyjną 1 względem S.