Zadania do wykładu "Geometryczna teoria grup"
Lista 1+: jeszcze grafy Cayleya

1. Uzasadnij, że grupa G, w swoim działaniu przez automorfizmy na grafie Cayleya $C(G, S)$, pokrywa się z grupą wszystkich automorfizmów grafu $C(G, S)$ respektujących orientacje i etykiety krawędzi.
2. Uzasadnij, że dla grup (G_1, S_1) i (G_2, S_2) graf Cayleya produktu wolnego
$$C(G_1 * G_2, S_1 \cup S_2)$$
jest "sumą drzewiastą" grafów Cayleya $C(G_1, S_1)$ oraz $C(G_2, S_2)$. Zdefiniuj najpierw prezyzyjnie pojęcie sumy drzewiastej dwóch grafów.
3. Dane są grupy G i H z ustalonymi zbiorami generatorów S i T, odpowiednio. Niech Γ będzie produktem półprostym tych grup względem homomorfizmu $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$. Suma $S \cup T$ jest wtedy w naturalny sposb zbiorem generatorów dla Γ. Opisz graf Cayleya $C(\Gamma, S \cup T)$ w terminach grafów $C(G, S)$ i $C(H, T)$ oraz homomorfizmu φ.
4. Grupa H ze zbiorem generatorów T jest podgrupą w grupach G_1 i G_2. Dla $i = 1, 2$, rozważmy zbiór generatorów S_i w G_i zawierający T. Niech $\Gamma = G_1 *_H G_2$. Korzystając z postaci normalnej dla elementów w produkcie wolnym z amalgamacją, podaj wraz z uzasadnieniem opis grafu Cayleya $C(\Gamma, S_1 \cup S_2)$, w terminach grafów Cayleya $C(G_i, S_i)$.
5.
6.
7.
8.
9.