Zadania do wykładu "Geometryczna teoria grup"
Lista 6: wokół δ-hiperboliczności i grup hiperbolicznych

δ-hiperboliczność

1. Uzasadnij, że bukiet $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ dwóch geodezyjnych przestrzeni metrycznych (czyli przestrzeń uzyskana z ich sumy rozłącznej poprzez utożsamienie punktów x_0 i y_0) jest geodezyjną przestrzenią metryczną. Uzasadnij też, że jeśli obie te przestrzenie są δ-hiperboliczne, to bukiet jest także δ-hiperboliczny.
2. Uzasadnij, że brzeg Gromova bukietu dwóch hiperbolicznych geodezyjnych przestrzeni metrycznych (jak w zadaniu 1) jest sumą rozłączną brzegów Gromova tych dwóch przestrzeni.
3. Uogólnij zadania 1 i 2 na przypadek sklejenia dwóch przestrzeni geodezyjnych przez izometrię pomiędzy ich zwartymi podzbiorami.
4. Rozważmy dwie przestrzenie geodezyjne X_1, X_2, oraz obustronnie nieskończone geodezyjne γ_1, γ_2 w tych przestrzeniach (odpowiednio). Rozważmy dowolną sumę

$$Y = X_1 \cup_{\gamma_1 = \gamma_2} X_2$$

uzyskaną przez sklejenie tych przestrzeni wzdłóż tych geodezyjnych (dokładniej, ustalmy dowolną izometrię $\varphi : \gamma_1 \to \gamma_2$ i rozważmy sklejenie $Y = X_1 \cup_\varphi X_2$).
(1) Uzasadnij, że Y jest w naturalny sposób przestrzenią geodezyjną.
(2) Uzasadnij, że jeśli X_1, X_2 są hiperboliczne (w sensie Gromova), to Y jest także hiperboliczna. [W przypadku trudności z przypadkiem ogólnym, rozważ prostszy przypadek gdy X_1 i X_2 są grafami.]
(3) Uzasadnij, że jeśli oznaczymy przez $\partial\gamma$ zbiór dwóch punktów w brzegu Gromova ∂Y wyznaczonych przez promienie zawarte w geodezyjnej $\gamma := \gamma_1 = \gamma_2$, to

$$\partial Y = \partial X_1 \cup_{\partial\Gamma_1 = \partial\gamma_2} \partial X_2$$

(w szczególności, jeśli ∂X_1 i ∂X_2 nie są dwupunktowe, to $\partial\gamma$ rozspaja ∂Y).

gęsty amalgamat

5. Uzasadnij, że gęsty amalgamat dowolnej skończonej rodziny przestrzeni jednopunktowych jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora. [Skorzystaj z charakteryzacji zbioru Cantora jako jedynej zwartej przestrzeni metryzowalnej całkowicie nispójnej i nie mającej punktów izolowanych.]
6. Uzasadnij, że dowolna komponenta spójności C w gęstym amalgamacie $\widetilde{\sqcup}(X_1, \ldots, X_k)$ albo zawiera się w jednej z kopii jednej z przestrzni X_i (i wtedy pokrywa się z komponentą spójności tej kopii), albo jest jednopunktowa.
7. Uzasadnij, że jeśli przestrzenie X_1, X_2 są homeomorficzne, to gęste amalgamaty

$$\widetilde{\sqcup}(X_1, X_2, \ldots, X_k) \text{ oraz } \widetilde{\sqcup}(X_2, \ldots, X_k)$$

także są homeomorficzne.

quasi-geodezyjne

8. Uzasadnij, że jeśli p jest quasi-geodezyjną w X $[(\lambda, D) - quasi - geodezyjn$ą$]$ to po sparametryzowaniu długością, jako odwzorowanie $p : [0, |p|] \to X$, jest ona (C, L)-quasi-izometrycznym włożeniem, dla pewnych uniwersalnych C i L zalenych tylko od λ i D (a niezależnych od długości $|p|$ krzywej p).
9. Uzasadnij, że jeśli $f : Z \to X$ jest quasi-izometrycznym włożeniem zbioru Z liczb całkowitych w geodezyjną przestrzeń X, to łamana geodezyjna $\bigcup_{i \in Z}[f(i), f(i+1)]$ jest quasi-geodezyjną.
10. Niech p będzie (λ, L)-qusi-geodezyjną o końcach a, b, i niech q będzie dowolną ciągłą krzywą o tych samych końcach a, b. Uzasadnij, że jeśli $q \subset N_D(p)$, to

$$p \subset N_{(\lambda+1)D+L+1}(q).$$

11.
12.
13.
14.
15.