Zadania do wykładu "Geometryczna teoria grup"
Lista 5: wzrost w grupach

1. Wylicz funkcję wzrostu $\beta_{Z^2,S}$ dla kanonicznego zbioru generatorów $S = \{(1,0),(0,1)\}$.
2. Wylicz funkcję wzrostu $\beta_{Z,S}$ dla $S = \{2,3\}$.
3. Uzasadnij, że
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\beta_{Z^2,S}(k)}{k^2} = \mathrm{Vol}(K),$$
gdzie K to otoczka wypukła zbioru $S \cup S^{-1}$ w R^2, zaś Vol to jego objętość (pole).
4. Uzasadnij, że dla nieskończonej grupy G i dowolnego skończonego zbioru generatorów S funkcja wzrostu $\beta_{G,S}$ jest ściśle rosnąca, i że $\beta_{G,S}(k) \geq k+1$ dla każdego k.
5. Uzasadsnij, że dowolna funkcja wzrostu $\beta = \beta_{G,S}$ jest pod-multyplikatywna, tzn.
$$\beta(k+k') \leq \beta(k) \cdot \beta(k')$$
dla dowolnych naturalnych k, k'.
6. Dla grupy G o skończonym zbiorze generatorów S niech H będzie podgrupą generowaną przez podzbiór $T \subset S$. Pokaż, że wówczas $\beta_{H,T}(k) \leq \beta_{G,S}(k)$ dla dowolnego k.
7. Uzasadnij, że relacja quasi-dominacji dla funkcji wzrostu jest przechodnia
8. Dla dodatnich rzeczywistych a, niech $f_a(k) := k^a$ będzie abstrakcyjną funkcją wzrostu. Uzasadnij, że $f_a \prec f_b$ wtedy i tylko wtedy gdy $a \leq b$. Wywnioskuj, że każda z funkcji f_a określa osobny typ wzrostu.
9. Uzasadnij, że produkt wolny dwóch grup o rzędach ≥ 3 ma wzrost eksponencjalny. A co się dzieje, gdy którać grupa składowa ma rząd 2?
10. Uzasadnij, że grupa (nieskończona) o wzroście liniowym ma więcej niż 1 koniec.
11. Mówimy, że grupa zawiera wolny monoid, gdy dla pewnych dwóch elementów tej grupy naprzemienne iloczyny dodatnich potęg tych dwóch elementów są parami różne. Uzasadnij, że grupa zawierająca wolny monoid ma wzrost eksponencjalny.
12. Niech G będzie grupą funkcji liniowych $f : R \to R$ postaci $f(x) = 2^k \cdot x + m \cdot 2^j$, dla całkowitych k, m, j, z działaniem składania (jest to ta sama grupa, która rozważana była w zadaniu 12 listy 1). Uzasadnij, że grupa ta ma wzrost ekponencjalny.
13. Uzasadnij, że dla dowolnego lokalnie skończonego grafu X funkcje wzrostu liczebności kul w X względen dwóch różnych wierzchołków bazowych są równoważne (wyznaczają ten sam typ wzrostu).
14. Uzasadnij, że dla dowolnej spójnej rozmaitości Riemannowskiej M funkcje wzrostu objętości w M względem dowolnych dwóch różnych punktów bazowych są równoważne (wyznaczają ten sam typ wzrostu).
15. Uzasadnij, że produkt wolny dwóch grup skończonych o rzędach ≥ 3 ma wzrost eksponencjalny. A jak będzie w innych przypadkach produktu wolnego dwóch grup skończonych? A jak będzie gdy dopuścimy faktory nieskończone?