Zadania do wykładu "Geometryczna teoria grup"
Lista 4: przestrzeń i liczba końców grupy

0. Uzasadnij, że rodzina zbiorów postaci

$$f_\lambda^{-1}(U) : \lambda \in \Lambda, U \subset X_\Lambda \text{ jest otwartym podzbiorem}$$

rzeczywiście stanowi bazę topologi na granicy odwrotnej (gdzie $f_\lambda : \lim_{\leftarrow} X \to X_\lambda$ to odwzorowanie graniczne).

1. Mówimy, że podzbiór M zbioru skierowanego Λ jest *współkońcowy* gdy dla dowolnego $\lambda \in \Lambda$ istnieje $\mu \in M$ taki, że $\lambda \leq \mu$. Niech Y będzie nieskończonym zbiorem, zaś Λ zbiorem jego skończonych podzbiorów z relacją inkluzji.
   (a) Uzasadnij, że Λ jest zbiorem skierowanym.
   (b) Uzasadnij, że Λ posiada współkońcowy podciąg wtedy i tylko wtedy gdy Y jest przeliczalny.
2. Uzasadnij, że jeśli $M \subset \Lambda$ jest współkońcowy, to granica dowolnego systemu odwrotnego X nad Λ kanonicznie utożsamia się z granicą systemu X "obciętego" do M (również jako przestrzeń topologiczna).
3. Niech X będzie systemem odwrotnym skończonych zbiorów, i załóżmy że wszystkie odwzorowania $f_{\lambda\mu}$ są surjektywne. Znajdź warunki konieczne i dostateczne na to, by granica $\lim_{\leftarrow} X$ była (a) nieskończona, (b) nieprzeliczalna, (c) posiadała punkt izolowany, (d) była homeomorficzna ze zbiorem Cantora.
   Wskazówka do (d): zbiór Cantora posiada następującą charakteryzację topologiczną - jest jedyną z dokładnością do homeomorfizmu zwartą przestrzenią metryczną która nie posiada punktów izolowanych, oraz jest całkowicie niespójna (każde dwa różne punkty można rozdzielić zbiorem otwarto-domkniętym).
5. Uzasadnij, że dowolny homeomorfizm h właściwej geodezyjnej przestrzeni X indukuje odpowiednio zinterpretowany "automorfizm" systemu odwrotnego π^X, a co za tym idzie homeomorfizm h^E granicy odwrotnej Ends(X). Uzasadnij też, że przyporządkowanie $h \to h^E$ jest homomorfizmem.
6. Uzasadnij, że dowolne ciągłe właściwe odwzorowanie $g : X \to Y$ właściwych geodezyjnych przestrzeni indukuje ciągłe odwzorowanie g^E : Ends(X) $\to$ Ends(Y).
7. Uzasadnij, że dla właściwej geodezyjnej przestrzeni X podzbiór $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ złożony z metrycznych kul jest współkońcowy (gdzie $\mathcal{K}$ to zbiór wszystkich podzbiorów zwartych). Zrób to samo dla kul o ustalonym środku i o całkowitych promieniach.
8. Niech X będzie właściwą przestrzenią geodezyjną, i niech $x_0 \in X$ będzie dowolnym punktem. Uzasadnij, że w każdej klasie współkońcowości promieni (właściwych) w X znajduje się jakiś (przynajmniej jeden, a na ogół więcej - wskaż odpowiedni przykład) promień geodezyjny $\gamma : [0, \infty) \to X$ o początku w x_0.
9. Sformułuj w terminach promieni (właściwych) reprezentujących końce przestrzeni X własność zbieżności ciągu końców do granicznego końca w przestrzeni Ends(X).
10. Uzasadnij, że jeśli r, r' są właściwymi promieniami w X, i jeśli obraz im(r') zawiera się w D-otoczeniu obrazu im(r), gdzie $D > 0$ jest pewną liczbą, to promienie r i r' są współkońcowe.
11. Uzasasdnij, że produkt wolny dwóch nieskończonych grup skończenie generowalnych ma ∞ wiele końców.

12. Uzasadnij, że produkt wolny dwóch nietrywialnych grup skoczonych, z ktrych przynajmniej jedna ma rząd ≥ 3, ma ∞ wiele końców.
13. Uzasadnij, że granica odwrotna skończonych zbiorów jest zawsze przestrzenią całkowicie niespójną (każdy punkt posiada bazę otoczeń otworto-domkniętych).
14. Rozważmy system odwrotny $\mathcal{S} = (\Lambda, \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}, \mathcal{F})$, i załóżmy że spełnia on następującą własność: $(\forall \lambda \in \Lambda)(\exists x \in X_\lambda)$ taki, że w $\mathcal{S}$ istnieją przynajmniej dwie nici zawierające x. Uzasadnij, że granica odwrotna $\lim_{\leftarrow} \mathcal{S}$ jest wówczas przestrzenią bez punktów izolowanych.
15. Jakie są ograniczenia na pary liczb końców dla grup oraz ich skończenie generowalnych podgrup?