

Uniwersytet Wrocławski

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyczny

Specjalność: matematyka nauczycielska

Diana Krawczyńska

O pewnej klasie
regularnych parkietaży
z dwoma rodzajami płytek

Praca magisterska

napisana pod kierunkiem

Prof. dra hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2019

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałam samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data:

Podpis autora pracy

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data:

Podpis opiekuna pracy

1 Spis treści

1	Spis treści.....	3
2	Wstęp	4
3	Opis klasy parkietaży.....	5
3.1	Podstawowe definicje	5
3.2	Regularne parkietaże o dwóch rodzajach płytek rozmieszczonych naprzemiennie....	6
4	Ograniczenia na kątność klepek.....	9
4.1	Parkietaż indukowany na torusie.....	9
4.2	Ograniczenia na kątność klepek	10
5	Opis typów symetrii płytek wielokątowych	12
5.1	Typy symetrii płytek 3-kątnych oraz typy ich krawędzi i wierzchołków	14
5.2	Typy symetrii płytek 4-kątnych oraz typy ich krawędzi i wierzchołków	16
5.3	Typy symetrii płytek 5-kątnych oraz typy ich krawędzi i wierzchołków	18
5.4	Typy symetrii płytek 6-kątnych oraz typy ich krawędzi i wierzchołków	19
6	Typ kombinatoryczny	21
7	Dalsze ograniczenia na kątność klepek.....	25
7.1	Wykluczenie pary 3-kąt i 4-kąt	25
7.2	Wykluczenie pary 3-kąt i 5-kąt	27
8	Systematyczna analiza par 3-kąt i 6-kąt, 3-kąt i 3-kąt oraz 4-kąt i 4-kąt.....	29
8.1	Para 3-kąt – 6-kąt.....	29
8.2	Para 3-kąt – 3-kąt.....	46
8.3	Para 4-kąt – 4-kąt.....	63
9	Lista typów kombinatorycznych N2R-parkietaży	91
10	N2R-parkietaże Eschera i ich typy kombinatoryczne.....	103
11	Bibliografia	110

2 Wstęp

„Na pierwszym miejscu w pracy stawiam dopełniający się bez reszty regularny podział płaszczyzny. We wszystkich rysunkach z ostatnich kilku lat pokrywam ją całkowicie przystającymi figurami, nie pozostawiając ani kawałka wolnej przestrzeni; moje rysunki nie mają końca i powtarzają się na nich bez przerwy te same elementy.”

List M. C. Eschera do bratanka w 1944 r.

Poniższa praca dotyczy klasyfikacji pewnej klasy parkietaży, a dokładniej będą to parkietaże zbudowane z tylko dwóch rodzajów płytek, ułożonych naprzemiennie. Dokładniejsze opisanie i zdefiniowanie klasy rozważanych i analizowanych parkietaży znajduje się w Podrozdziale 3.2. Tutaj tylko wspomnijmy, że parkietaże z tej klasy parkietaży będziemy nazywać *dwupłytkowymi naprzemiennymi parkietażami regularnymi*. Głównym celem tej pracy jest znalezienie i matematyczne opisanie wszystkich reguł tworzenia takich parkietaży.

Inspiracją do napisania tej pracy była twórczość Mauritsa Cornelisa Eschera, który zajmował się parkietażami płaszczyzny. Do projektowania figur używał przekształceń geometrycznych takich jak translacje, obroty i symetrie, uzyskując w ten sposób zaskakujące mozaiki. Ich przykładami są kompozycje przedstawione są Rysunkach 1, 4 i 8 znajdujących się na dalszych stronach pracy. Wydaje się, że problem klasyfikacji tej klasy parkietaży nie był podejmowany w sposób udokumentowany w fachowej literaturze. Oczywiście, dość dobrze znana jest w literaturze klasyfikacja regularnych parkietaży jednopłytkowych (patrz np. Rozdział 6.2 w pracy [5] oraz Rozdział 5 i Dodatek A w pracy [6]), co jest zagadnieniem podobnym, ale jednak odrębnym.

Plan pracy jest następujący. Rozdział 3 ma na celu wprowadzenie czytelnika i wyjaśnienie podstawowych definicji, które pomogą zrozumieć później omawiane zagadnienia. Podczas pisania tego rozdziału, opierano się o treści zawarte w artykule [4] Doris Schattschneider, pt. *Lessons in Duality and Symmetry from M.C. Escher*. Czwarty rozdział przedstawia pojęcie parkietażu indukowanego na torusie, ograniczające wybór używanych klepek. Pojęcie to zostało zaczerpnięte ze *Wstępu do geometrii dawnej i nowej* H. S. M. Coxetera [1]. Argumenty w tym rozdziale odwołują się do pojęcia charakterystyki Eulera powierzchni. Następnie, w Rozdziale 5, opierając się na twierdzeniu Leonarda da Vinci [2], omówione są wszystkie potencjalne typy symetrii płytek wielokątowych. Rozdział 6 to opis sposobu przystawiania płytek obu rodzajów, nazwany *typem kombinatorycznym*. Wyniki Rozdziału 5 są wykorzystane najpierw w Rozdziale 7, do kolejnego ograniczenia dla parametrów klepek, a następnie w Rozdziale 8, żeby przedstawić systematyczną analizę par klepek obu rodzajów. Rozdział 9 to kompletne podsumowanie wszystkich znalezionych typów parkietaży, natomiast Rozdział 10 to wskazanie typów kombinatorycznych w kompozycjach Eschera (okazało się, że nie wszystkie odkryte typy parkietaży mają odpowiedniki u Eschera).

Wszystkie rysunki zawarte w pracy (oprócz ilustracji przedstawiających parkietaże M. C. Eschera) są stworzone własnoręcznie przez autorkę w takich programach jak: GeoGebra oraz Paint. Również wszelkie treści i dowody są owocami pracy autorki, wspartej wielką pomocą, doświadczeniem, wiedzą i cennymi radami opiekuna tej pracy, prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego.

3 Opis klasy parkietaży

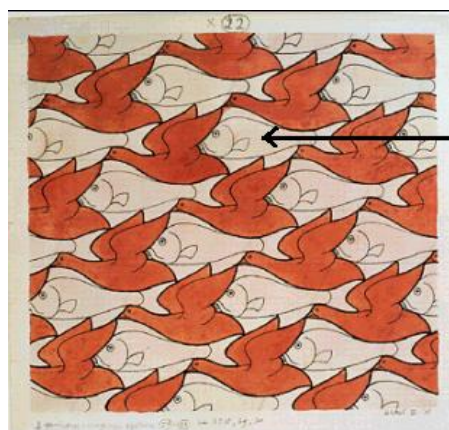
W tym rozdziale przedstawię, jakie typy parkietaży będę omawiać i analizować w pracy. Dodatkowo przedstawię podstawowe definicje, którymi będę się posługiwać w dalszych częściach pracy.

3.1 Podstawowe definicje

Definicja 3.1. Parkietaż to pokrycie płaszczyzny pewnymi figurami, zwanymi klepkami, ściśle do siebie przylegającymi i nie zachodzącymi na siebie.

Czym zatem są takie klepki?

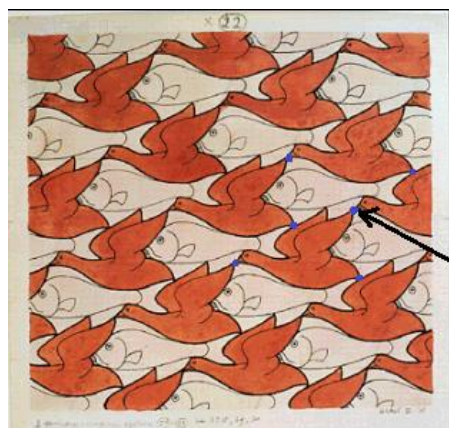
Definicja 3.2. Klepka to figura na płaszczyźnie, ograniczona zamkniętą linią bez samoprzecięć; linię tę nazywać będziemy **brzegiem klepki**.



Rysunek 1.

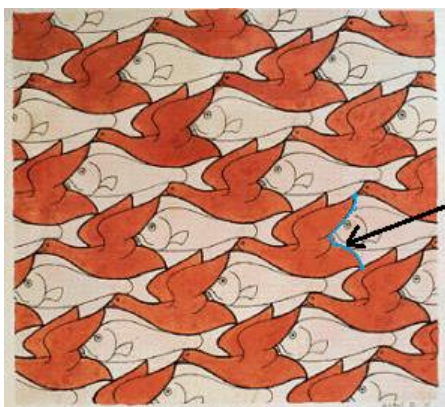
Klepki niekiedy nazywać będziemy płytkami parkietażu.

Definicja 3.4. Wierzchołek parkietażu to punkt, w którym stykają się co najmniej trzy przylegające do siebie płytki.



Rysunek 2.

Definicja 3.5. Krawędź parkietażu to fragment brzegu płytki pomiędzy dwoma kolejnymi wierzchołkami parkietażu.



Krawędź
parkietażu

Rysunek 3.

Definicja 3.6. Parkietaż zwyczajny to parkietaż, w którym część wspólna dwóch dowolnych płytek (o ile się przecinają) to albo pojedynczy wierzchołek parkietażu, albo pojedyncza krawędź.

Definicja 3.7. Płytki przyległe to płytki mające wspólną krawędź.

Definicja 3.8. Kątność klepki to liczba wierzchołków parkietażu należących do danej klepki.

Dla wyjaśnienia, parkietaż z Rysunku 3 ma klepki o kątności równej 4, ponieważ do każdej z nich należą po cztery wierzchołki parkietażu.

Definicja 3.9. Stopień wierzchołka to liczba klepek występujących wokół tego wierzchołka.

Stopień wszystkich wierzchołków parkietażu na Rysunku 3 wynosi 4.

3.2 Regularne parkietáže o dwóch rodzajach płytek rozmieszczonych naprzemiennie

Znamy podstawowe definicje związane z pojęciem parkietażu, więc możemy przejść do określenia i zdefiniowania klasy parkietażu, o których mowa w tytule pracy i w tytule tego podrozdziału. Parkietáže te charakteryzują się następującymi trzema własnościami:

- **Dwa rodzaje płytek** – w celu rozróżnienia rodzajów będę używać pojęć: klepka I rodzaju oraz płytka II rodzaju.

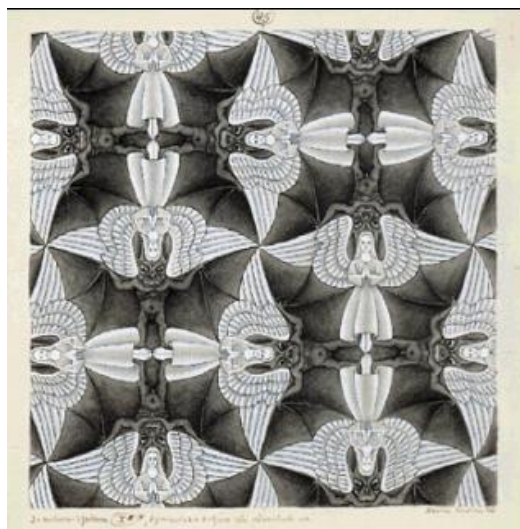
Co możemy dokładniej powiedzieć o tych płytkach? Każde dwie klepki tego samego rodzaju są przystające. Natomiast płytki różnych rodzajów różnią się albo kształtem albo wzorem umieszczonym na płytce (np. kolorem). Tak jak to widać na Rysunku 1 przedstawionym w Podrozdziale 3.1 klepki I rodzaju to pomarańczowe ptaki, natomiast klepki II rodzaju to różowe ryby.

- **Naprzemiennosc**

Płytki pierwszego rodzaju jest przyległa (przez każdą krawędź) wyłącznie do płytek drugiego rodzaju, i odwrotnie. Oznacza to, że płytki tego samego rodzaju nigdzie nie są do siebie przyległe. Wytlumaczyć to można ponownie na przykładzie z Podrozdziału 3.1, gdzie ryby nigdy nie przylegają przez krawędź do ryb i analogicznie ptaki.

- **Regularność**

Aby omówić tę własność, posłużę się innym rysunkiem Eschera (Rysunek 4). Jest to ciekawy przykład, ponieważ płytki obu rodzajów posiadają własną nietrywialną symetrię (w tym przypadku jest to symetria osiowa względem pojedynczej osi).

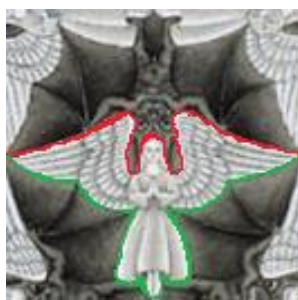


Rysunek 4.



Rysunek 5.

Zanim precyzyjnie opiszemy własność regularności parkietażu, wprowadzimy kilka wstępnych pojęć. Będziemy mówić, że krawędzie parkietażu należące do ustalonej płytki mają **ten sam typ**, jeżeli odpowiadają sobie przez pewne symetrie płytki. Krawędzie, przez które przechodzi oś symetrii płytki, nazwiemy krawędziami symetrycznymi płytki. W płytce wyróżniamy typy **krawędzi symetrycznych** (zaznaczona na Rysunku 6 na czerwono) i **krawędzi niesymetrycznych** (zaznaczona na zielono).



Rysunek 6.

Co dokładnie kryje się pod nazwą parkietu regularny?

Definicja 3.10. Dwupłytkowy naprzemienny parkiet jest **regularny**, gdy każde dwie płytki tego samego rodzaju są w parkiecie położone identycznie względem całego parkietu (czyli względem wszystkich pozostałych płytek). Precyzyjniej mówiąc, dla dowolnych dwóch płytek tego samego rodzaju istnieje symetria całego parkietu przeprowadzająca jedną płytkę na drugą. Dodatkowe warunki określające regularność to: każda symetria własna każdej płytki rozszerza się do symetrii całego parkietu oraz cały parkiet jest translacyjnie niezmienny w dwóch różnych kierunkach.

Konsekwencjami Definicji 3.10 są poniższe uwagi pozwalające konkretniej ją zrozumieć.

Uwaga 3.11. Natychmiastową konsekwencją definicji regularności są następujące dalsze własności parkietu o dwóch rodzajach płytek ułożonych naprzemiennie:

- a) krawędź ustalonego typu w dowolnej płytce I rodzaju przylega zawsze do krawędzi jednego ustalonego typu w płytce II rodzaju, przy czym krawędzie symetryczne przylegają do krawędzi symetrycznych (a niesymetryczne do niesymetrycznych)
- b) dla każdej pary płytek przylegających wzdłuż pary boków o ustalonych typach, figura utworzona z obu tych płytek ma być zawsze taka sama

Pełna nazwa omawianej przeze mnie klasy parkietu jest wyraźnie za długa, dlatego będziemy używać nazwy **N2R-parkiet**, która utworzona jest z symbolicznych skrótów oznaczających trzy własności (N – naprzemiennność, 2 – dwupłytkowość, R – regularność).

Na koniec tego podrozdziału sformułujemy jeszcze jedną użyteczną obserwację.

Spostrzeżenie 3.11. Wokół każdego wierzchołka N2R-parkietu występuje zawsze parzysta liczba klepek.

Jeżeli wokół dowolnego wierzchołka N2R-parkietu występuje n klepek I rodzaju, to występuje również n klepek II rodzaju, ponieważ pojawiają się one na przemian. Daje to nam razem $2n$ klepek.

4 Ograniczenia na kątność klepek

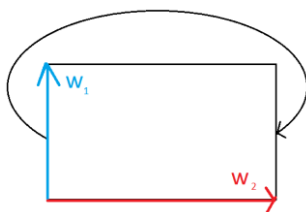
Zgodnie z definicją N2R-parkietażu wiemy, że występują w nim dwa rodzaje płytek. Niech klepka I rodzaju będzie k -kątem, a klepka II rodzaju będzie m -kątem i przyjmijmy, że $m \leq k$. W rozdziale tym będziemy szukać możliwych par kątności klepek (k, m) , z których powstanie potencjalny N2R-parkietaż. Wydawać by się mogło, że istnieje wiele takich par kątności klepek. Jednakże, okazuje się, że szybko potrafimy uzasadnić istnienie co najwyżej pięciu takich potencjalnych par kątności (a w dalszej części pracy jeszcze dwie spośród nich też okazały się niemożliwe). Do uzasadnienia takiego ograniczenia posłuży nam pojęcie parkietażu indukowanego na torusie, które szczegółowo wyjaśnione jest w Podrozdziale 4.1.

4.1 Parkietaż indukowany na torusie

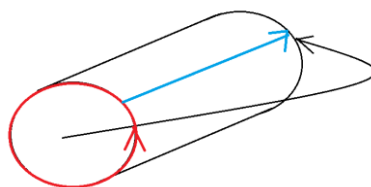
Rozważmy dwa niezerowe wektory w_1 i w_2 o różnych kierunkach takie, że translacje o te wektory są symetriami parkietażu. Wiemy, że takie istnieją z jednego z warunków regularności. Rozważmy równoległobok rozpięty na tych wektorach i wyobraźmy sobie powierzchnię utworzoną z tego równoległoboku przez sklejenie ze sobą najpierw jednej pary przeciwległych boków (krok 1), a potem drugiej, zgodnie z tym jak te boki są przekształcane na siebie przez translacyjne symetrie (krok 2).

Otrzymana powierzchnia jest torusem (Rysunek 7). Fragmenty klepek wewnątrz równoległoboku skleją się ze sobą tworząc na powierzchni torusa parkietaż złożony z takich samych klepek jak klepki parkietażu na płaszczyźnie. Taki parkietaż będziemy nazywać **parkietażem indukowanym na torusie** i pojęcia tego będą używała w dalszych częściach pracy. Rysunki 8 i 9 pokazują, jak z pewnego regularnego parkietażu na płaszczyźnie powstaje indukowany parkietaż na torusie.

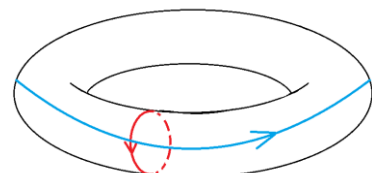
Krok 1.



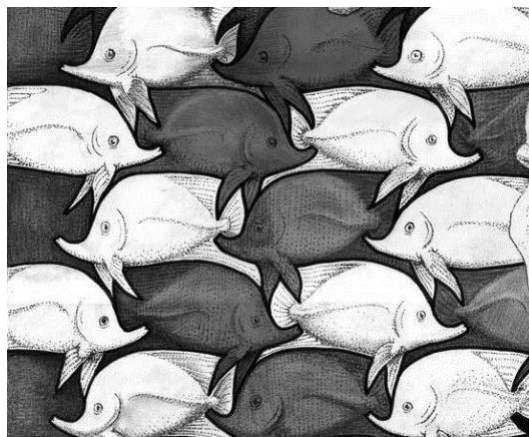
Krok 2.



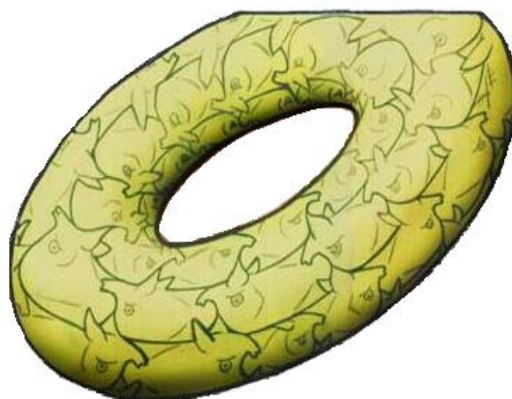
Rezultat



Rysunek 7. Powstawanie parkietażu indukowanego na torusie



Rysunek 8. Wyjściowy parkietaż



Rysunek 9. Parkietaż indukowany na torusie

Do uzasadnienia istnienia co najwyżej pięciu par kątności klepek (k, m) posłuży nam pojęcie charakterystyki Eulera, które dotyczy powierzchni zamkniętych, takich jak np. powierzchnia sfery, torus lub powierzchnia „obwarzanka” z kilkoma dziurami.

Rozpatrujemy dowolny parkietaż na powierzchni, czyli podział na figury ograniczone zamkniętą krzywą bez samoprzecięć, takie same jak płytki parkietażu na płaszczyźnie. Nie przyjmujemy żadnych założeń o rodzajach płytek. Tak samo jak na płaszczyźnie, rozważamy wierzchołki oraz krawędzie parkietażu. Oznaczmy przez:

W – liczbę wierzchołków takiego parkietażu,

K – liczbę krawędzi,

S – liczbę płytek.

Przytaczamy twierdzenie, które można znaleźć np. we *Wstępie do geometrii dawnej i nowej* H. S. M. Coxetera, drugi akapit w podrozdziale 20.4 [1].

Dla ustalonej powierzchni zamkniętej

Twierdzenie 4.1. Liczba $W - K + S$ nie zależy od wyboru parkietażu na tej powierzchni.

Uwaga 4.2. Liczbę $W - K + S$, która jest stała dla ustalonej powierzchni, nazywamy charakterystyką Eulera tej powierzchni.

Uwaga 4.3. Nietrudno sprawdzić, biorąc jakikolwiek parkietaż na torusie, że charakterystyka Eulera torusa wynosi 0. W konsekwencji, dla dowolnego parkietażu na torusie zachodzi zależność $W - K + S = 0$.

4.2 Ograniczenia na kątność klepek

Zastanówmy się teraz nad wielkościami W , K i S występującymi w powyższej formule na charakterystykę Eulera na torusie. Niech płytka I rodzaju będzie k -kątna, natomiast płytka II rodzaju m -kątna i przyjmijmy też, że $k \geq m$. Przyjmijmy też, że w parkietażu indukowanym na torusie jest t płytek I rodzaju i s płytek II rodzaju.

Ponieważ każda krawędź parkietażu należy do dokładnie jednej płytki k -kątnej oraz do dokładnie jednej płytki m -kątnej, wynika stąd, że krawędzi w parkietażu jest dokładnie tyle, ile krawędzi jest łącznie we wszystkich k -kątach lub łącznie we wszystkich m -kątach, stąd $K = t \cdot k = m \cdot s$. Zatem $s = t \frac{k}{m}$.

Liczba ścian wynosi w takim razie $S = t + s = t + t \cdot \frac{k}{m} = t(1 + \frac{k}{m})$.

Chcąc oszacować liczbę wierzchołków indukowanego parkietazu, posłużymy się poniższym lematem.

Lemat 4.2. Liczba k -kątów wokół dowolnego wierzchołka k -kąta wynosi co najmniej 2.

Dowód Lematu 4.2.

Jak wiadomo płytki I rodzaju i II rodzaju występują wokół każdego wierzchołka parkietazu na przemian. Skoro wierzchołek parkietazu z definicji przylega do co najmniej trzech płytek, to liczba k -kątów wokół dowolnego wierzchołka k -kąta wynosi co najmniej 2. \square

Z Lematu 4.2 wynika, że każdy wierzchołek parkietazu indukowanego na torusie należy do przynajmniej dwóch k -kątnych klepek parkietazu. Stąd łatwo wynika nierówność $W \leq \frac{t \cdot k}{2}$. Podstawiając uzyskane powyżej wyrażenia i oszacowanie na S , K i W do równania na charakterystykę Eulera torusa otrzymamy:

$$0 = W - K + S \leq \frac{t \cdot k}{2} - t \cdot k + t(1 + \frac{k}{m}).$$

Dzieląc obustronnie przez $t \neq 0$ i przekształcając uzyskane wyrażenie otrzymujemy (po ciągu przekształceń) oszacowanie (*) na liczbę k w terminach liczby m :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{k}{2} - k + 1 + \frac{k}{m}, \\ 0 &\leq k \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) + 1, \\ -1 &\leq k \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right), \\ 1 &\geq k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right), \\ \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right)} &\geq k, \\ k &\leq \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m} \right)} = \frac{1}{\frac{m-2}{2m}} = \frac{2m}{m-2}, \\ (*) \quad k &\leq \frac{2m}{m-2}. \end{aligned}$$

Dla $m = 3$ (3-kąt) mamy: $k \leq \frac{2 \cdot 3}{3-2} = 6$. Z tego wynika, że w parkietazu tym występować może jedynie klepka 3-kątna w parze z inną klocką 3-kątną, 4-kątną, 5-kątną lub 6-kątną.

Dla $m = 4$ (4-kąt) mamy: $k \leq \frac{2 \cdot 4}{4-2} = 4$. Stąd gdy płytka II rodzaju jest 4-kątna, płytka I rodzaju także musi być 4-kątna (z założenia, że $k \geq m$).

W pozostałych przypadkach, czyli dla $m > 4$ należy przekształcić nierówność (*) otrzymując $k \leq 2 \cdot \frac{m}{m-2} = 2 \cdot \frac{m-2+2}{m-2} = 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{m-2} \right)$. Wiedząc, że $m > 4$ uzyskujemy oszacowanie rodzaju k -kąta.

$$\begin{aligned} k &\leq 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{m-2} \right), \\ k &< 2 \left(1 + \frac{2}{5-2} \right), \\ k &< 3 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Oczywiście $k \in \mathbb{N}$, stąd $k = 3$. Jednakże płytkę 3-kątną rozpatrzyliśmy wyżej.

Podsumowując, jedyne możliwości współwystępowania kątności k i m płytek poszczególnych dwóch rodzajów w N2R-parkietażu to: 3-kąt i 3-kąt, 3-kąt i 4-kąt, 3-kąt i 5-kąt, 3-kąt i 6-kąt oraz 4-kąt i 4-kąt.

5 Opis typów symetrii płytek wielokątowych

W tym rozdziale, jako ważny krok przed przystąpieniem do klasyfikacji parkietaży, opiszę wszystkie potencjalne typy symetrii omawianych w poprzednim rozdziale płytek. Każda z nich posiada pewien nietrywialny typ symetrii lub jest niesymetryczna. W celu ułatwienia oraz rozróżnienia klepek, w każdą z nich wpiszę symbol, który przedstawia dany typ symetrii.

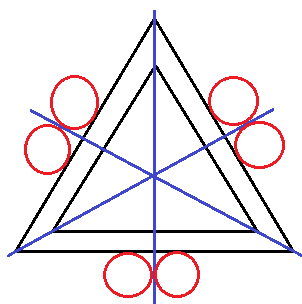
Zgodnie z twierdzeniem Leonarda da Vinci (zobacz [2] Weyl, str. 85, 125 oraz [1] Coxeter, str. 51) każda figura mająca skończenie wiele symetrii ma dokładnie jeden spośród poniższych typów symetrii (dla $n \geq 1$):

- 1) n -krotna kalejdoskopowa,
 - 2) n -krotna obrotowa.
- Omówmy te typy symetrii.

Symetria n -krotna kalejdoskopowa

Symetria ta oznacza, że figura posiada n osi symetrii, przecinających się w jednym punkcie S i w równych odstępach kątowych $\frac{180^\circ}{n}$. Symetrami są wtedy również obroty o wielokrotności kąta $\frac{360^\circ}{n}$ wokół tego samego punktu S . Taki typ symetrii oznaczać będziemy symbolem D_n . Jeżeli $n = 1$, to figura posiada dokładnie jedną oś symetrii.

Na Rysunku 10 znajduje się przykład figury o typie symetrii D_3 , gdzie niebieskie proste oznaczają osie symetrii.

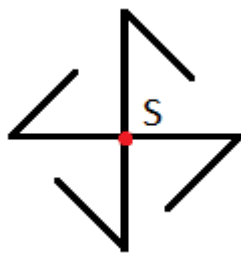


Rysunek 10.

Symetria n -krotna obrotowa

Symetria ta oznacza, że figura jest przeprowadzona na samą siebie przez n obrotów wokół ustalonego punktu S , o kąty będące wielokrotnościami kąta $\frac{360^\circ}{n}$, w tym obrót zerowy i są to jedyne symetrie takiej figury. Taki typ symetrii oznaczać będziemy symbolem C_n . Jeżeli $n = 1$, to figura nie posiada innych symetrii niż o obrót o 0° , czyli jest niesymetryczna.

Na Rysunku 11 przedstawiam przykład figury o typie symetrii C_4 .



Rysunek 11.

W celu przedstawienia wszystkich typów symetrii klepek posłużę się poniższym lematem.

Lemat 5.1. *Jeśli typ symetrii m -kąta to C_n lub D_n to n jest dzielnikiem liczby m .*

Dowód Lematu 5.1.

W celu udowodnienia Lematu 5.1 osobno rozpatrzmy grupę symetrii C_n i osobno grupę symetrii D_n .

Jeśli m -kąta ma typ C_n to $n|m$.

Zgodnie z definicją symetrii n -krotnej obrotowej (C_n), m -kąta posiada środek obrotowej symetrii S . Środek ten nie może być jego wierzchołkiem, ponieważ nietrywialny obrót wokół wierzchołka nigdy nie przeprowadza wielokąta na siebie. Oczywiście jest, że wierzchołki pod wpływem symetrii (w tym przypadku pod wpływem obrotów) przechodzą na wierzchołki. W związku z tym, wielokrotności podstawowego obrotu o kąt $\frac{360^\circ}{n}$ przeprowadzają dowolny wierzchołek kolejno na parami różne wierzchołki. Zatem cały zbiór wierzchołków dzieli się na podzbiory złożone z n wierzchołków. Zatem m jest wielokrotnością n . \square

Jeśli m -kąta ma typ D_n to $n|m$.

Rozważmy obroty będące symetrami m -kąta. Są to obroty o wielokrotności $\frac{360^\circ}{n}$ wokół ustalonego punktu S . Analogicznie jak w pierwszej części dowodu, wierzchołki przeprowadzane są przez wielokrotności podstawowego obrotu o kąt $\frac{360^\circ}{n}$ kolejno na parami różne wierzchołki. Stąd cały zbiór wierzchołków dzieli się na podzbiory złożone z n wierzchołków. \square

Chcemy opisać płytki o poszczególnych typach symetrii wraz ze wskazaniem typów ich krawędzi i wierzchołków. Poniższe definicje opisują, co rozumiemy przez typy krawędzi i wierzchołków parkietu.

Definicja 5.2. *Wierzchołki parkietu są tego samego typu, gdy układ płytek wokół obu tych wierzchołków jest taki sam. Dokładniej, wierzchołki są tego samego typu, gdy zestaw płytek otaczających pierwszy wierzchołek można przekształcić na zestaw płytek otaczających drugi wierzchołek przez pewną izometrię płaszczyzny.*

O definicji krawędzi tego samego typu wspomniałam w Rozdziale 3.2 i definicja ta mówi, że krawędzie mają **ten sam typ**, jeżeli odpowiadają sobie przez pewne symetrie płytki.

Zanim przejdziemy do omówienia wszystkich potencjalnych typów symetrii klepek, przedstawię dwie własności, opisane w poniższych obserwacjach, które są konsekwencjami regularności.

Obserwacja 5.3. W N2R-parkietażu, jeżeli wierzchołki są tego samego typu i występują w różnych płytkach (lub jeżeli różne wierzchołki są tego samego typu i występują w tej samej płytce), to mają jednakowe stopnie.

Zestaw płytek otaczający dany wierzchołek można przekształcić na zestaw płytek otaczający wierzchołek tego samego typu przez pewną izometrię płaszczyzny, stąd stopnie tych wierzchołków muszą być równe.

Obserwacja 5.4. Niech płytka I rodzaju będzie k -kątem, natomiast płytka II rodzaju m -kątem. Załóżmy, że typy krawędzi płytki I rodzaju to: a_1, a_2, \dots, a_s – typy niesymetryczne oraz b_1, b_2, \dots, b_r – typy symetryczne, zaś typy krawędzi płytki II rodzaju to: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s'}$ – typy niesymetryczne oraz $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r'}$ – typy symetryczne. Wówczas typy krawędzi pierwszej płytki odpowiadają wzajemnie jednoznacznie typom krawędzi drugiej płytki, w sposób respektujący symetryczność/niesymetryczność. W szczególności $s = s'$ i $r = r'$.

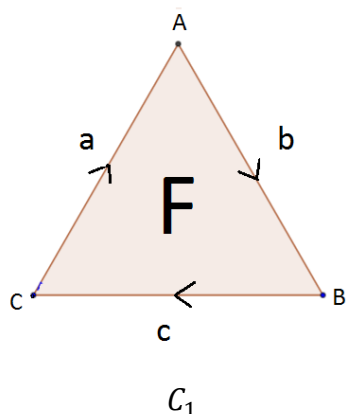
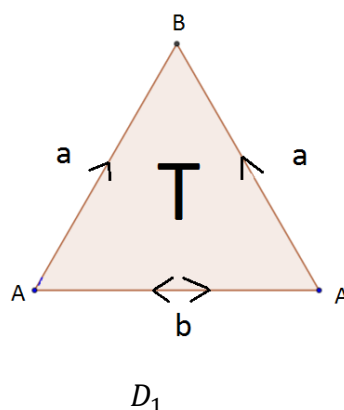
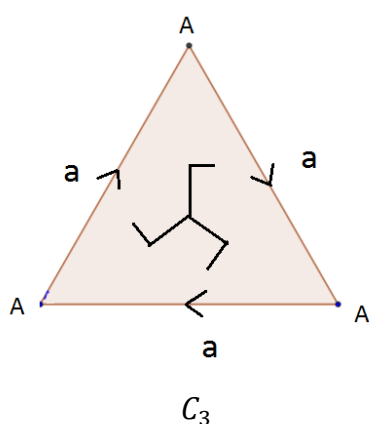
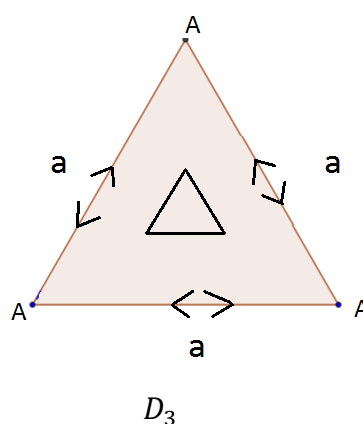
Jest tak, ponieważ zgodnie z Definicją 3.10 mówiącą o regularności, krawędzie symetryczne zawsze przylegają do krawędzi symetrycznych, a niesymetryczne do niesymetrycznych, oraz że krawędź ustalonego typu w płytce I rodzaju przylega zawsze do krawędzi jednego ustalonego typu w płytce II rodzaju.

5.1 Typy symetrii płytek 3-kątnych oraz typy ich krawędzi i wierzchołków

Zgodnie z Lematem 5.2 otrzymujemy jedynie cztery możliwe typy symetrii płytki 3-kątnej: C_1, D_1, C_3 oraz D_3 . Dla uproszczenia rysunków, klepki N2R-parkietażu (3-kątne) przedstawiać będą schematycznie jako płytki wielokątne. Jednakże należy pamiętać, że kształty klepek o poszczególnych typach symetrii mogą być bardziej „fantazyjne”.

Typy obrotowe C_1 i C_3 łatwo opisać, ponieważ wierzchołki muszą cyklicznie na siebie przechodzić. Trójkąt o typie symetrii D_1 to trójkąt, który ma jedną oś symetrii i musi ona przechodzić przez dokładnie jeden z wierzchołków i przekształcać na siebie dwa pozostałe (transponować). Jeżeli nie przechodziłaby przez żaden wierzchołek, to każdy z wierzchołków miałby swój obraz, a nie jest to możliwe przy nieparzystej liczbie wierzchołków. Typ kalejdoskopowy D_3 również łatwo opisać, ponieważ trójkąt o tym typie ma trzy osie symetrii, które przechodzą przez trzy wierzchołki. Poniżej (Rysunek 12) zamieszczam ilustracje 3-kątnych klepek o poszczególnych typach symetrii wraz z oznaczeniami typów krawędzi oraz z zaznaczeniem typów wierzchołków. Krawędzie oznaczone różnymi literami mają różne typy, natomiast wierzchołki niekoniecznie. Wierzchołki oznaczone różnymi literami są tylko potencjalnie różne, ponieważ w dalszych rozważaniach może się okazać, że są jednakowego typu. Jeżeli płytka posiada więcej niż jeden wierzchołek oznaczony tą samą literą (np. A) to wierzchołki te na pewno są tego samego typu. Krawędź niesymetryczna oznaczona jest pojedynczą strzałką, natomiast krawędź symetryczna oznaczona jest dwoma strzałkami skierowanymi w przeciwne strony lub strzałek tych nie posiada (dla czytelności rysunku).

Do każdej z płytek trójkątnych dopisana jest także litera albo symbol, który ma dokładnie ten sam typ symetrii co klepka (Rysunek 12). Dlaczego stosujemy to oznaczenie? Pozwoli nam to między innymi szybko rozróżniać klepki 3-kątne i łatwo je identyfikować. Analogiczne symbole zastosujemy później również dla klepek 4-kątnych, 5-kątnych i 6-kątnych.

(3₁)(3₂)(3₃)(3₄)

Rysunek 12. Typy symetrii klepek 3-kątnych

(3₁) Do płytki niesymetrycznej dopisana jest litera F, co oznacza właśnie niesymetryczność płytki, jako że litera F nie posiada nietrywialnych symetrii. Wszystkie trzy krawędzie są różnych typów, stąd używam trzech różnych oznaczeń: a , b i c . Oprócz tego wszystkie wierzchołki są potencjalnie różnych typów – stąd ponownie trzy różne oznaczenia: A , B i C (w dalszych rozważaniach okaże się, czy rzeczywiście będą one różnych typów).

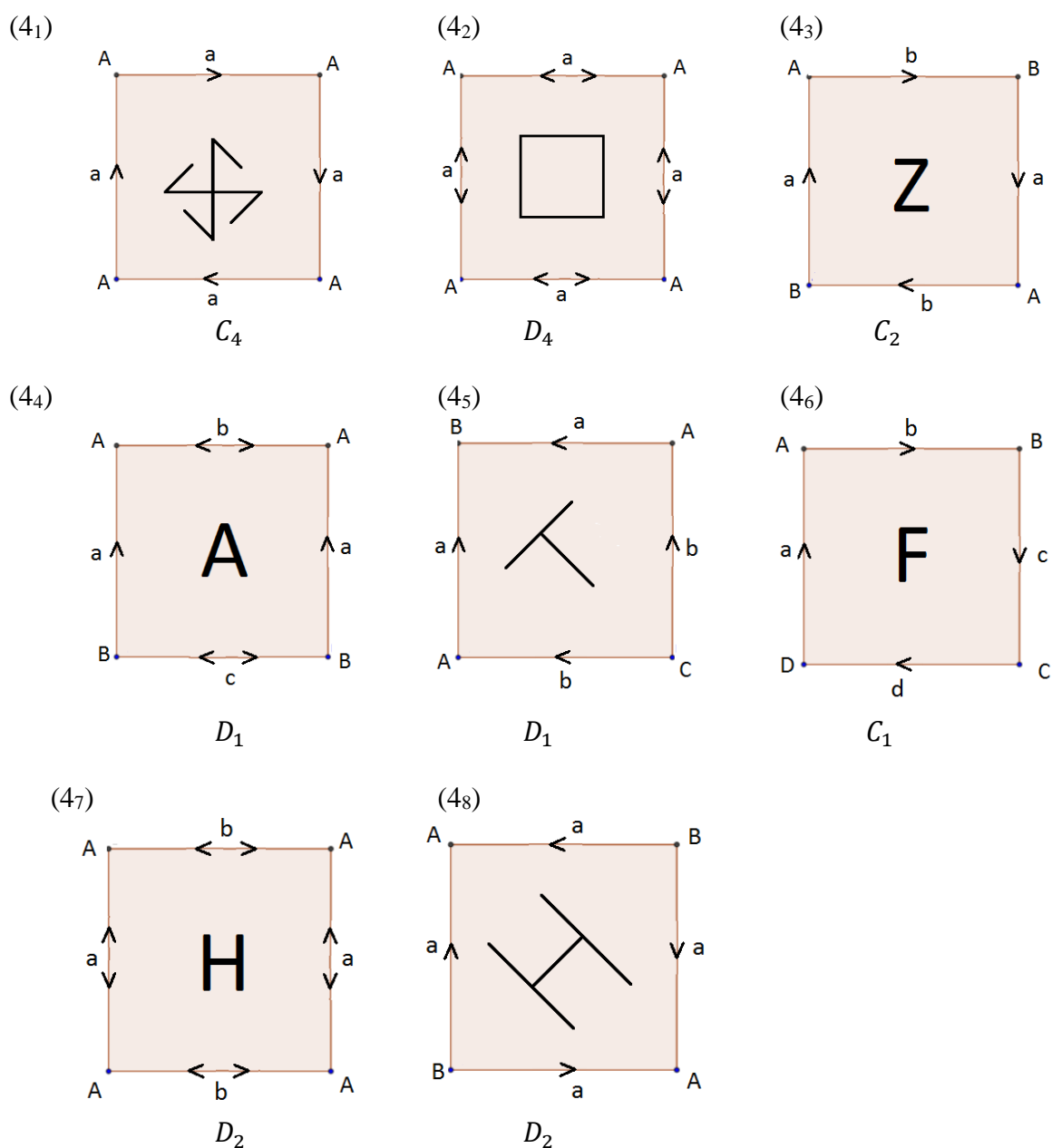
(3₂) Płytką drugą jest trójkątem o osi symetrii będącej symetralną jej podstawy i przechodzącej przez przeciwległy wierzchołek, taki typ reprezentuje litera T. Wspomniana oś symetrii przechodzi przez krawędź, co daje nam jedynie dwa typy krawędzi: a oraz b , przy czym a jest typem krawędzi niesymetrycznej, zaś b symetrycznej. Analogicznie otrzymujemy potencjalnie dwa typy wierzchołków A i B .

(3₃) Płytką trzecią przedstawia typ symetrii obrotowej C_3 – symetrami płytki są obroty o wielokrotność kąta 120° wokół ustalonego punktu S , co reprezentuje symbol „trójnóg”. W związku z tym krawędzie oraz wierzchołki poprzez tę symetrię przechodzą na siebie cyklicznie i posiadają wszystkie ten sam typ.

(3₄) Płytką czwartą to trójkąt posiadający trzy osie symetrii, dlatego wpisano symbol trójkąta równobocznego. Analogicznie jak powyżej, wierzchołki i krawędzie posiadają ten sam jeden typ.

5.2 Typy symetrii płytek 4-kątnych oraz typy ich krawędzi i wierzchołków

Zgodnie z Lematem 5.2 jedynymi możliwymi typami symetrii płytek 4-kątnych są C_i i D_i dla i równego 1, 2 oraz 4. Zatem wydawać by się mogło, że typów symetrii będzie sześć. Jednakże na przykład typ symetrii D_1 oraz D_2 można opisać dwojako, w zależności, czy oś symetrii przechodzić będzie przez parę przeciwległych wierzchołków, czy przez parę przeciwległych krawędzi. Typy obrotowe łatwo opisać, ponieważ wierzchołki muszą cyklicznie na siebie przechodzić. Poniżej zamieszczam rysunki tych klepek jako kwadratów. Pamiętajmy jednak, że jest to tylko schematyczne uproszczenie, gdyż kształt płytek może być w rzeczywistości rozmaity. Analogicznie jak w Podrozdziale 5.1, na każdej figurze zaznaczone zostały typy krawędzi, potencjalne typy wierzchołków oraz symbol reprezentujący dany typ symetrii (Rysunek 13). Inne typy symetrii nie są możliwe dzięki Lematowi 5.2.



Rysunek 13. Typy symetrii klepek 4-kątnych

(4₁) Płytką ta przedstawia typ symetrii obrotowej C_4 – symetrami płytki są obroty o wielokrotność kąta 90° wokół punktu S leżącego wewnątrz płytki, co przedstawia symbol „czworonóg”. Krawędzie oraz wierzchołki poprzez te symetrie przechodzą na siebie cyklicznie i posiadają wszystkie ten sam typ.

(4₂) Druga płytką posiada cztery osie symetrii: wzdłuż symetralnych dwóch par boków oraz dwóch przekątnych. W związku z tym znowu wszystkie krawędzie mają ten sam typ a , oraz wierzchołki mają ten sam typ A .

(4₃) Trzecia płytką przedstawia typ symetrii obrotowej C_2 – symetrami płytki są obroty o wielokrotność kąta 180° , czemu odpowiada litera Z wpisana w czworokąt, gdyż posiada typ symetrii obrotowej C_2 . W tym przypadku są dwa typy krawędzi a i b oraz dwa potencjalnie różne typy wierzchołków A i B (w dalszych rozważaniach okaże się, czy rzeczywiście będą one różnych typów).

(4₄) Czwarta płytką przedstawia typ symetrii kalejdoskopowej D_1 , kiedy płytką ma jedną os symetrii wzdłuż symetralnej jednej pary boków równoległych, dlatego wpisano literę A . W klepce tej są trzy typy krawędzi: a (typ krawędzi niesymetrycznej), b i c (typy krawędzi symetrycznych), ponieważ tylko dwie krawędzie zostały przekształcone na siebie przez os symetrii. Oraz dwa potencjalnie różne typy wierzchołków: A i B .

(4₅) Płytką piątą przedstawia typ symetrii kalejdoskopowej D_1 , kiedy figura posiada tylko jedną os symetrii wzdłuż jednej z przekątnych. W klepce tej są dwa typy krawędzi a i b , które są niesymetryczne oraz trzy potencjalnie różne typy wierzchołków: A , B i C , ponieważ tylko jedna para wierzchołków przekształca się przez os symetrii na siebie.

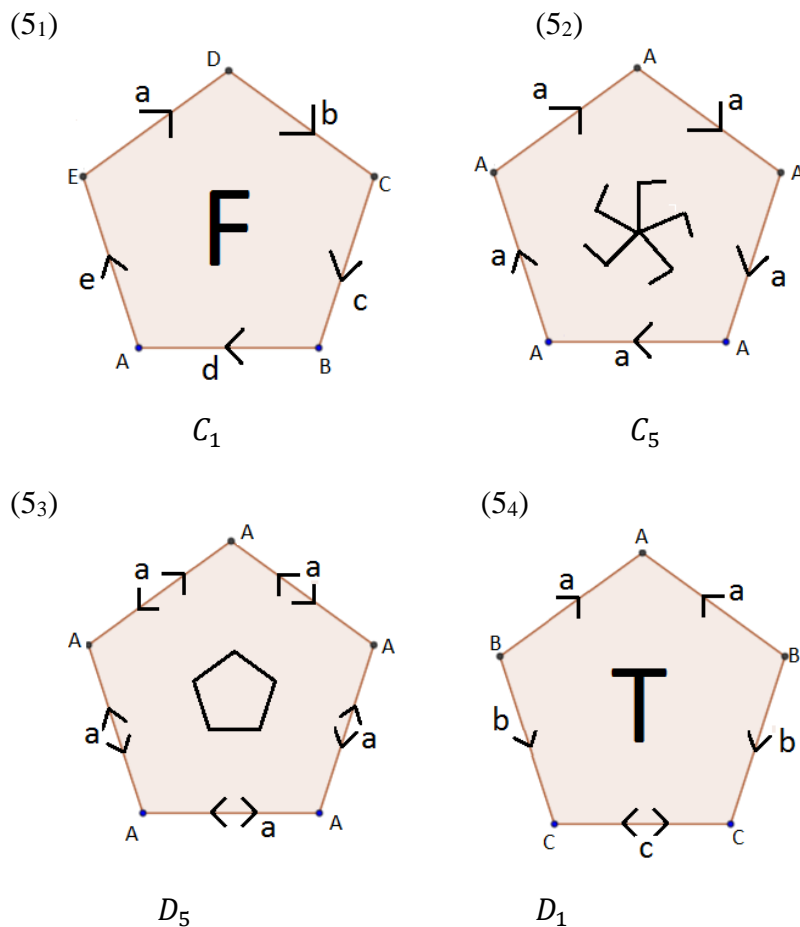
(4₆) Płytką szóstą to płytką niesymetryczną, dlatego wpisano literę F , która nie posiada nietrywialnych symetrii. Wszystkie krawędzie klepki są niesymetryczne i wszystkie są różnych typów a , b , c oraz d oraz cztery potencjalnie różne typy wierzchołków: A , B , C oraz D . W dalszych rozważaniach okaże się, czy rzeczywiście będą różnych typów.

(4₇) Kolejną płytką posiada dwie osie symetrii, każda wzdłuż symetralnych dwóch par boków równoległych. Łatwo zauważyć, że wszystkie wierzchołki są tego samego typu. Przeciwległe krawędzie są tego samego typu, ponieważ transponowane są poprzez os symetrii wzdłuż symetralnej drugiej pary boków równoległych. Zatem są dwa typy krawędzi, obie symetryczne: a i b .

(4₈) Ostatnią płytką posiada dwie osie symetrii, każda wzdłuż przekątnych. Tym razem klepka posiada wszystkie krawędzie jednego typu (każda krawędź transponowana jest na inną krawędź przez os symetrii lub przez złożenie dwóch symetrii). Natomiast są dwa potencjalnie różne typy wierzchołków: A i B , ponieważ przeciwległe wierzchołki przekształcają się na siebie poprzez os symetrii wzdłuż przekątnej, która nie przechodzi przez te wierzchołki.

5.3 Typy symetrii płytek 5-kątnych oraz typy ich krawędzi i wierzchołków

Zgodnie z Lematem 5.2 otrzymujemy jedynie cztery typy symetrii: D_1 , D_5 , C_1 oraz C_5 . Poniżej zamieszczam ilustracje tych klepek jako pięciokątów foremnych, stosując analogiczne oznaczenia jak w przypadku płytek 3-kątnych i 4-kątnych. Tak jak w Podrozdziałach 5.1 i 5.2 musimy pamiętać, że są to tylko schematyczne uproszczenia, gdyż kształt płytek może być w rzeczywistości rozmaity. W każdą klepkę wpisano symbol, który reprezentuje dany typ symetrii, zaznaczono typy krawędzi oraz potencjalne typy wierzchołków (Rysunek 14).



Rysunek 14. Typy symetrii klepek 5-kątnych

(51) Pierwsza płytka jest niesymetryczna. Wpisano w nią literę F, która nie posiada nietrywialnych symetrii. Klepka ta posiada pięć potencjalnie różnego typu wierzchołków: A, B, C, D i E oraz pięć typów niesymetrycznych krawędzi: a, b, c, d i e .

(52) Druga klepka przedstawia typ symetrii obrotowej C_5 – symetriami płytki są obroty o wielokrotności kąta 72° wokół ustalonego punktu S leżącego wewnątrz płytki. Wierzchołki cyklicznie na siebie przechodzą, dlatego wszystkie są tego samego. Krawędzie również przechodzą na siebie przez obrót, są tego samego typu i są niesymetryczne.

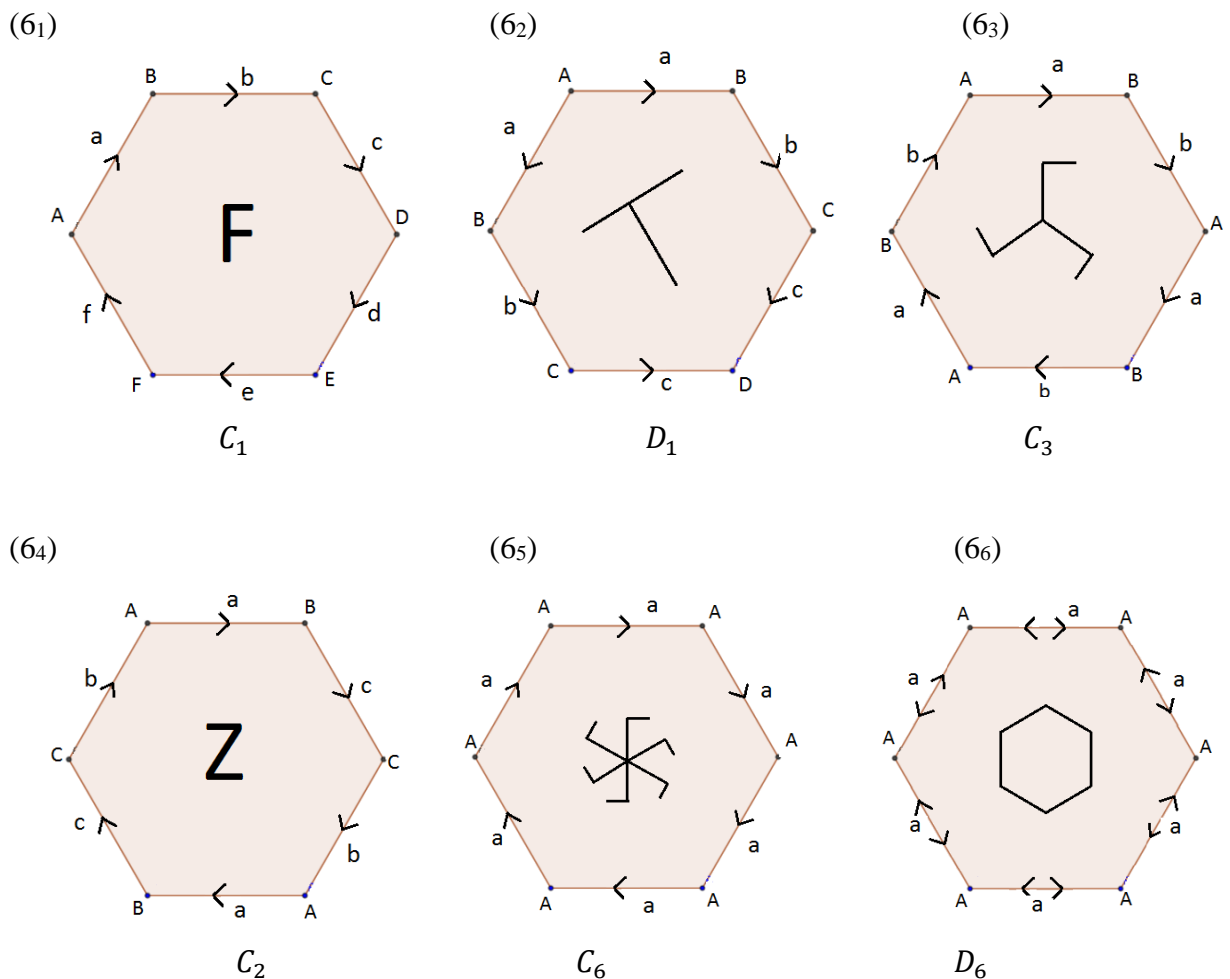
(53) Trzecia płytka posiada typ symetrii kalejdoskopowej D_5 , kiedy posiada pięć osi symetrii, każda wzdłuż symetralnej jednego z boków i przechodząca przez jeden z wierzchołków. Każdy

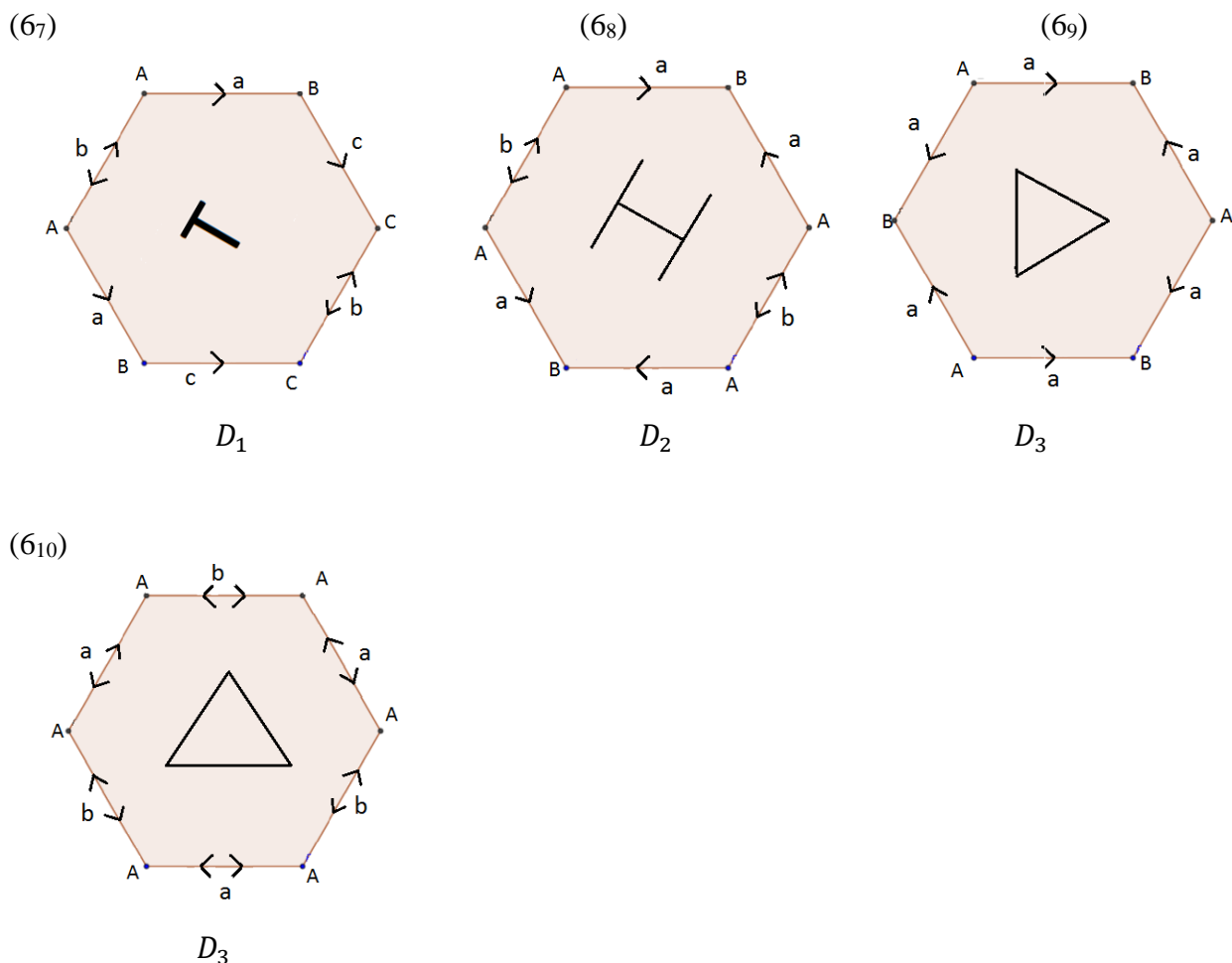
wierzchołek przekształca się na sąsiedni poprzez jedną z tych osi, dlatego każdy jest tego samego typu. Podobnie jest z krawędziami, również są jednego typu i dodatkowo wszystkie są symetryczne.

(54) Czwarta płytka przedstawia typ symetrii kalejdoskopowej D_1 . W tym przypadku jest tylko jedna oś symetrii wzdłuż symetralnej tylko jednego boku i przechodząca przez jeden wierzchołek. Łatwo zauważyć na Rysunku (54), że dwie pary wierzchołków przekształcają się na siebie. W związku z tym są trzy potencjalnie różne typy wierzchołków: A, B i C oraz trzy typy krawędzi: dwie niesymetryczne: a i b i jedna symetryczna c .

5.4 Typy symetrii płytek 6-kątnych oraz typy ich krawędzi i wierzchołków

Zgodnie z Lematem 5.2 powinniśmy otrzymać osiem typów symetrii: $D_1, D_2, D_3, D_6, C_1, C_2, C_3$ oraz C_6 . Jednakże jest ich dziesięć. Jest tak, ponieważ typy kalejdoskopowe D_1 i D_3 mogą być różne. Zależy, czy osie symetrii przechodzą przez wierzchołki, czy nie. Poniżej (Rysunek 15) zamieszczam rysunki tych klepek jako sześciokąty foremne, stosując ponownie analogiczne oznaczenia. Ponownie musimy pamiętać, że są to tylko schematyczne uproszczenia, gdyż kształt płytek może być w rzeczywistości rozmaity. W każdą klepkę wpisano symbol, który reprezentuje dany typ symetrii oraz zaznaczono typy krawędzi i potencjalne typy wierzchołków.





Rysunek 15. Typy symetrii klepek 6-kątnych

(6₁) Pierwsza klepka jest niesymetryczna, dlatego posiada sześć typów krawędzi niesymetrycznych: a, b, c, d, e i f oraz sześć potencjalnie różnych typów wierzchołków: A, B, C, D, E i F .

(6₂) Kolejna klepka przedstawia typ symetrii kalejdoskopowej D_1 . Posiada tylko jedną oś symetrii wzdłuż dłuższej przekątnej sześciokąta. Ma cztery potencjalnie różne typy wierzchołków: A, B, C i D , które w dalszych rozważaniach mogą okazać się w rzeczywistości tych samych typów i tak jak widać na rysunku 6₂ są trzy typy krawędzi, ponieważ przekształcają się na siebie przez oś symetrii i są niesymetryczne: a, b i c .

(6₃) Trzecia klepka to typ symetrii obrotowej C_3 – symetriami klepki są obroty o wielokrotności kąta 120° wokół ustalonego punktu S leżącego wewnątrz klepki. Co drugi wierzchołek jest transponowany cyklicznie na siebie, dlatego są dwa potencjalnie różne typy wierzchołków: A i B . Podobnie jest z krawędziami, co druga przechodzi na siebie przez obrót wokół punktu S , więc są dwa typy niesymetrycznych krawędzi: a i b .

(6₄) Następną płytką to typ symetrii obrotowej C_2 i jej symetriami są obroty o wielokrotności kąta 180° . Trzy pary przeciwległych krawędzi przechodzą na siebie poprzez ten obrót (zatem mamy trzy typy krawędzi niesymetrycznych a, b i c). Tak samo jest z wierzchołkami, są trzy potencjalnie różne typy: A, B i C .

(6₅) Piąta klepka to typ symetrii obrotowej C_6 i jej symetrami są obroty o wielokrotności kąta 60° wokół punktu S . Każdy wierzchołek przechodzi na sąsiedni przez obrót wokół punktu S , zatem wszystkie są tego samego typu A . Analogicznie, każda krawędź przechodzi cyklicznie na sąsiednią, stąd wszystkie są tego samego typu a .

(6₆) Szósta klepka to typ symetrii kalejdoskopowej D_6 i posiada ona sześć osi symetrii: trzy wzdłuż symetralnych przeciwległych boków i trzy wzdłuż dłuższych przekątnych sześciokąta. W związku z tym płytka ta ma wszystkie wierzchołki tego samego typu A oraz wszystkie krawędzie tego samego typu a i dodatkowo wszystkie są symetryczne.

(6₇) Kolejna klepka to również typ symetrii kalejdoskopowej D_1 – osią symetrii klepki jest jedna prosta wzdłuż symetralnej jednej pary boków przeciwległych. Tak jak to widać na rysunku 6₇ dwie krawędzie są symetryczne i są różnych typów: b i d . Natomiast cztery krawędzie niesymetryczne są parami różnych typów: a i c . Klepka posiada trzy potencjalnie różne typy wierzchołków: A , B i C , ponieważ pary wierzchołków przekształcają się na siebie wzajemnie poprzez tę jedną oś symetrii.

(6₈) Ósma klepka przedstawia typ symetrii kalejdoskopowej D_2 . Klepka ta posiada dwie osie symetrii: jedna wzdłuż symetralnej jednej pary boków równoległych i jedna wzdłuż dłuższej przekątnej. W tym przypadku mamy dwie krawędzie symetryczne tego samego typu b i cztery krawędzie niesymetryczne tego samego typu a . Podobnie, klepka posiada dwa wierzchołki tego samego typu B i cztery wierzchołki tego samego typu A .

(6₉) Następną klepką przedstawia również typ symetrii kalejdoskopowej D_3 i ma trzy osie symetrii wzdłuż wszystkich trzech dłuższych przekątnych sześciokąta. W związku z tym klepka ma dwa potencjalnie różne typy wierzchołków: A i B (tak jak widać to na Rysunku 6₉) oraz wszystkie krawędzie niesymetryczne i tego samego typu a .

(6₁₀) Ostatnia klepka przedstawia typ symetrii kalejdoskopowej D_3 i ma również trzy osie symetrii, tym razem wzdłuż wszystkich trzech symetralnych par przeciwległych boków. Zatem mamy sześć wierzchołków tego samego typu A oraz dwa typy krawędzi symetrycznych: a i b .

6 Typ kombinatoryczny

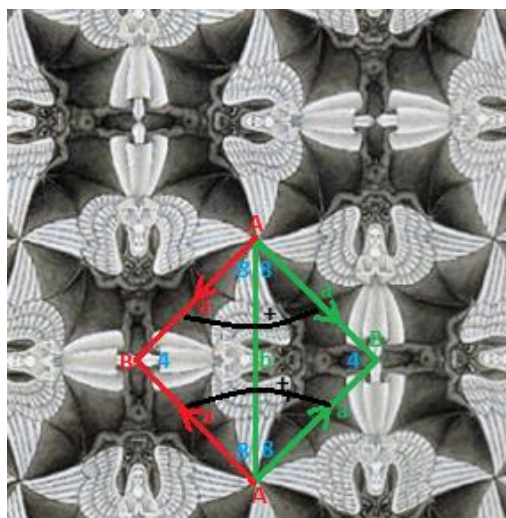
Zanim przejdziemy do ostatecznej klasyfikacji N2R-parkietazy, posłużymy się kolejnym pojęciem. Z poprzedniego rozdziału wiemy, które kątności k i m płytek poszczególnych dwóch rodzajów mogą potencjalnie współwystępować. Zastanówmy się teraz, jak rozpatrzyć wszystkie możliwe przypadki ich współwystępowania.

Tworząc N2R-parkietaż będziemy kolejno przystawiać krawędzie klepek k -kątnych do krawędzi klepki m -kątniej. O tym, w jaki sposób to zrobić, powie nam kolejne pojęcie.

Definicja 6.1. Typ kombinatoryczny N2R-parkietażu to zestaw informacji obejmujący: kątności m i k płytek poszczególnych rodzajów, ich typy symetrii, stopnie poszczególnych wierzchołków w klepkach obu rodzajów, a także informację o sposobie przylegania do siebie płytek obu rodzajów. Informacja o przyleganiu zawiera przy tym następujące dane: wzajemne jednoznaczne przyporządkowanie typom krawędzi płytki I rodzaju typów krawędzi płytki II rodzaju (odpowiadające przyleganiu płytek do siebie wzdłuż tych krawędzi w całym parkietażu), i po-

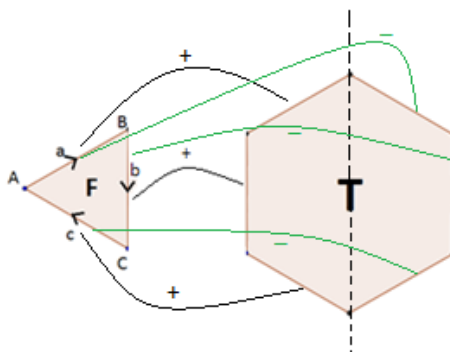
nadto, dla krawędzi o typach niesymetrycznych, dodatkowa informacja o zgodności lub niezgodności orientacji płytek przy przyleganiu wzdłuż tych krawędzi. Ostatnia informacja jest potrzebna tylko wtedy, gdy typy symetrii obu klepek nie zawierają odbić, tzn. gdy płytki nie są identyczne ze swoimi lustrzanymi odbiciami.

Schemat typu kombinatorycznego łatwo można przedstawić na przykładzie parkietażu Eschera użytego w Podrozdziale 3.2. Rysunek 16 przedstawia N2R-parkietaż, którego płytkami są klepki 3-kątne, obie o tym samym typie symetrii D_1 . Stopnie poszczególnych wierzchołków to: 4, 8, 8 (w obu płytkach), co widać na rysunku. Płytki przylegają wzdłuż krawędzi symetrycznych typu b , a krawędź typu a w płytce I rodzaju przystawiamy do krawędzi tego samego typu w klepce II rodzaju.



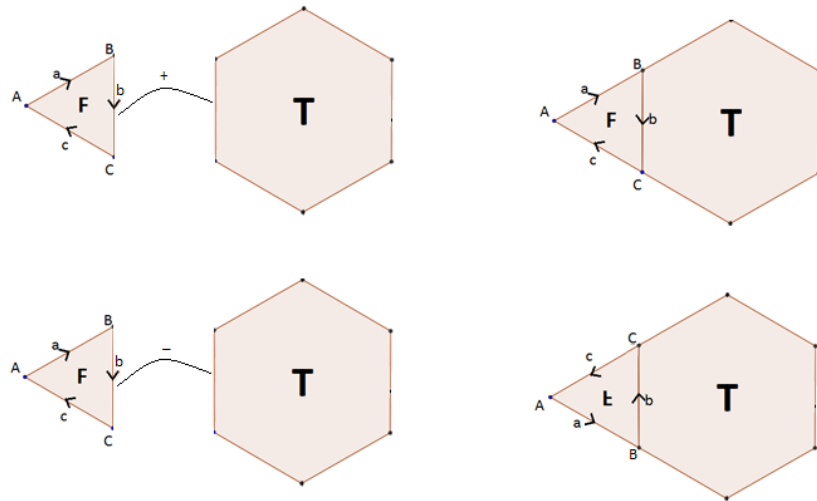
Rysunek 16.

Rysunek 17 przedstawia schemat typu kombinatorycznego, gdzie płytką pierwszego rodzaju jest 6-kąt o typie symetrii D_1 , natomiast klepką drugiego rodzaju jest 3-kąt o typie symetrii C_1 . Najpierw ustalamy jakieś wyjściowe położenie obu płytek na płaszczyźnie. Następnie przystawiamy klepki wzdłuż krawędzi tego samego typu występującej w płytkach obu rodzajów zgodnie lub niezgodnie z orientacją. Zgodność orientacji płytek oznacza, że płytka I rodzaju przylega do płytki II rodzaju bez obracania jej na drugą stronę, zaś niezgodność oznacza obrócenie płytki na drugą stronę. Zachowanie orientacji płytki będziemy oznaczać symbolem $+$, natomiast zmianę orientacji płytki symbolem $-$.



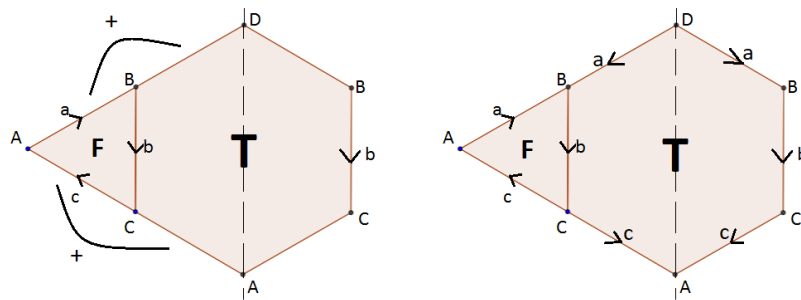
Rysunek 17.

Rysunek 18 przedstawia, co oznacza przystawienie płytek do siebie z zachowaniem lub nie orientacji.



Rysunek 18.

W dalszych częściach pracy, opisując typ kombinatoryczny, płytki obu rodzajów od razu przyłożymy do siebie wzdłuż jednej krawędzi, natomiast sposoby przylegania płytek wzdłuż pozostałych krawędzi będzie ilustrował schemat typu kombinatorycznego. Jego wygląd będziemy przedstawiać dwojako, albo za pomocą zaznaczenia, która krawędź przylega do której, wraz z symbolem $+$ lub $-$, albo od razu będziemy przypisywać typy i zwroty krawędzi na wszystkich bokach klepki II rodzaju (Rysunek 19).



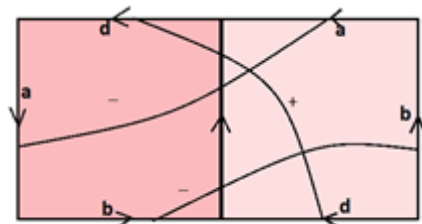
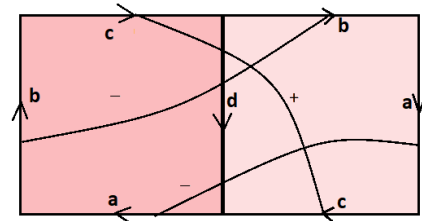
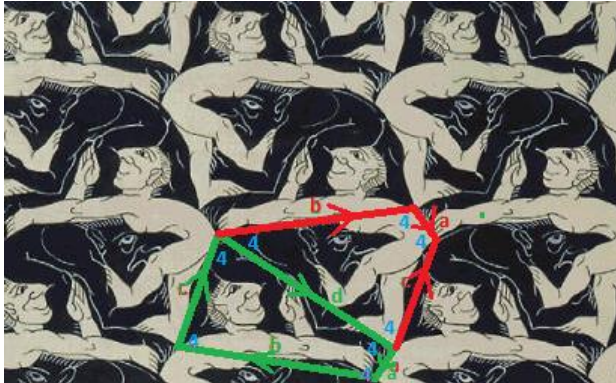
Rysunek 19. Schematy typów kombinatorycznych

Zastanówmy się, co to znaczy, że dwa typy kombinatoryczne są równoważne, czyli że mają ten sam typ.

Definicja 6.2. Mówimy, że dwa N2R-parkietaże mają ten sam typ kombinatoryczny, jeśli oba rodzaje płytek pierwszego parkietażu można tak utożsamić z oboma rodzajami płytek drugiego parkietażu (identyfikując ze sobą poszczególne wierzchołki i boki płytek), że po tym utożsamieniu wszystkie wymienione w definicji typu kombinatorycznego dane i parametry dokładnie się pokrywają.

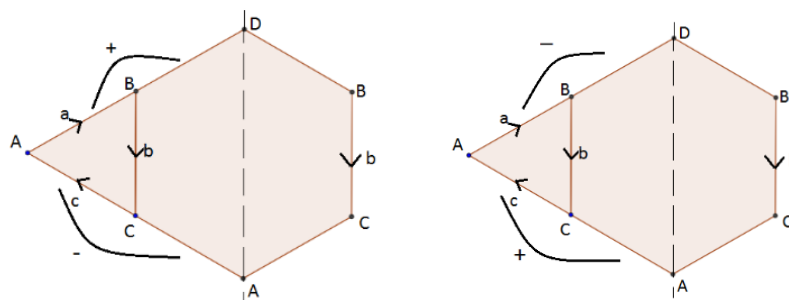
Definicję tę zilustrujemy na przykładzie dwóch pozornie różniących się N2R-parkietaży (Rysunek 20). Pierwszym z nich jest parkietaż, którego płytkami obu rodzajów są klepki 4-kątne (parkietaż z dwoma mężczyznami). Obie płytki posiadają typ symetrii C_1 , czyli są niesymetryczne, natomiast wszystkie wierzchołki N2R-parkietażu są stopnia 4. Na Rysunku 20 strzałkami i literami zaznaczony jest schemat typu kombinatorycznego, a płytki przylegają wzdłuż krawędzi typu d . Drugi z przedstawionych N2R-parkietaży również ma płytki obu rodzajów o typie symetrii C_1 i o kątności równej 4, a wszystkie wierzchołki parkietażu są również stopnia 4. Analizując przyleganie klepek parkietażu (z jaszczurką i koniem) wzdłuż krawędzi

typu c , wydaje się, że mają one inny typ kombinatoryczny. Jednakże, kiedy przyglądnijemy się przyleganiu płytek obu rodzajów wzdłuż krawędzi typu d (czyli tak jak w przypadku pierwszego parkietażu) zobaczymy, że sposób przylegania jest identyczny. Skoro wszystkie wymienione w definicji typu kombinatorycznego dane i parametry się pokrywają, to parkietaże te mają ten sam typ kombinatoryczny.



Rysunek 20. Dwa różne schematy reprezentujące ten sam typ kombinatoryczny

Typy kombinatoryczne, które są analogiczne z dokładnością do odbicia pary klepek wzdłuż wspólnej osi symetrii, np. takie jak przedstawione na Rysunku 21, również będą równoważne (symetryczne), zgodnie z Definicją 6.2.



Rysunek 21. Równoważne typy kombinatoryczne

Uwaga 6.2. *Ten sam typ kombinatoryczny może być zapisany za pomocą kilku różnych schematów.*

W kolejnych rozdziałach, analizując poszczególne potencjalne parkietaże, może się okazać, że kilka różnych schematów opisuje ten sam typ kombinatoryczny. W związku z tym, w Rozdziale 8, strategia szukania wszystkich możliwych typów kombinatorycznych będzie składać się z dwóch kroków: najpierw rozpatrywać będziemy wszystkie potencjalne schematy typów kombinatorycznych, a potem dodatkowo sprawdzimy, które z nich reprezentują jeden i ten sam typ.

7 Dalsze ograniczenia na kątność klepek

Z Rozdziału 4 wiemy, jakie potencjalne pary kątności klepek mogą występować w N2R-parkietażach. Zastanówmy się teraz, czy wszystkie przypadki warto rozpatrywać. W tym rozdziale pokażemy, że dwie spośród potencjalnych pięciu par kątności klepek nie dadzą się zrealizować w żadnym N2R-parkietażu. Można je wykluczyć dzięki równaniu na charakterystykę Eulera i zastosowaniu go dla parkietażu indukowanego na torusie, ale w sposób nieco subtelniejszy niż w Rozdziale 4.

7.1 Wykluczenie pary 3-kąt i 4-kąt

Poniżej przedstawiam analizę opcji, gdzie I rodzajem klepki jest 3-kąt, natomiast II rodzaj klepki to 4-kąt.

Posługując się informacjami zawartymi w Rozdziale 5.1 przyglądnijmy się liczbom typów krawędzi symetrycznych i niesymetrycznych w 3-kątnych płytkach o poszczególnych typach symetrii.

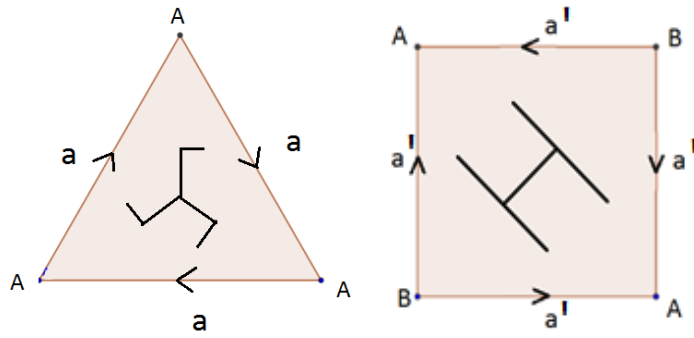
Typ symetrii:	(3 ₁)	(3 ₂)	(3 ₃)	(3 ₄)
Liczba krawędzi symetrycznych:	0	1	0	1
Liczba krawędzi niesymetrycznych:	3	1	1	0

Natomiast zgodnie z informacjami zawartymi w Rozdziale 5.2 w 4-kątnych klepkach o poszczególnych typach symetrii mamy następujące liczby typów krawędzi symetrycznych i niesymetrycznych:

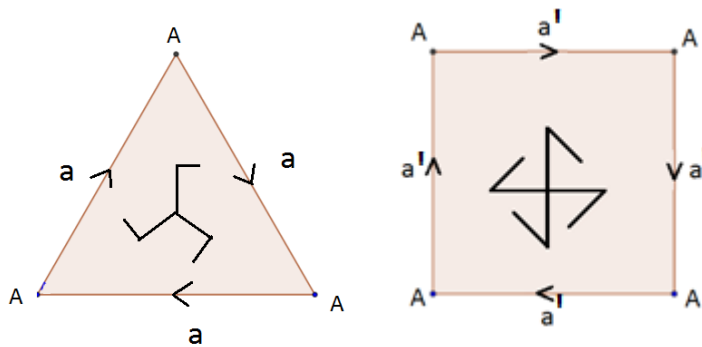
Typ symetrii:	(4 ₁)	(4 ₂)	(4 ₃)	(4 ₄)	(4 ₅)	(4 ₆)	(4 ₇)	(4 ₈)
Liczba krawędzi symetrycznych:	0	1	0	2	0	0	2	0
Liczba krawędzi niesymetrycznych:	1	0	2	1	2	4	0	1

Zgodnie z Obserwacją 5.4, jedyne potencjalne pary 3-kąt i 4-kąt, z których można potencjalnie zbudować N2R-parkietaż to pary o typach symetrii:

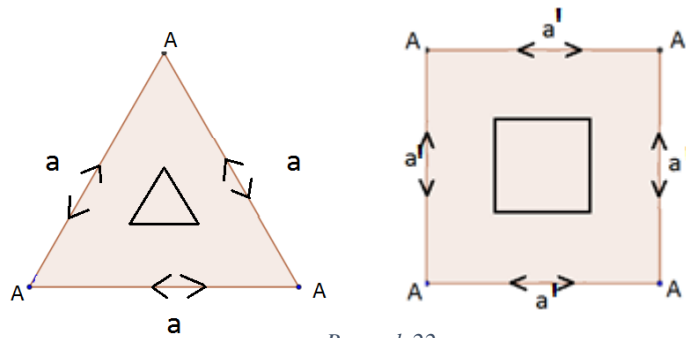
(3₃) – (4₈):



(3₃) – (4₁):



(3₄) – (4₂):



Rysunek 22.

Zauważmy, że w przypadku pary (3₃) – (4₈) 4-kąt ma potencjalnie dwa typy wierzchołków. Jednakże, kiedy tę płytkę przystawiamy z 3-kątem, który posiada wszystkie wierzchołki jednego typu, to okazuje się, że wierzchołki w tym 4-kącie również muszą być wszystkie tego samego typu. Powyższe trzy przypadki możemy rozpatrzyć jednocześnie. Niech Ω będzie parkietażem jednego z poszczególnych trzech rodzajów i niech Ω' będzie indukowanym parkietażem na pewnym torusie, tak jak jest to opisane w Podrozdziale 4.1.

Załóżmy, że w parkietażu Ω' jest t 3-kątów i c 4-kątów. Wtedy liczba krawędzi wynosi $K = 3t = 4c$, a z tego wynika, że $c = \frac{3}{4}t$. Liczba ścian wynosi zatem $S = t + c = \frac{7}{4}t$. Ustaliliśmy, że we wszystkich trzech przypadkach wszystkie wierzchołki są tego samego typu, więc liczba 3-kątnych klepek wokół wierzchołków jest stała i oznaczmy ją przez p . Wtedy liczba wszystkich wierzchołków parkietażu równa jest liczbie $W = \frac{3t}{p}$. Wiemy to, ponieważ łącznie

we wszystkich klepkach trójkątnych jest $3 \cdot t$ wierzchołków i każdy z nich jest w ten sposób liczony p razy.

Posługując się równaniem na charakterystyką Eulera dla torusa oraz podstawiając uzyskane wyrażenia otrzymujemy:

$$W - K + S = 0,$$

$$\frac{3t}{p} - 3t + \frac{7}{4}t = 0 \quad /: t \neq 0,$$

$$\frac{3}{p} - \frac{12}{4} + \frac{7}{4} = 0,$$

$$3 - \frac{5}{4}p = 0,$$

$$p = \frac{12}{5}.$$

Jednakże uzyskany wynik nie jest liczbą naturalną, stąd przypadki te nie są możliwe.

7.2 Wykluczenie pary 3-kąt i 5-kąt

Poniżej przedstawiam analizę opcji, gdzie I rodzajem klepki jest 3-kąt, natomiast II rodzaj klepki to 5-kąt.

Zgodnie z informacjami zawartymi w Rozdziale 5.1 oraz tak jak jest to opisane w Rozdziale 7.1. liczby typów krawędzi symetrycznych i niesymetrycznych w 3-kątnych klepkach o poszczególnych typach symetrii przedstawiają się następująco:

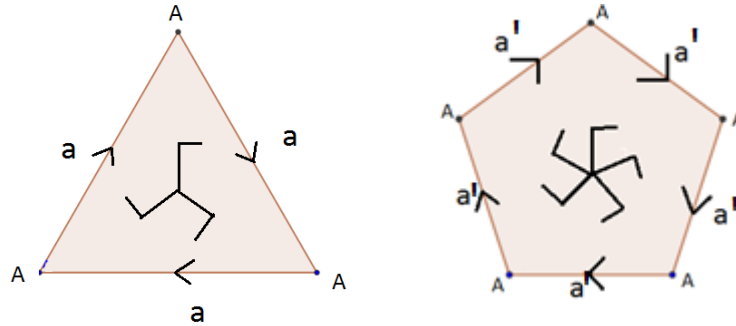
Typ symetrii:	(3 ₁)	(3 ₂)	(3 ₃)	(3 ₄)
Liczba krawędzi symetrycznych:	0	1	0	1
Liczba krawędzi niesymetrycznych:	3	1	1	0

Natomiast zgodnie z informacjami zawartymi w Rozdziale 5.3 w 5-kątnych klepkach o poszczególnych typach symetrii mamy następujące liczby typów krawędzi symetrycznych i niesymetrycznych:

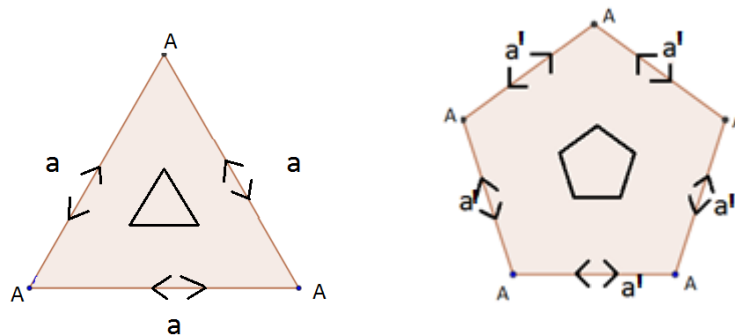
Typ symetrii:	(5 ₁)	(5 ₂)	(5 ₃)	(5 ₄)
Liczba krawędzi symetrycznych:	0	0	1	1
Liczba krawędzi niesymetrycznych:	5	1	0	2

Zgodnie z Obserwacją 5.4, jedyne potencjalne pary 3-kąt – 5-kąt, z których można zbudować N2R-parkietaż to pary o typach symetrii:

(3₃) – (5₂):



(3₄) – (5₃):



Rysunek 23.

W obu parach typów symetrii, pary klepek mają wszystkie wierzchołki tego samego typu, a zatem wszystkie wierzchołki potencjalnego parkietażu mają ten sam stopień. Do każdego wierzchołka przylega taka sama liczba płytek 3-kątnych i liczbę tę oznaczmy przez p . Rozumowanie należy przeprowadzić analogicznie jak w Rozdziale 7.1.

Analizę rozpoczynamy od rozpatrzenia parkietażu indukowanego na torusie. W związku z tym założmy, że w tym parkietażu indukowanym na torusie jest t 3-kątów i c 5-kątów. Liczba krawędzi wynosi wtedy $K = 3t = 5c$, co daje nam zależność $c = \frac{3}{5}t$. Liczba ścian to $S = t + c = \frac{8}{5}t$. Natomiast liczba wierzchołków wynosi $W = \frac{3t}{p}$, bo do każdego wierzchołka przylega p 3-kątnych klepek.

Posłużmy się równaniem na charakterystykę Eulera i podstawiając za wielkości W , K i S odpowiednie wyrażenia przedstawione powyżej otrzymujemy następujący ciąg zależności:

$$W - K + S = 0,$$

$$\frac{3t}{p} - 3t + \frac{8}{5}t = 0 \quad /: t \neq 0,$$

$$\frac{3}{p} - \frac{15}{5} + \frac{8}{5} = 0 \quad / \cdot p,$$

$$3 - \frac{7}{5}p = 0,$$

$$p = \frac{15}{7}.$$

Jednakże uzyskany wynik nie jest liczbą naturalną, stąd przypadki te również nie są możliwe.

8 Systematyczna analiza par 3-kąt i 6-kąt, 3-kąt i 3-kąt oraz 4-kąt i 4-kąt

W poniższym rozdziale przedstawię dokładną analizę pozostałych potencjalnych par kątności klepek występujących w N2R-parkietażach (Rozdział 4.2). Jeżeli potencjalna para typów symetrii klepek prowadzi do jakiegoś parkietażu, pokażę jak może wyglądać taki N2R-parkietaż. Wszystkie rysunki wykonywałam osobiście w programie GeoGebra oraz Paint.

8.1 Para 3-kąt – 6-kąt

Posługując się informacjami zawartymi w Rozdziale 5.1 i tak jak jest to opisane w Rozdziale 7.1, przyglądnijmy się liczbom typów krawędzi symetrycznych i niesymetrycznych w 3-kątnych płytkach o poszczególnych typach symetrii:

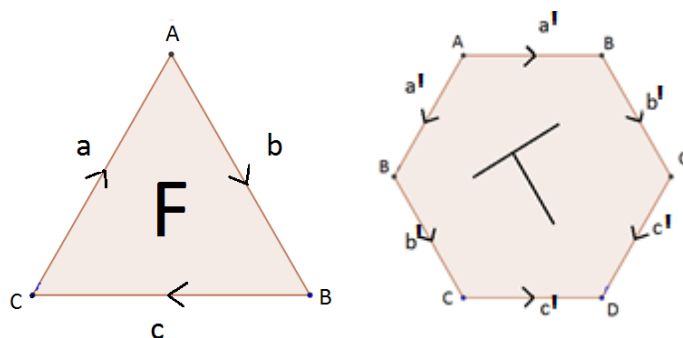
Typ symetrii:	(3 ₁)	(3 ₂)	(3 ₃)	(3 ₄)
Liczba krawędzi symetrycznych:	0	1	0	1
Liczba krawędzi niesymetrycznych:	3	1	1	0

Natomiast zgodnie z informacjami zawartymi w Rozdziale 5.4, w 6-kątnych klepkach o poszczególnych typach symetrii mamy następujące liczby typów krawędzi symetrycznych i niesymetrycznych:

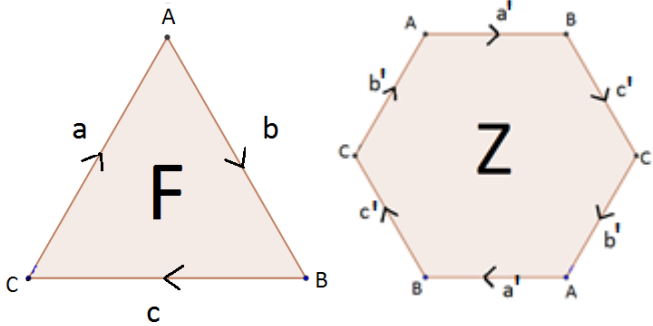
Typ symetrii:	(6 ₁)	(6 ₂)	(6 ₃)	(6 ₄)	(6 ₅)	(6 ₆)	(6 ₇)	(6 ₈)	(6 ₉)	(6 ₁₀)
Liczba krawędzi symetrycznych:	0	0	0	0	0	1	2	1	0	2
Liczba krawędzi niesymetrycznych:	6	3	2	3	1	0	2	1	1	0

Zgodnie z Obserwacją 5.4, jedyne potencjalne pary typów symetrii klepek 3-kątnych i 6-kątnych, z których można zbudować N2R-parkietaż to:

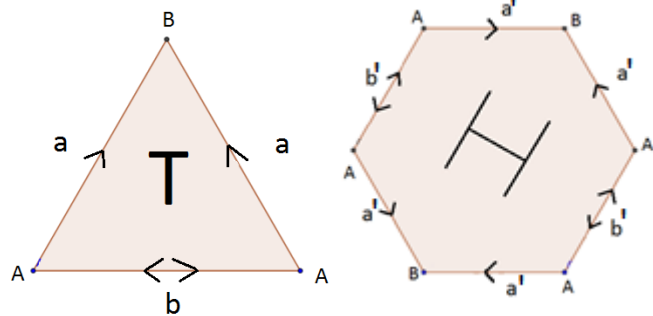
(3₁) – (6₂):



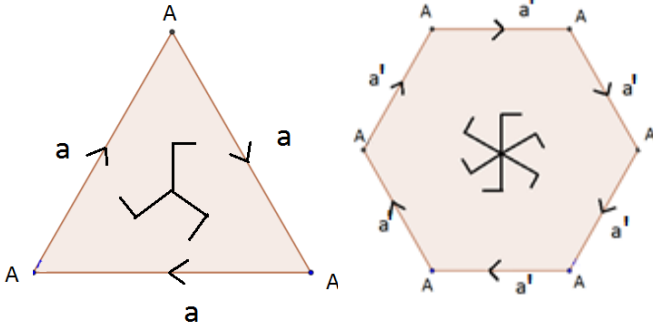
(31) – (64):



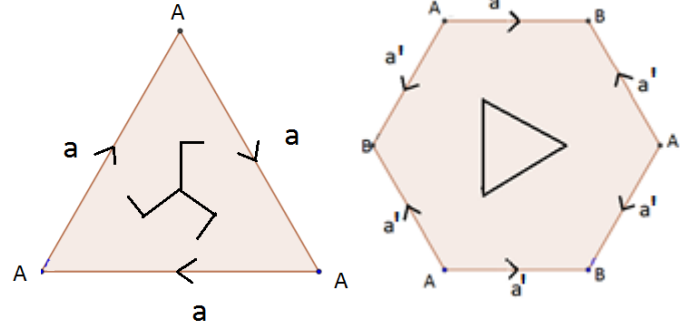
(32) – (68):



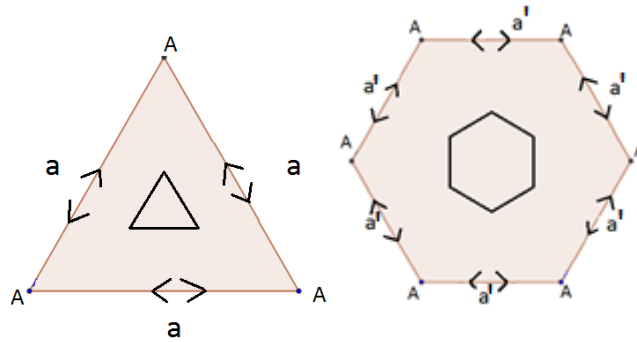
(33) – (65):



(33) – (69) :



(34) – (66):



Rysunek 24.

Lemat 8.1. *Wszystkie wierzchołki N2R-parkietażu o klepkach 3-kątnych i 6-kątnych mają stopień 4.*

Dowód Lematu 8.1.

Rozważmy dowolny N2R-parkietaż P o klepkach 3-kątnych i 6-kątnych oraz indukowany przezeń parkietaż Q na torusie. Załóżmy, że w parkietażu Q indukowanym na torusie jest t klepek 3-kątnych i s 6-kątnych. Liczba krawędzi wynosi zatem $K = 3t = 6s$, a z tego z kolei wynika, że $s = \frac{1}{2}t$. Natomiast liczba ścian to $S = t + s = \frac{3}{2}t$. Zgodnie z Lematem 4.2 zachodzi nierówność $W \leq \frac{3t}{2}$. Równość zachodzi tylko wtedy, gdy do każdego wierzchołka przylegają dokładnie dwie klepki 3-kątne. Z drugiej strony, z charakterystyki Eulera widać, że: $0 = W - K + S = W - 3t + \frac{3t}{2} = W - \frac{3t}{2}$. Zatem otrzymujemy $W = \frac{3t}{2}$, co oznacza, że wokół każdego wierzchołka są dokładnie dwie klepki 6-kątne i dwie klepki 3-kątne, występujące na przemian. To zaś oznacza, że każdy wierzchołek ma stopień 4. □

Przechodzimy teraz do sprawdzenia, czy wyżej wymienione potencjalne pary typów symetrii płytek prowadzą do jakichś parkietaży. A jeśli tak, to wyznaczymy wszystkie możliwe typy kombinatoryczne.

Zgodnie z Obserwacją 5.4, każdemu typowi krawędzi w klepce trójkątnej odpowiada dokładnie jeden typ krawędzi w klepce sześciokątnej (para typów przyległych). Ponadto, tak jak to mówi Definicja 6.1 typu kombinatorycznego, płytki przylegają do siebie wzdłuż każdej pary typów przyległych tych krawędzi albo w taki sposób, że płytki przylegają przez przesunięcie ich do siebie daną krawędzią (co będziemy oznaczać symbolem +) albo w taki sposób, że po przesunięciu klepki jednego rodzaju do klepki drugiego rodzaju, tę którą przystawiamy musimy obrócić „na drugą stronę” (co będziemy oznaczać symbolem -).

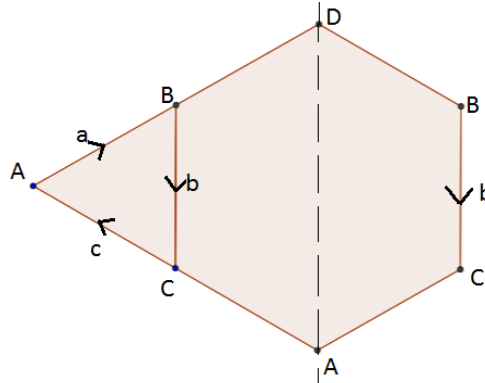
Dla uproszczenia rozważań, bez straty ogólności przyjmiemy jedną parę typów przyległych jako zadaną z góry, co graficznie zilustrujemy po prostu zestawieniem ze sobą płytki trójkątnej z sześciokątną wzdłuż jednej pary boków.

Następnie rozważymy wszystkie możliwe potencjalne kombinacje przyległych par dla pozostałych typów boków, wraz z kombinacjami zgodności lub przeciwności orientacji (oznaczonych symbolami + lub -), czyli przedstawimy schematy wszystkich potencjalnych typów kombinatorycznych.

Wypiszemy teraz wszystkie schematy typów kombinatorycznych i następnie sprawdzimy, czy prowadzą one do N2R-parkietaży.

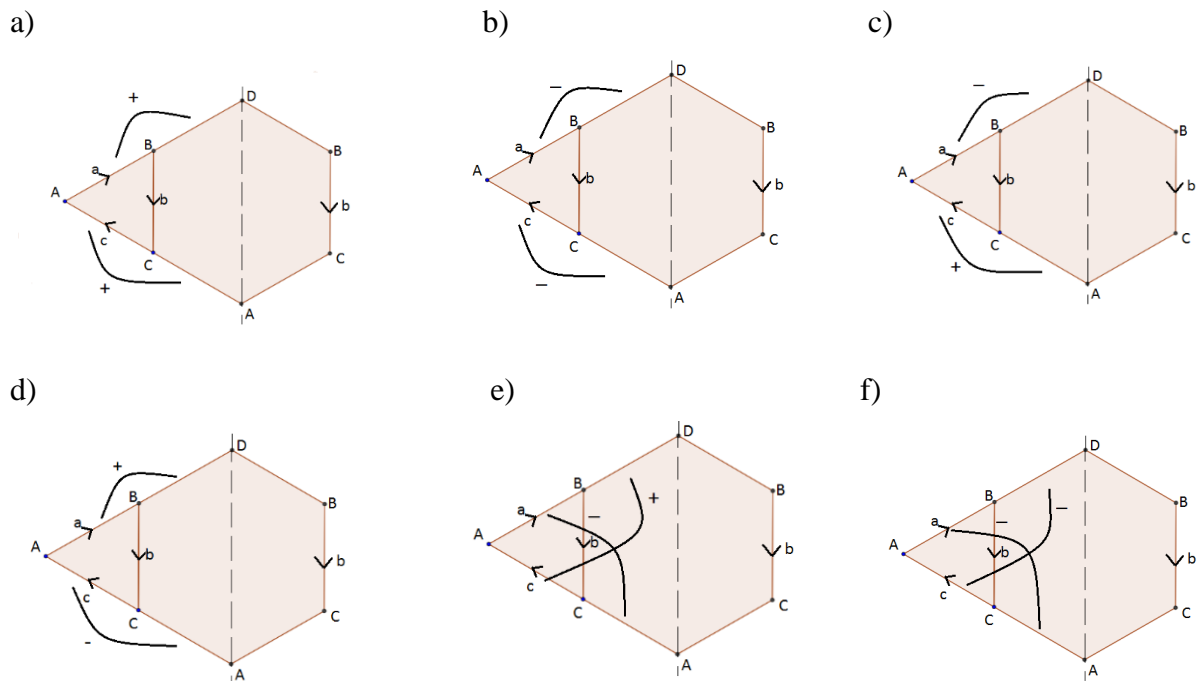
Para typów symetrii (3₁) – (6₂)

Pierwszego przyłożenia do siebie płytek dokonujemy wzdłuż krawędzi płytki sześciokątnej rozłącznej z jej osią symetrii. Krawędź o typie oznaczonym literą *b* odbija się względem osi symetrii płytki sześciokątnej, dając drugą krawędź tego samego typu *b* (Rysunek 25).

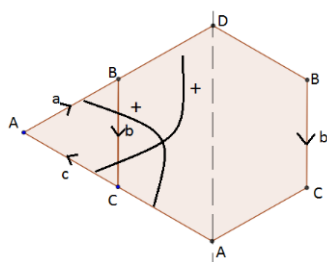


Rysunek 25.

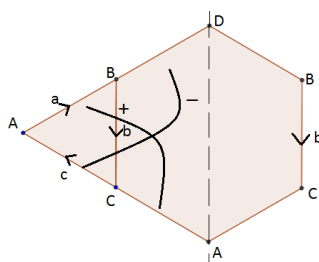
Tworząc N2R-parkietaż będziemy kolejno przystawiać krawędzie klepek trójkątnych do krawędzi klepki sześciokątnej. Na ilustracjach Rysunku 26 narysowane są linie, które obrazują, które krawędzie przystawiamy oraz z jaką orientacją. W związku z tym, że sześciokątna płytka jest symetryczna, do pozostałych (nie zaznaczonych linią) boków płytki trójkątne będą przystawiać w sposób wynikający z opisu przylegania boków zaznaczonych linią. Wszystkie potencjalne kombinacje linii i znaków opisujących typ kombinatoryczny przedstawione są na Rysunku 26.



g)

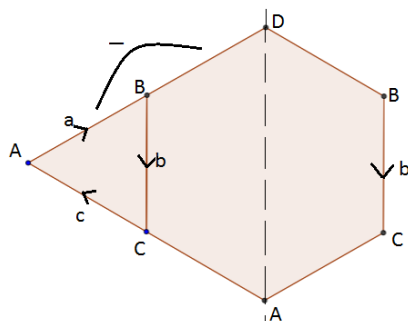


h)



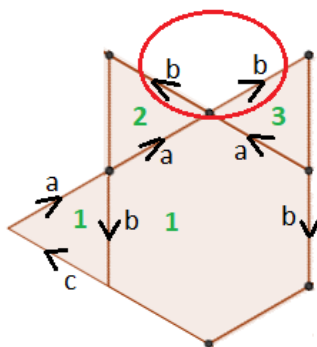
Rysunek 26.

Teraz zaczniemy analizę przypadków, przystawiając płytki trójkątne do sześciokątnych zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego. Łatwo zauważyć, że zamiast wypisywać i sprawdzać wszystkie osiem przypadków, niektóre z nich można zbiorowo odrzucić. Ograniczając się do jednego przystawienia (zobrazowanego na Rysunku 27) odrzucimy wspólnym argumentem trzy przypadki.



Rysunek 27.

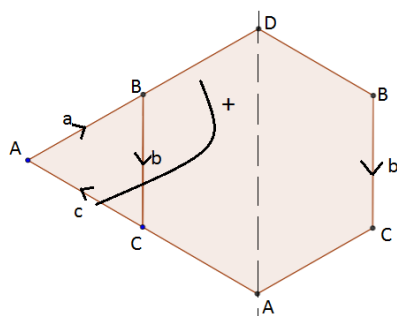
Zaczynamy od dwóch pierwszych zestawionych ze sobą płytek, które oznaczamy numerami 1. Następnie zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego przystawiamy do 6-kątnej płytki o numerze 1 płytki 3-kątne (symbolizują to zielone numery 2 i 3). Jak już wcześniej wspomnieliśmy, okazuje się, że kolejna płytka sześciokątna, która powinna przylegać do 3-kątnych płytek o numerach 2 i 3 ma widoczne typy krawędzi niezgodne ze schematem ustalonym na wyjściowej płytce 6-kątnej. Obrazuje to Rysunek 28.



Rysunek 28.

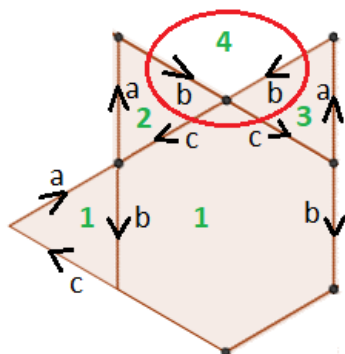
W związku z tym możemy od razu wykluczyć przypadki b), c) oraz d) z Rysunku 26. Przypadek d) jest analogiczny do przypadku c) zgodnie z Definicją 6.2 typów kombinatorycznych równoważnych z Rozdziału 6.

Podobnie, rozważając schemat typu kombinatorycznego z poniższego Rysunku 29, możemy wykluczyć inne trzy przypadki.



Rysunek 29.

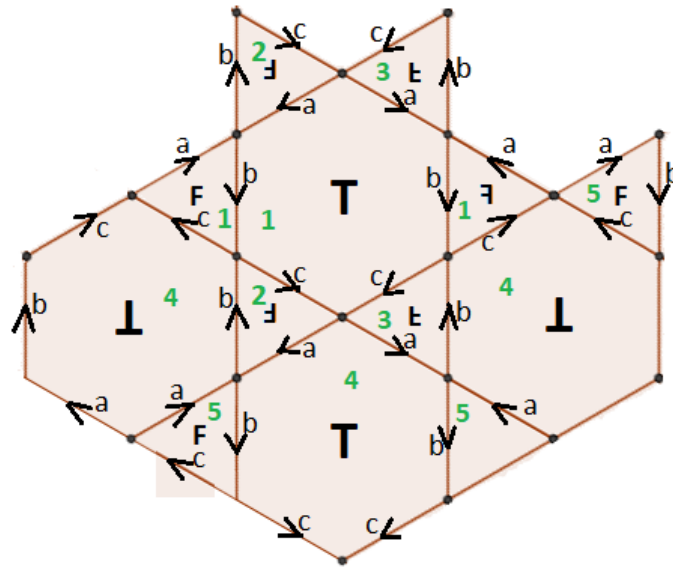
Żeby to zobaczyć, najpierw przystawiamy do siebie wyjściowe płytki, które oznaczamy numerem 1. Następnie, zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego przystawiamy do płytki 6-kątnej, zgodnie z orientacją, 3-kątne klepki o numerach 2 i 3. Znowu okazuje się, że wtedy płytka o numerze 4 to płytka 6-kątna, w której widoczne typy krawędzi nie zgadzają się ze schematem ustalonym na wyjściowej płytce 6-kątnej.



Rysunek 30.

Analiza opisana na Rysunku 30 wyklucza trzy przypadki e), g) oraz h). Ten ostatni jest analogicznym przypadkiem do e). Wynika to z definicji typu kombinatorycznego zawartej w Rozdziale 6. Zostają nam do rozważenia przypadki a) oraz f) z Rysunku 26.

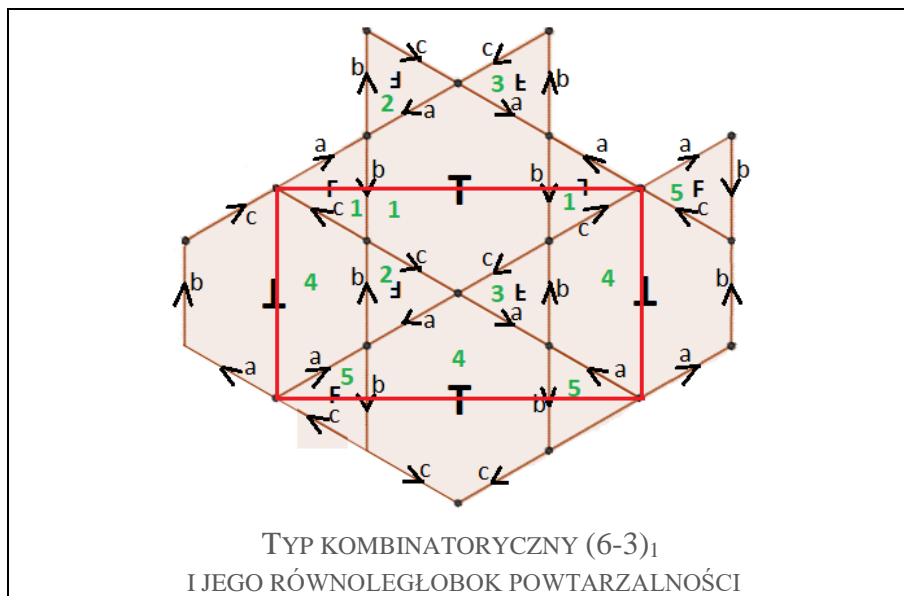
Ad. a) Na Rysunku 31 zaznaczone są kolorem zielonym płytki, w kolejności przystawiania. Na początku zestawiamy ze sobą klepki wyjściowe o numerze 1. Następnie, zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego przystawiamy płytki 3-kątne (oznaczone numerem 2). Płytki o numerze 3 są odbiciem płytek o numerze 2 względem osi symetrii płytki 6-kątnej. Przystawianie kolejnych płytek następuje zgodnie z ustalonym schematem, w kolejności wskazanej kolejnymi oznaczeniami numerowymi.



Rysunek 31.

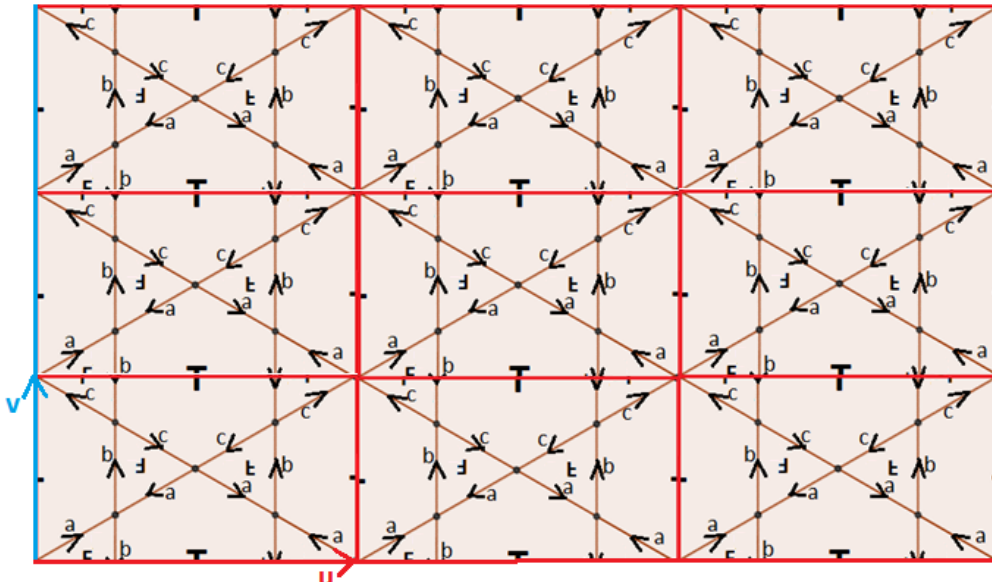
Dostawianie całej serii płytek nie prowadzi na razie do żadnej sprzeczności. Jak moglibyśmy się przekonać, że powyższy typ kombinatoryczny prowadzi do N2R-parkietażu? Co znaczy, że dana reguła pozwala zbudować parkietaż na całej płaszczyźnie?

Posłużmy się pojęciem **równoległoboku powtarzalności**. Aby znaleźć taki równoległobok najpierw (zaczynając od pary wyjściowych płytek) przystawiamy klepki zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego do momentu, aż odnajdziemy płytkę, która jest obrazem przez translację o pewien wektor \vec{u} jednej z wyjściowych płytek. Kiedy znajdziemy drugą płytkę (również będącą obrazem przez translację o pewien wektor \vec{v} , o innym kierunku niż \vec{u}) otrzymamy równoległobok rozpięty na tych wektorach i będziemy nazywać go **równoległobokiem powtarzalności**. Jeśli dany typ kombinatoryczny prowadzi do N2R-parkietażu, to równoległobok powtarzalności będziemy zaznaczać czerwonym kolorem, tak jak na Rysunku 32. W tym przypadku równoległobok taki jest prostokątem.



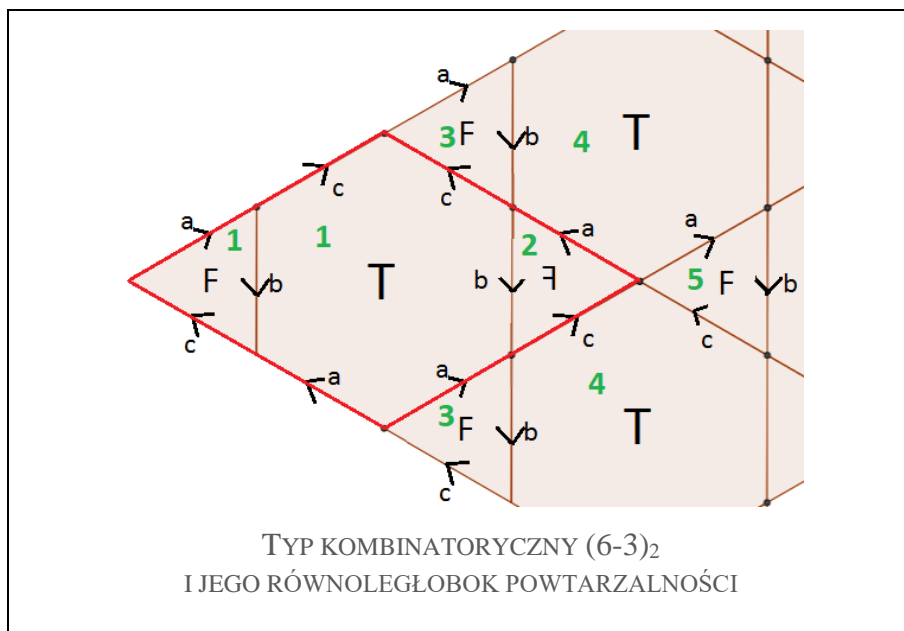
Rysunek 32.

Mając taki równoległobok powtarzalności, wypełnimy całą płaszczyznę przesuniętymi kopiami takich równoległoboków, otrzymując N2R-parkietaż całej płaszczyzny zgodny z przyjętym typem kombinatorycznym (Rysunek 33). Równoległobok ten pozwolił nam przekonać się, że mamy do czynienia z prawdziwym, a nie tylko potencjalnym typem kombinatorycznym N2R-parkietażu. Typ ten oznaczymy symbolem $(6-3)_1$.



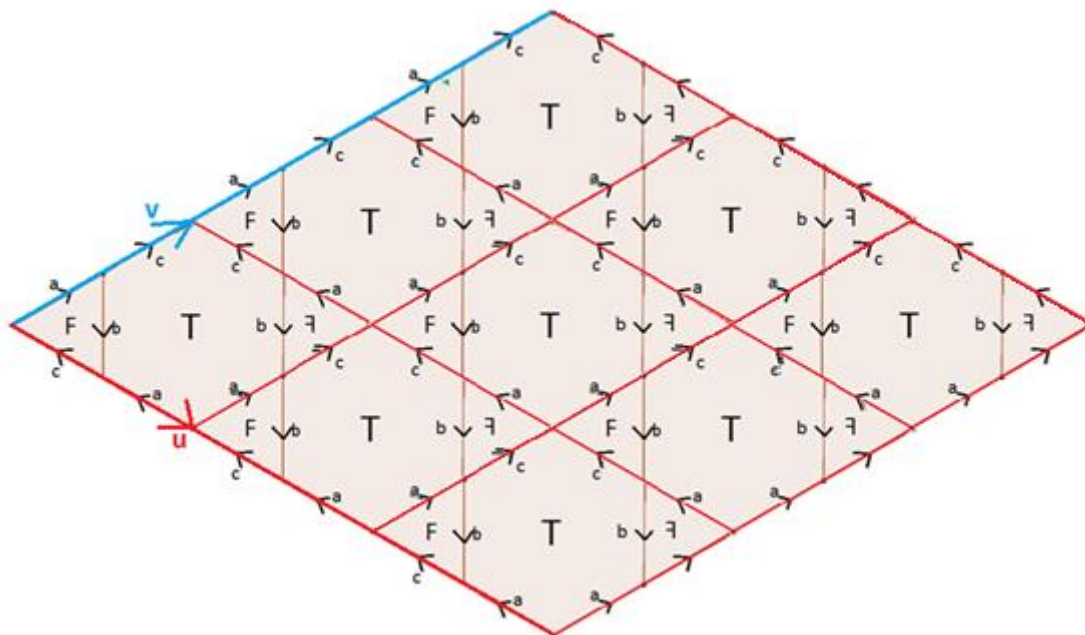
Rysunek 33. N2R-parkietaż utworzony z typu kombinatorycznego $(6-3)_1$

Ad. f) W tym przypadku, postępując analogicznie jak to jest opisane w podpunkcie a), również otrzymamy N2R-parkietaż (Rysunek 34).



Rysunek 34.

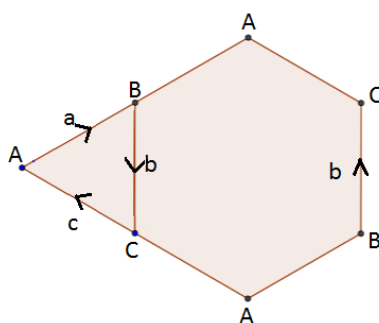
Odkrywamy kolejny typ kombinatoryczny prawdziwego N2R-parkietażu. Oznaczmy go symbolem $(6-3)_2$ (Rysunek 34). Równoległobok powtarzalności ukazany jest na Rysunku 34, zaś fragment parkietażu utworzonego przez zestawienie równoległoboków na Rysunku 35.



Rysunek 35. N2R-parkietaż utworzony z typu kombinatorycznego $(6-3)_2$

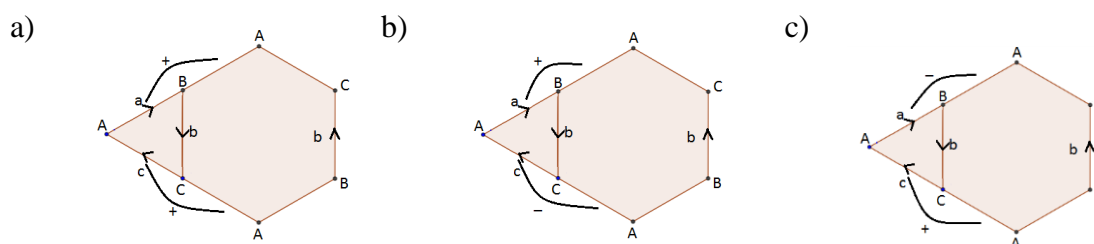
Para typów symetrii $(3_1) - (6_4)$

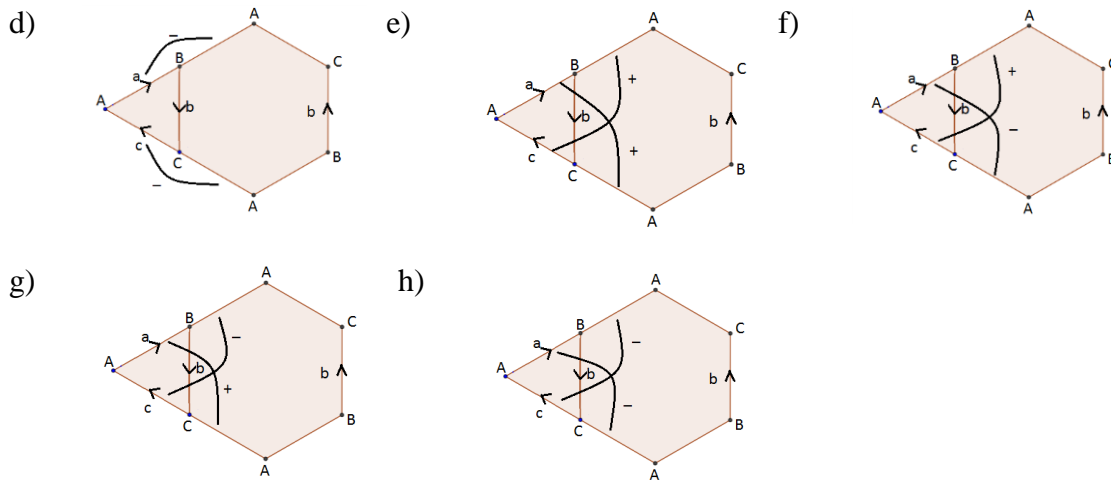
Przechodzimy do analizy typów kombinatorycznych potencjalnych N2R-parkietażu, których klepki mają typ symetrii 3_1 oraz 6_4 . W tym przypadku płytka 6-kątna posiada typ symetrii C_2 , a więc jest obrotowo symetryczna względem obrotu o kąt 180° wokół pewnego punktu. Dlatego krawędź typu b pojawi się również jako przeciwległy bok 6-kąta, jak to zostało pokazane na Rysunku 36.



Rysunek 36.

Tworząc potencjalny parkietaż będziemy kolejno przystawiać boki klepek 3-kątnych do boków klepki 6-kątnej. Poniżej, na Rysunku 37, prezentują się wszystkie możliwe sposoby przystawienia płytek. Jak poprzednio, pozostałe boki 6-kąta są tych samych typów co boki z wyznaczonymi regułami przylegania. Zatem reguły te wyznaczają też reguły dla tamtych boków.

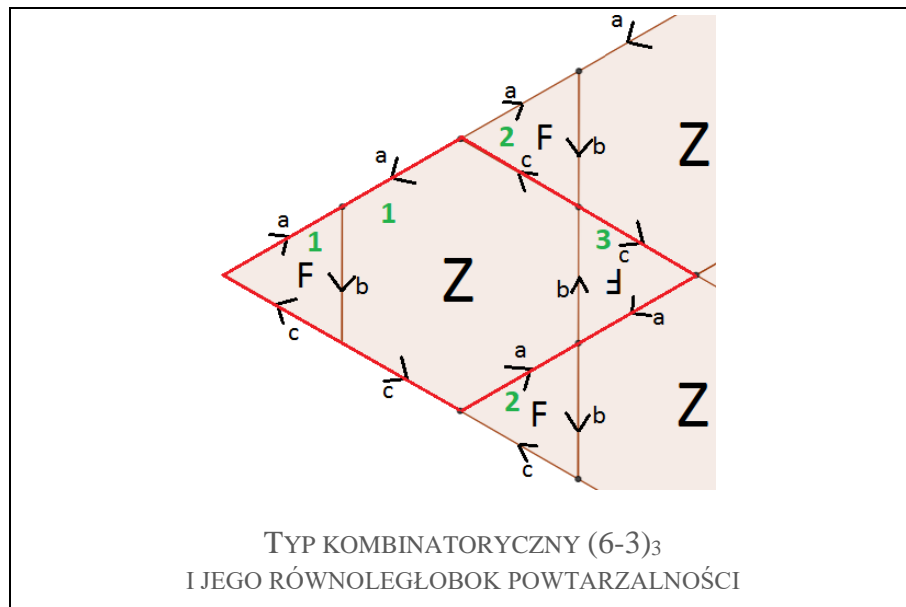




Rysunek 37.

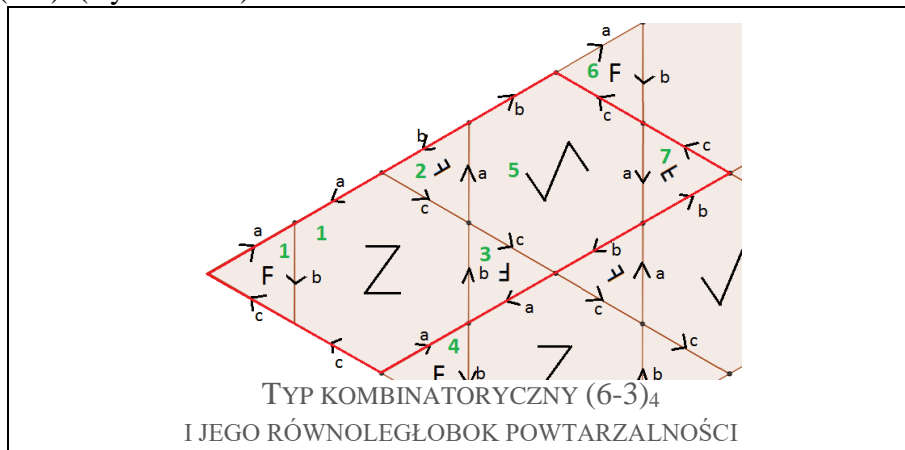
Teraz zaczniemy analizę wszystkich przypadków, przystawiając płytki 3-kątne do 6-kątnych zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego. Liczby zaznaczone na poszczególnych płytkach obrazują kolejność przystawiania. Równoległobok powtarzalności otrzymamy, jeśli znajdziemy dwie płytki, które są obrazem poprzez translację w różnych kierunkach wyjściowej płytki trójkątnej oznaczonej zawsze numerem 1.

Ad. a) Otrzymujemy kolejny typ kombinatoryczny prawdziwego N2R-pakiteażu oznaczony symbolem $(6-3)_3$ (Rysunek 38).



Rysunek 38.

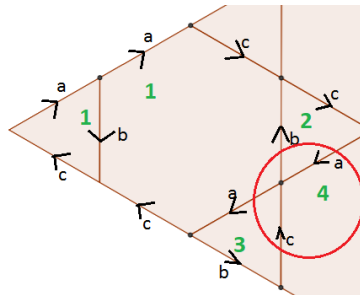
Ad. b) Otrzymujemy kolejny typ kombinatoryczny prawdziwego N2R-parkietażu oznaczony symbolem $(6-3)_4$ (Rysunek 39).



Rysunek 39.

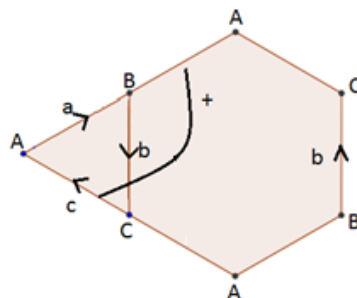
Ad. c) Przypadek ten jest równoważny do b) z dokładnością do odbicia pary klepek wzdłuż wspólnej osi symetrii. O równoważności typów kombinatorycznych mówi definicja typu kombinatorycznego umieszczona w Rozdziale 6.

Ad. d) Przystawiając kolejno płytki, zgodnie z numeracją jak na Rysunku 40, okazuje się, że płytką o numerze 4 (6-kątna) ma inny zwrot krawędzi niż płytką wyjściową. Jak poprzednio, oznacza to, że reguły przylegania z przypadku d) są sprzeczne z warunkami definicji regularności parkietażu.



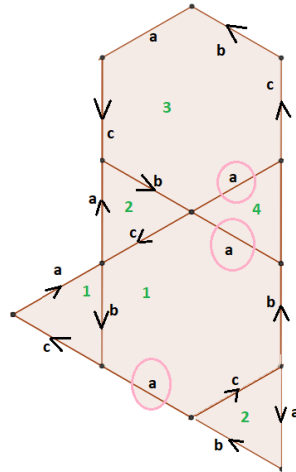
Rysunek 40.

Okazuje się, że również w tym przypadku da się odrzucić kilka dalszych przypadków z Rysunku 37, rozpatrując sposób przylegania tylko jednej pary krawędzi (Rysunek 41).



Rysunek 41.

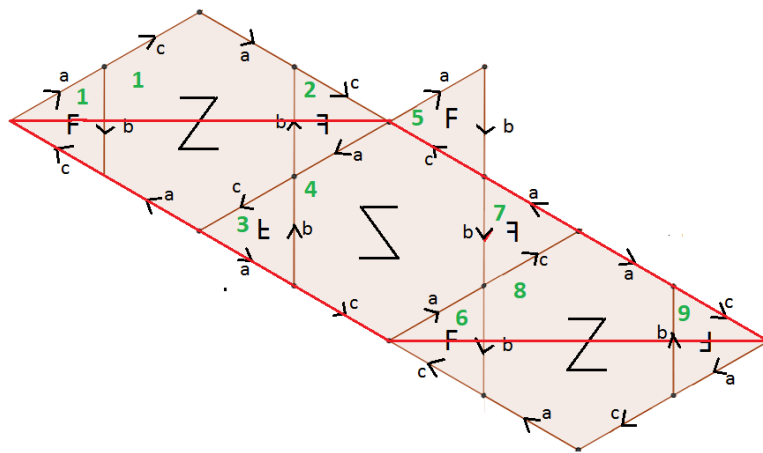
Na początek przystawiamy do siebie wyjściowe płytki o numerach 1. Następnie, zgodnie z typem kombinatorycznym, przystawiamy dwie klepki 3-kątne o numerze 2 pamiętając, że płytką 6-kątną ma typ symetrii obrotowej. Wtedy dwie pozostałe krawędzie klepki 6-kątnej muszą być typu a . W kolejnym kroku przystawiamy płytkę 6-kątną z numerem 3 i okazuje się, że płytką 3-kątną (numer 4) powinna mieć dwie krawędzie typu a , co jest sprzeczne z jej typem symetrii



Rysunek 42

Sposób przylegania jednej pary krawędzi, który opisuje Rysunek 41, pojawia się w trzech przypadkach: e), f) oraz g) z Rysunku 37. Oznacza to, że argument z powyższego akapitu wyklucza naraz te trzy przypadki. Pozostaje nam do rozważenia przypadek h).

Ad. h) Przystawiając kolejno płytki zgodnie z numeracją okazuje się, że 3-kątne płytki o numerach 5 i 6 są obrazem przez translację wyjściowej płytki trójkątnej, dzięki czemu otrzymujemy równoległobok powtarzalności. Mamy kolejny typ kombinatoryczny prawdziwego N2R-parkietażu (Rysunek 43).

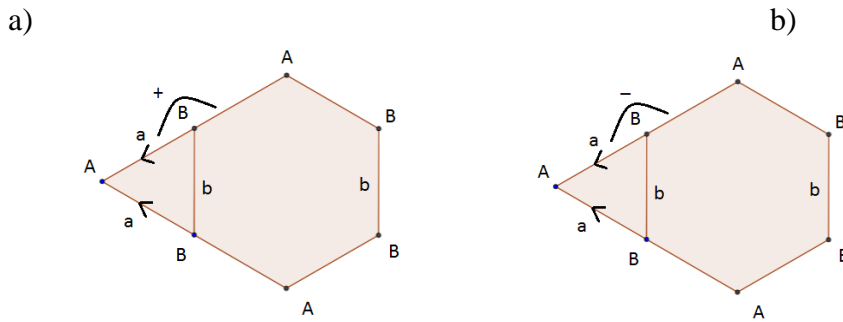


Rysunek 43.

Okazuje się, co nie łatwo zaobserwować, że typ kombinatoryczny przypadku h) i $(6-3)_4$ są równoważne. Można to wykryć za pomocą schematu typu kombinatorycznego, gdy wyjściowy trójkąt przylegający do sześciokąta zastąpimy jednym z innych trójkątów i gdy odpowiednio dostosujemy oznaczenie boków. Zatem przypadek h) odpowiada już wcześniej znalezionemu typowi kombinatorycznemu $(6-3)_4$.

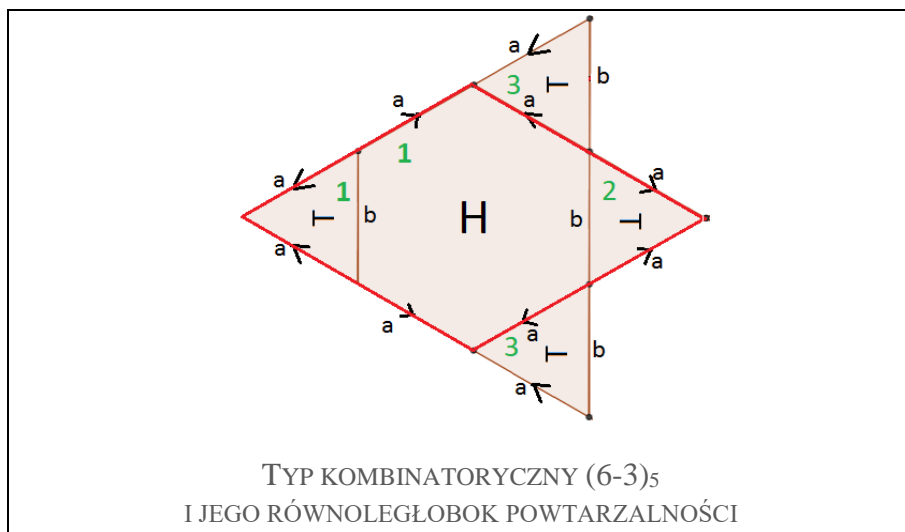
Para typów symetrii $(3_2) - (6_8)$

Ten przypadek jest charakterystyczny, ponieważ płytka 3-kątna posiada jedną krawędź symetryczną, podobnie jak płytka 6-kątna. Dlatego, zgodnie z definicją N2R-parkietażu przystawiamy oba rodzaje płytek właśnie tą krawędzią, co daje nam jedynie dwie możliwości potencjalnych parkietażu (Rysunek 44).



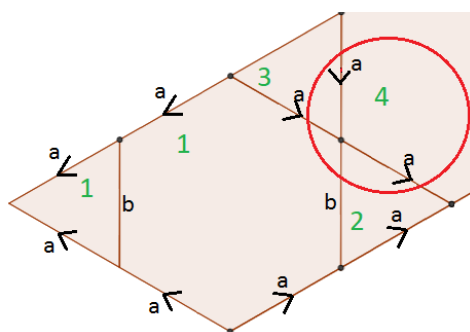
Rysunek 44.

Ad. a) Pierwszy schemat przystawiania prowadzi do prawdziwego N2R-parkietażu o poniższym równoległoboku powtarzalności (Rysunek 45).



Rysunek 45.

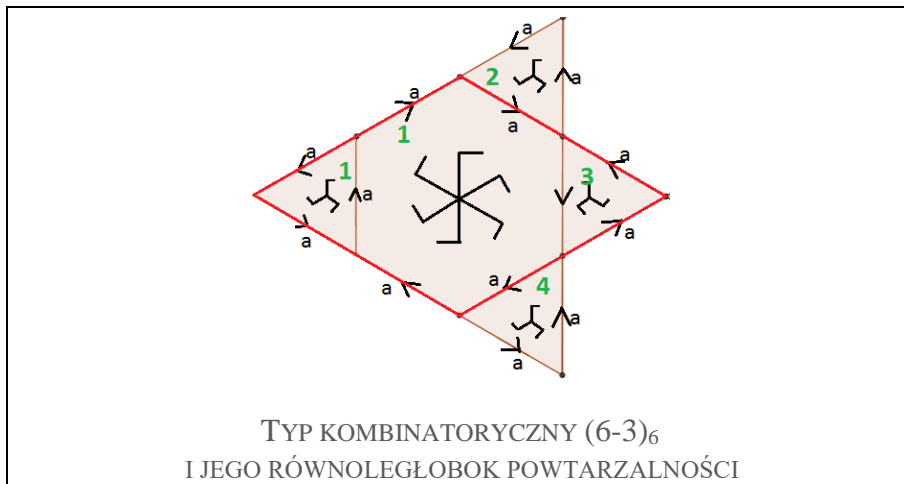
Ad. b) Drugi schemat nie pozwala zrealizować N2R-parkietażu, co ilustruje Rysunek 46.



Rysunek 46.

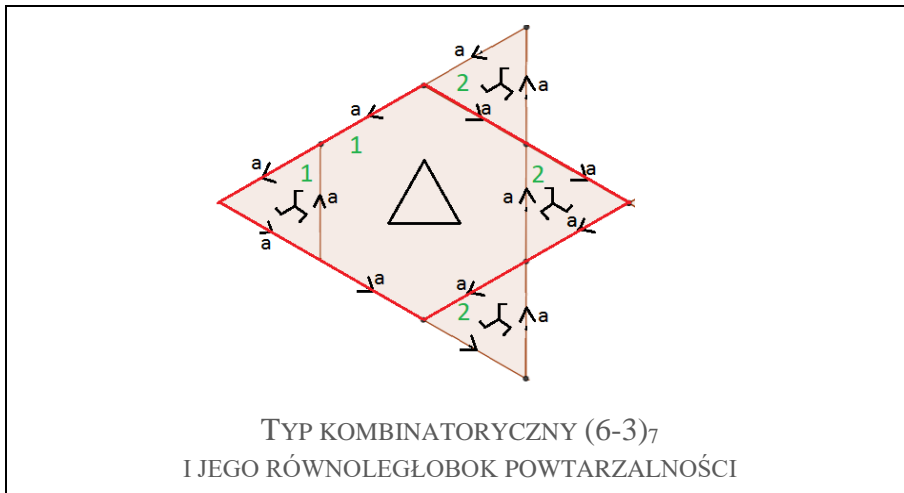
We wszystkich trzech poniższych przypadkach istnieje jeden sposób przystawienia płytek. Okazuje się, że każdy sposób prowadzi do równoległoboku powtarzalności. Prezentują to poniższe ilustracje (Rysunek 47, 48 i 49).

Para typów symetrii (3₃) – (6₅)



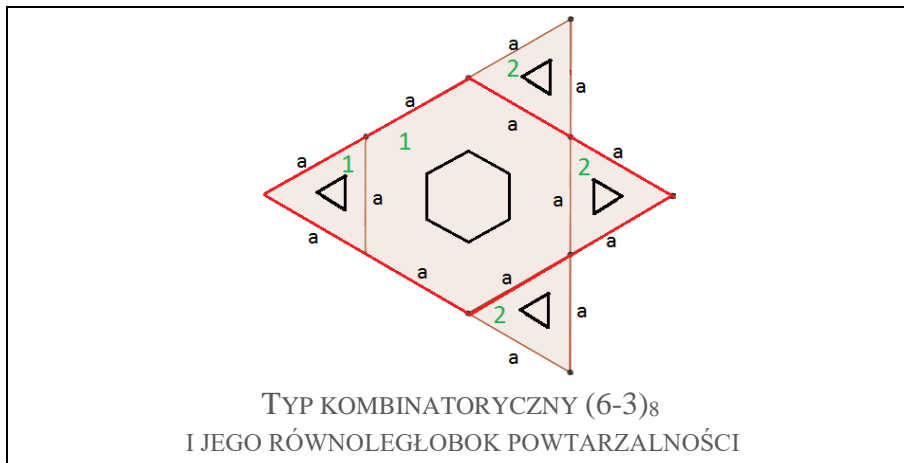
Rysunek 47.

Para typów symetrii (3₃) – (6₉)



Rysunek 48.

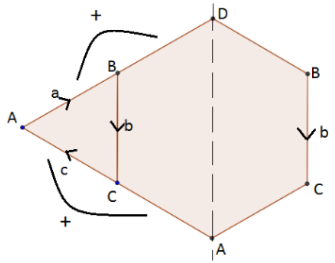
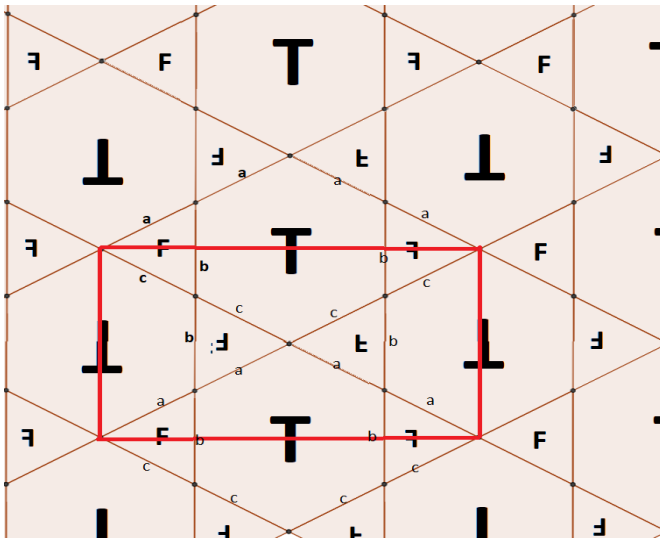
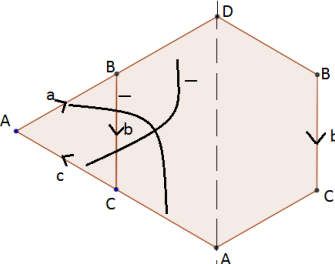
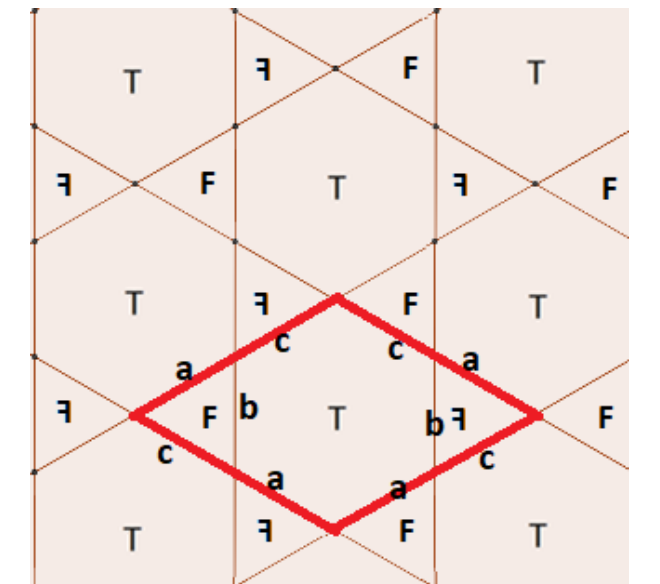
Para typów symetrii (3₄) – (6₆)

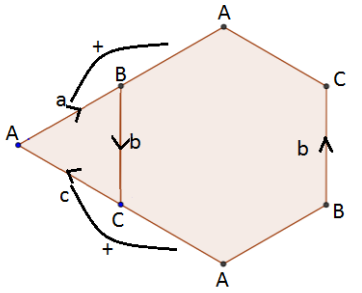
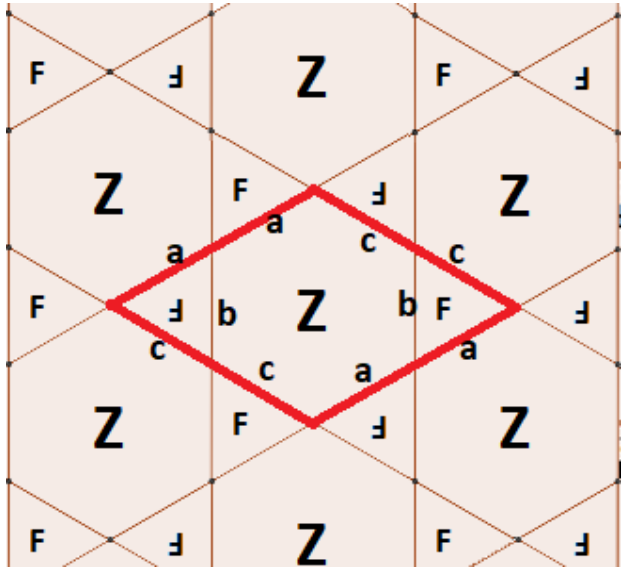
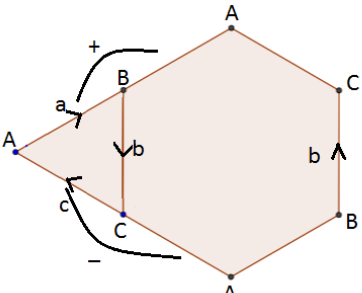
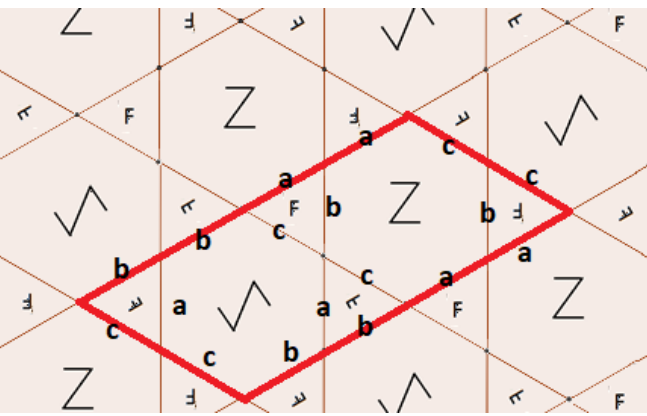
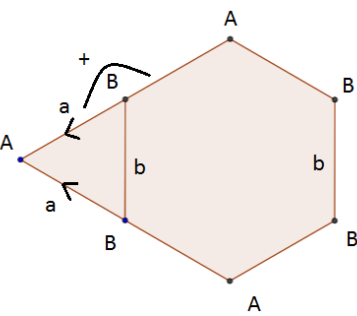
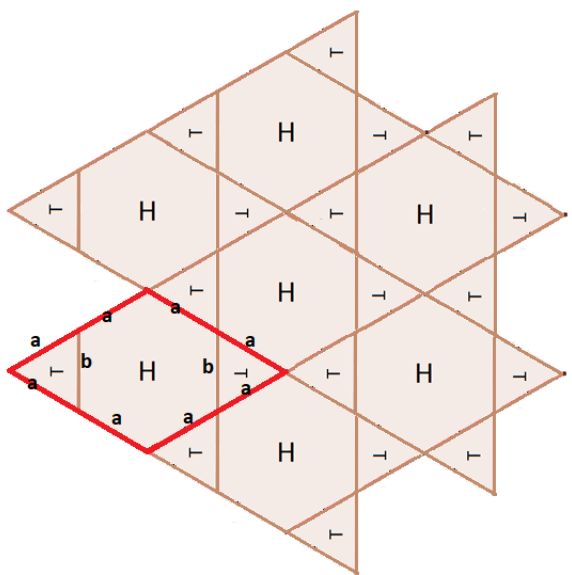


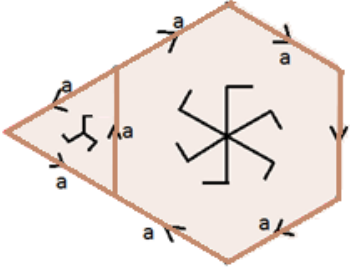
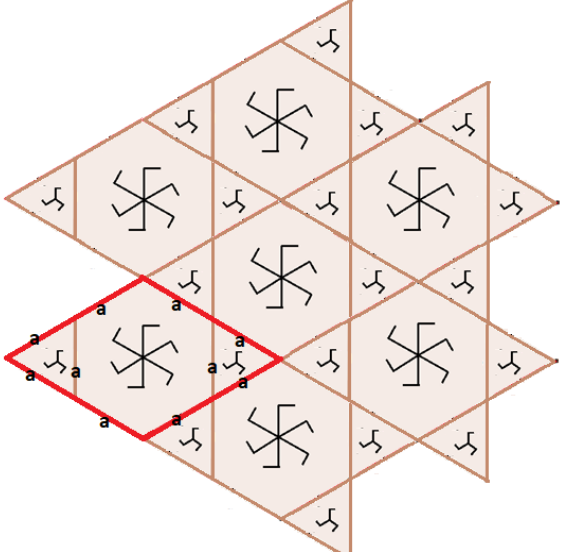
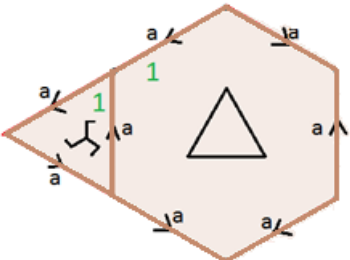
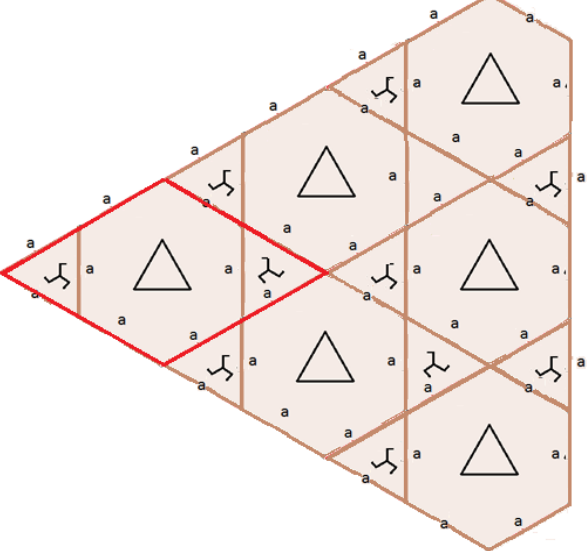
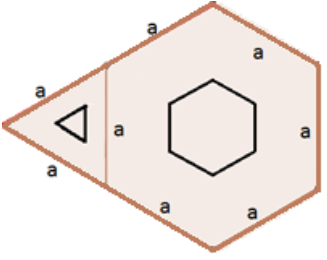
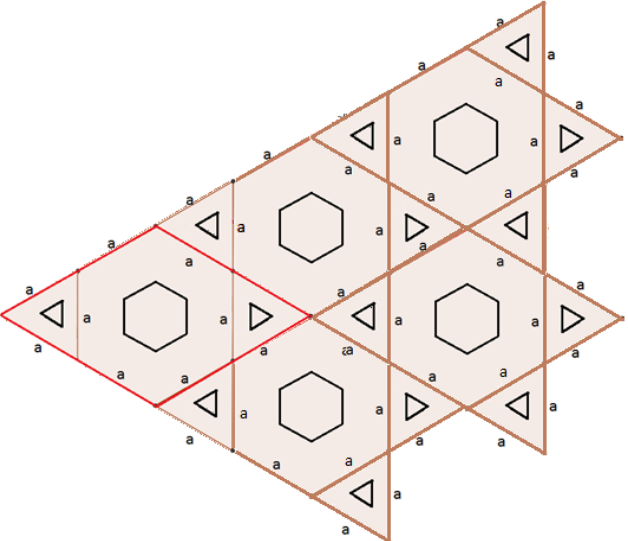
Rysunek 49.

Podsumowując, jedynie z ośmiu schematów odpowiadających potencjalnym typom kombinatorycznym dla par płytek 3-kąt – 6-kąt można uzyskać N2R-parkietaże. Poniżej przedstawiam podsumowanie składające się z diagramów typów kombinatorycznych oraz z fragmentów N2R-parkietaży odpowiadających tym typom wraz z zaznaczeniem pojedynczego równoległoboku powtarzalności. Dla czytelności rysunków N2R-parkietaży zaznaczyłam typy krawędzi tylko w równoległoboku powtarzalności.

Jak możemy się ostatecznie przekonać, że typy kombinatoryczne np. $(6-3)_1$ i $(6-3)_2$ są różne, chociaż klepki, które tworzą typ kombinatoryczny mają ten sam typ symetrii $(3_1) - (6_2)$? Dla odróżnienia typu kombinatorycznego $(6-3)_1$ od typu $(6-3)_2$ posłużę nam następujące wyjaśnienie. Po jednej stronie osi symetrii 6-kąta wszystkie trzy płytki 3-kątne mają raz tę samą orientację - $(6-3)_1$, a raz różne orientacje - $(6-3)_2$. Podobnie możemy rozróżnić typy kombinatoryczne $(6-3)_3$ i $(6-3)_4$. W $(6-3)_3$ wszyscy 3-kątne sąsiedzi mają tę samą orientację, a w $(6-3)_4$ 3-kątne sąsiedzi mają różne orientacje.

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
$(6-3)_1$		
$(6-3)_2$		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(6-3) ₃		
(6-3) ₄		
(6-3) ₅		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(6-3) ₆		
(6-3) ₇		
(6-3) ₈		

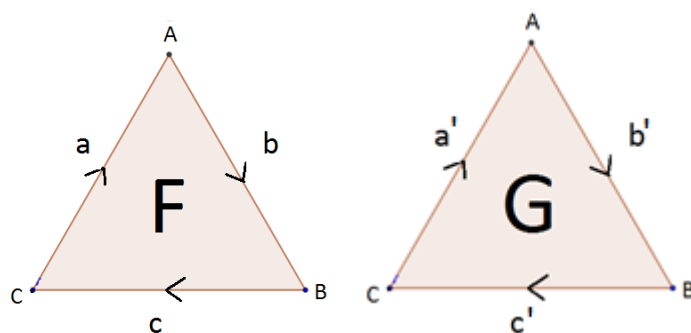
8.2 Para 3-kąt – 3-kąt

Posługując się informacjami zawartymi w Rozdziale 5.1, przyglądnijmy się liczbom typów krawędzi symetrycznych i niesymetrycznych w klepkach 3-kątnych o poszczególnych typach symetrii:

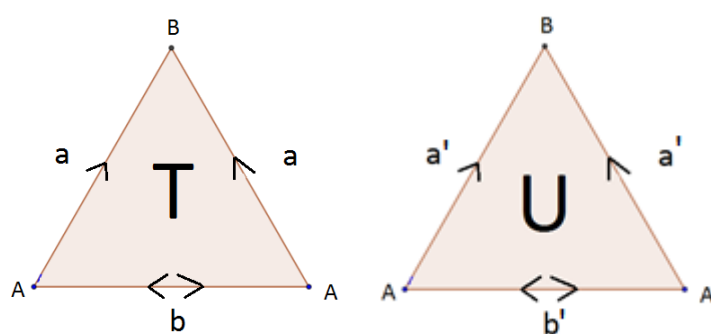
Typ symetrii:	(3 ₁)	(3 ₂)	(3 ₃)	(3 ₄)
Liczba krawędzi symetrycznych:	0	1	0	1
Liczba krawędzi niesymetrycznych:	3	1	1	0

Zgodnie z Obserwacją 5.4, otrzymamy potencjalnie pary klepek 3-kątnych o tych samych typach symetrii. W celu rozróżnienia klepki I rodzaju od klepki II rodzaju, wewnątrz klepki II rodzaju umieścimy inny symbol reprezentujący dany typ symetrii, np. w parze typów symetrii (3₁) – (3₁) użyłam liter F oraz G. Potencjalne pary typów symetrii klepek 3-kątnych i 3-kątnych, z których można zbudować N2R-parkietaż to:

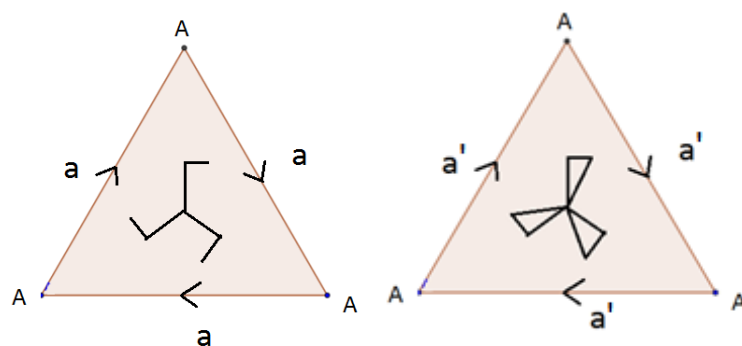
(3₁) – (3₁):



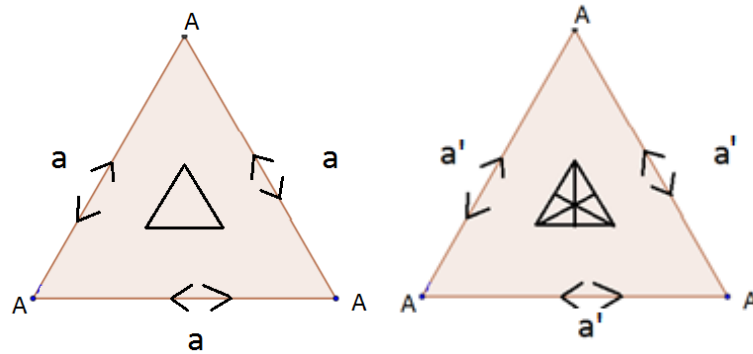
(3₂) – (3₂):



(3₃) – (3₃):



(34) – (34):



Rysunek 50.

Przy pomocy równania charakterystyki Eulera obliczymy, ile wielokątów spotyka się w danym wierzchołku. Stosując znane już nam oznaczenia, założmy, że w parkiecie jest t trójkątów I rodzaju i s trójkątów II rodzaju. Liczba krawędzi wynosi wtedy $K = 3t = 3s$. Z czego wynika, że $s = t$. Liczba ścian wynosi zatem $S = t + s = 2t$.

Wypiszemy teraz wszystkie schematy typów kombinatorycznych i następnie sprawdzimy, czy prowadzą one do N2R-parkietażu.

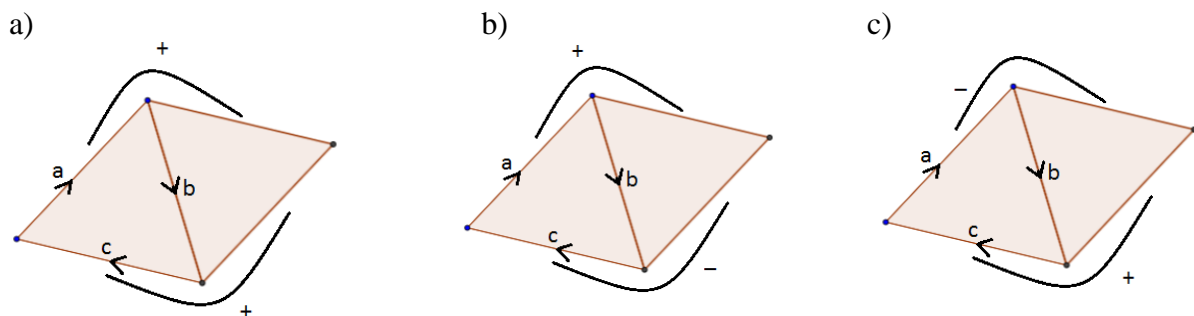
Para typów symetrii (3₁) – (3₁)

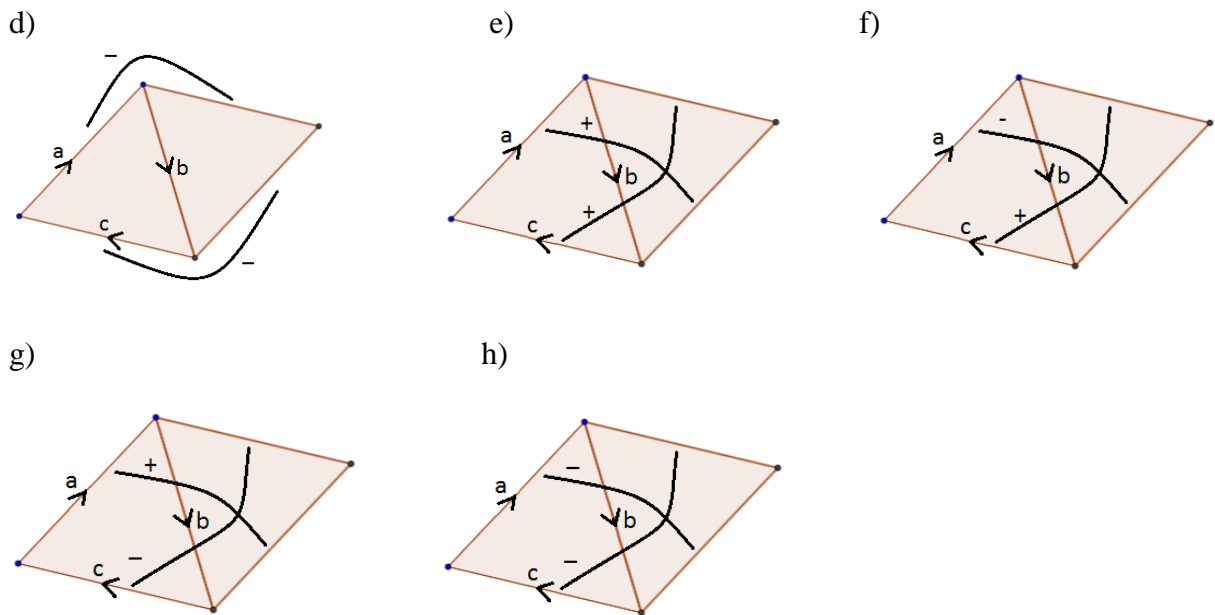
Ustaliliśmy, że płytki 3-kątne ma potencjalnie trzy typy wierzchołków, więc możemy założyć, że liczba 3-kątnych klepek I rodzaju wokół wierzchołka typu A wynosi p , wokół wierzchołka typu B wynosi q i r wokół C. Rozpatrzmy teraz poszczególne przypadki możliwych równości i nierówności pomiędzy liczbami p, q, r .

I przypadek $p = q = r$

Liczba wszystkich wierzchołków wynosi $W = \frac{3t}{p}$. Zgodnie z równaniem na charakterystyką Eulera mamy $0 = W - K + S = \frac{3t}{p} - 3t + 2t$. Po przekształceniach otrzymujemy równania $\frac{3t}{p} = t$, z czego oczywiście wynika, że $p = q = r = 3$. Oznacza to, że stopnie wszystkich wierzchołków są takie same i wynoszą 6, ponieważ do każdego wierzchołka przylegają 3 trójkąty I rodzaju i 3 trójkąty II rodzaju.

Analogicznie, jak w przypadku 3-kąt – 6-kąt, będziemy weryfikować wszystkie potencjalne schematy typów kombinatorycznych w celu wyznaczenia wszystkich równoległoboków powtarzalności, które tworzą N2R-parkietaż. Po przyłożeniu do siebie płytek wzdłuż pierwszej pary krawędzi, pozostałe dwie pary mogą być do siebie przykładane na 8 sposobów przedstawionych schematami na Rysunku 51.

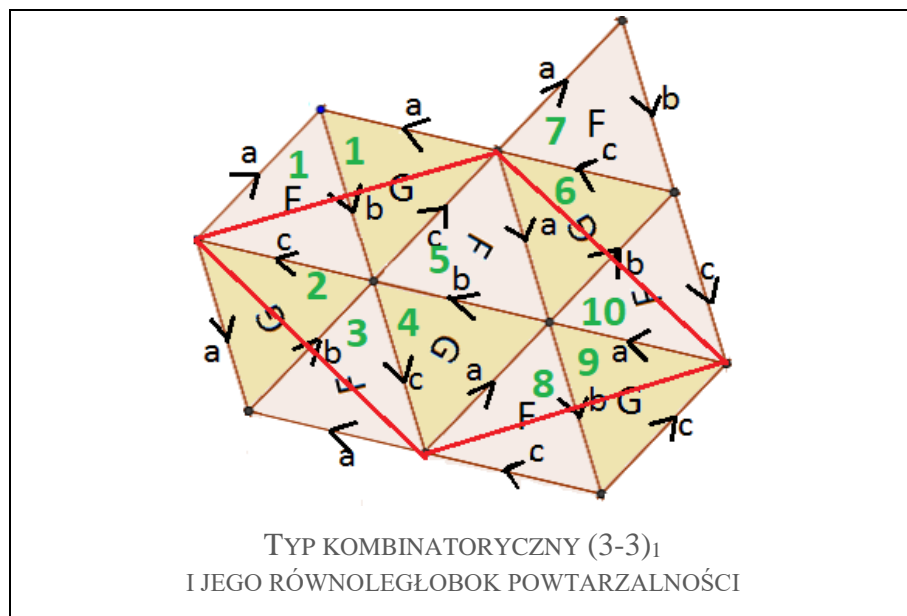




Rysunek 51.

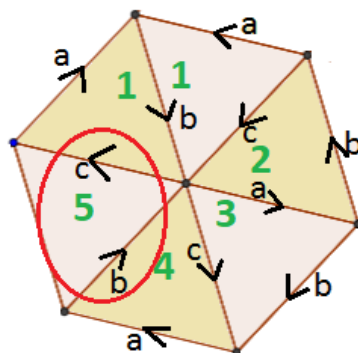
Teraz zaczniemy analizę wszystkich przypadków, przystawiając płytki trójkątne I rodzaju do płytek trójkątnych II rodzaju zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego. Podobnie jak w Podrozdziale 8.1 zielone liczby na rysunkach będą oznaczały kolejność przystawiania płytek.

Ad a) W pierwszym ze schematów płytki o numerze 7 i płytki o numerze 8 są obrazem przez translację wyjściowej trójkątnej płytki, dlatego po połączeniu odpowiadających wierzchołków otrzymamy wektory, które tworzą równoległobok powtarzalności. Otrzymujemy prawdziwy typ kombinatoryczny N2R-parkietażu i oznaczymy go symbolem $(3-3)_1$ (Rysunek 52).



Rysunek 52.

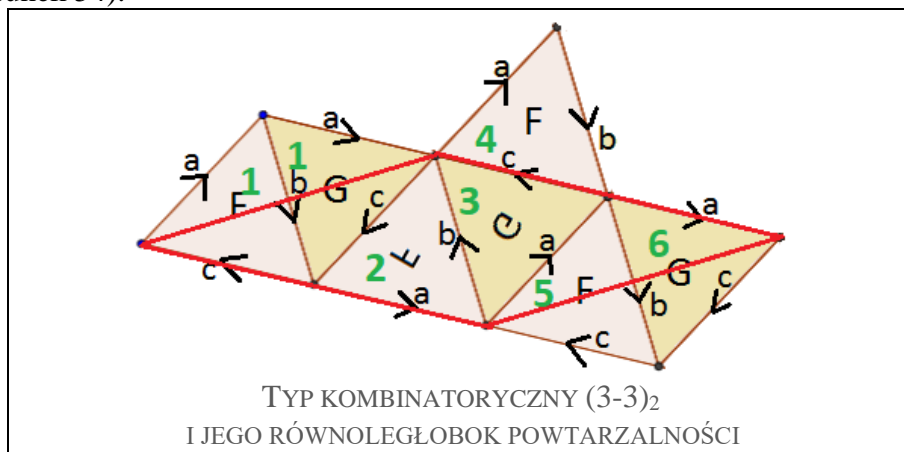
Ad. b) W tym schemacie, przystawiając płytki wokół jednego wierzchołka, płytki o numerze 5 powinna mieć ten sam zwrot krawędzi co wyjściowa płytki o numerze 1 tego samego rodzaju. Dlatego parkietaż o takim schemacie typu kombinatorycznego nie istnieje (Rysunek 53).



Rysunek 53.

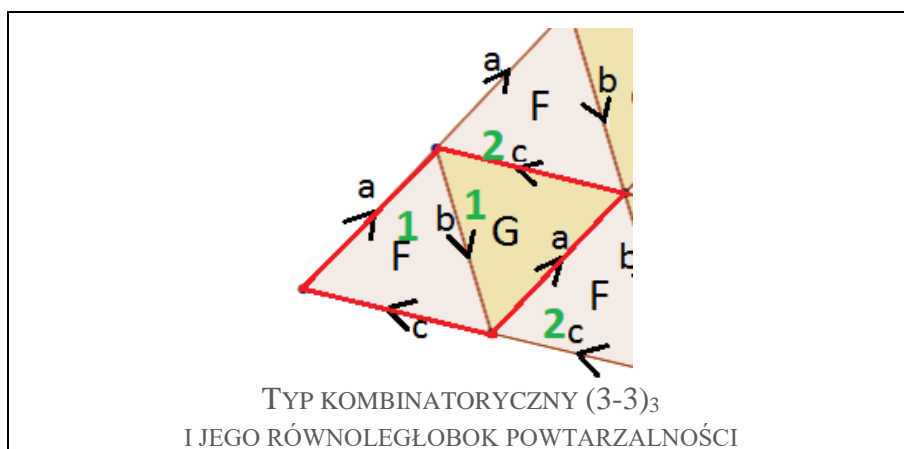
Ad. c) Przypadek ten jest równoważny do b) z dokładnością do odbicia pary klepek wzdłuż wspólnej osi symetrii. O równoważności typów kombinatorycznych mówi definicja typu kombinatorycznego umieszczona w Rozdziale 6.

Ad. d) Otrzymujemy kolejny schemat typu kombinatorycznego, który prowadzi do równoległoboku powtarzalności, który tworzy prawdziwy N2R-parkietaż. Oznaczmy go symbolem $(3-3)_2$. (Rysunek 54).



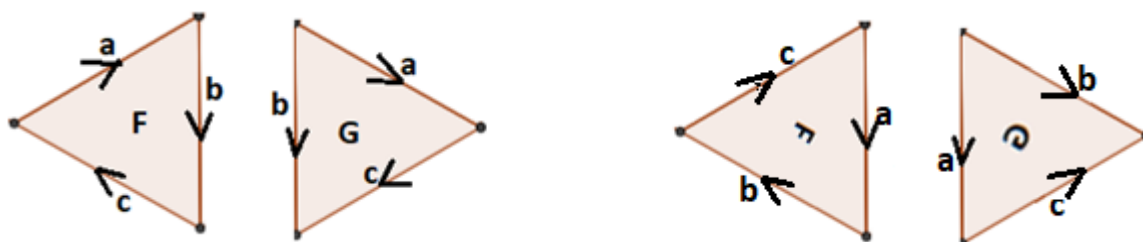
Rysunek 54.

Ad. e) Otrzymujemy kolejny typ kombinatoryczny, z którego można rozwinąć N2R-parkietaż na całej płaszczyźnie. Równoległobok powtarzalności zaznaczony jest na czerwono (Rysunek 55).



Rysunek 55.

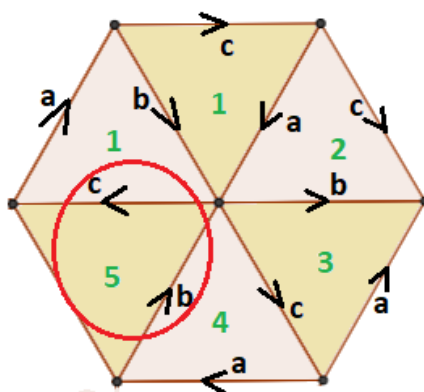
Ad. f) Okazuje się, że w tym przypadku otrzymujemy typ kombinatoryczny równoważny z typem kombinatorycznym w przykładzie d). Jest tak, ponieważ jeśli w przypadku d) przyjrzymy się na sposób przylegania płytek obu rodzajów wzdłuż krawędzi a , to otrzymamy schemat typu kombinatorycznego z obecnego przykładu f) (Rysunek 56).



Rysunek 56.

Ad. g) Przypadek ten jest równoważny do f) zgodnie z Definicją 6.2 typów kombinatorycznych równoważnych z Rozdziału 6.

Ad. h) Z tego schematu typu kombinatorycznego nie otrzymamy N2R-parkietażu, ponieważ przystawiając klepki obu rodzajów naprzemiennie wokół jednego wierzchołka, okazuje się, że płytka o numerze 5 ma inny zwrot strzałek niż wyjściowa płytka tego samego rodzaju (Rysunek 57).



Rysunek 57.

II przypadek. $p = q \neq r$.

W trójkącie I rodzaju są dwa wierzchołki wokół których występuje ta sama liczba płytek I rodzaju i oznaczmy tę liczbę przez p . Natomiast, liczba płytek I rodzaju wokół trzeciego wierzchołka jest inna i oznaczmy ją przez r . W związku z tym liczba wierzchołków parkietażu wynosi $W = \frac{2t}{p} + \frac{t}{r}$. Korzystając z równania na charakterystykę Eulera oraz przekształcając je otrzymujemy:

$$0 = W - K + S = \frac{2t}{p} + \frac{t}{r} - 3t + 2t,$$

$$\frac{2t}{p} + \frac{t}{r} = t,$$

$$\frac{2}{p} + \frac{1}{r} = 1.$$

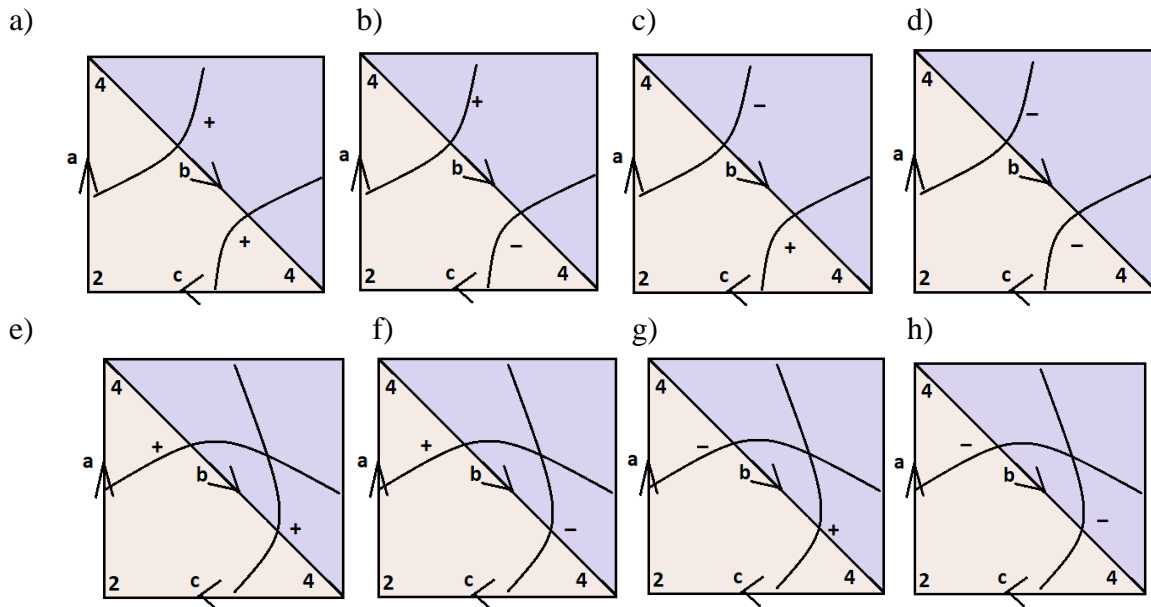
W ostatniej zależności łatwo zauważyć, że gdyby $p = 2$, to $\frac{1}{r} = 0$, co jest niemożliwe. Po wyznaczeniu z równania zmiennej r otrzymujemy $r = \frac{p}{p-2}$.

- $p = 3$, wtedy $r = 3$, co jest sprzeczne z założeniem, że $p \neq r$
- $p = 4$, wtedy $r = 2$ i $q = 4$

- gdy $p > 4$ to $r = \frac{p}{p-2} = \frac{p-2+2}{p-2} = 1 + \frac{2}{p-2} < 1 + 1 = 2$. Co daje sprzeczność zgodnie z Lematem 4.2 jako, że liczba p powinna być nie mniejsza niż 2.

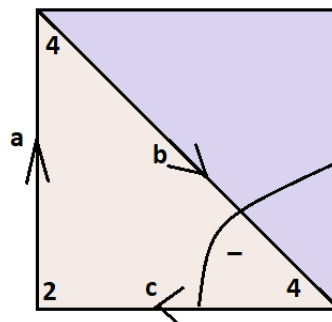
Podsumowując, jedyny układ liczb p, q, r spełniających nasze wymagania to $p = 4, q = 4, r = 2$. Oznacza to, że stopnie tych trzech rodzajów wierzchołków parkietażu wynoszą odpowiednio 8, 8 i 4. W trójkątnej płytce drugiego rodzaju stopnie wierzchołków też muszą wynosić 8, 8 i 4. Na Rysunku 58 liczby obok wierzchołków oznaczają liczbę klepek jednego z rodzajów wokół tego wierzchołka. Wynika to z definicji N2R-parkietażu, która mówi o występowaniu klepek na przemian. Z tego też względu, w dalszych schematycznych rysunkach pracy jako trójkątne klepki obu rodzajów weźmiemy trójkąty o kątach: $\frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}$ i $\frac{2\pi}{4}$, czyli $45^\circ, 45^\circ$ i 90° .

W każdym z dwóch rodzajów trójkątów jest dokładnie jeden bok łączący wierzchołki stopnia 8. Trójkąty te muszą zatem przylegać do siebie wzdłuż tych właśnie boków. Tworząc parkietaż będziemy kolejno przystawiać boki klepek trójkątnych I rodzaju do boków klepek II rodzaju. Na Rysunku 58 prezentują się wszystkie możliwe sposoby przystawienia płytek.



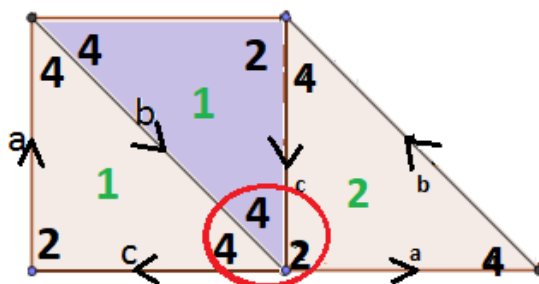
Rysunek 58.

Szybko okazuje się, że ponownie nie trzeba rozpatrywać dokładnie wszystkich ośmiu przypadków. Ograniczając się do wyboru jednej pary typów przyległych krawędzi (Rysunek 59), wykluczmy od razu trzy typy kombinatoryczne: c), d) oraz przez analogię także b).



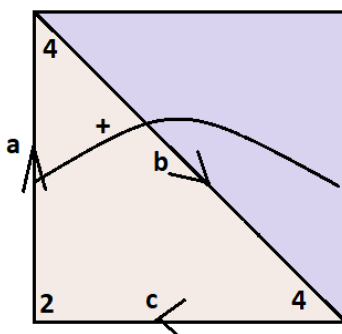
Rysunek 59.

Po przystawieniu klepki I rodzaju, okazuje się, że wierzchołek oznaczony liczbą 2 powinniśmy przystawić do wierzchołka oznaczonego liczbą 4, co oczywiście jest sprzeczne i obrazuje to Rysunek 60.



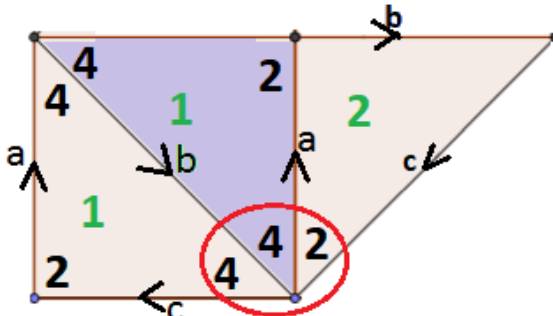
Rysunek 60.

Jest jeszcze inny wybór pary typów przyległych krawędzi (Rysunek 61), który również szybko wyklucza trzy typy kombinatoryczne: e), f) i przez analogię także g).



Rysunek 61.

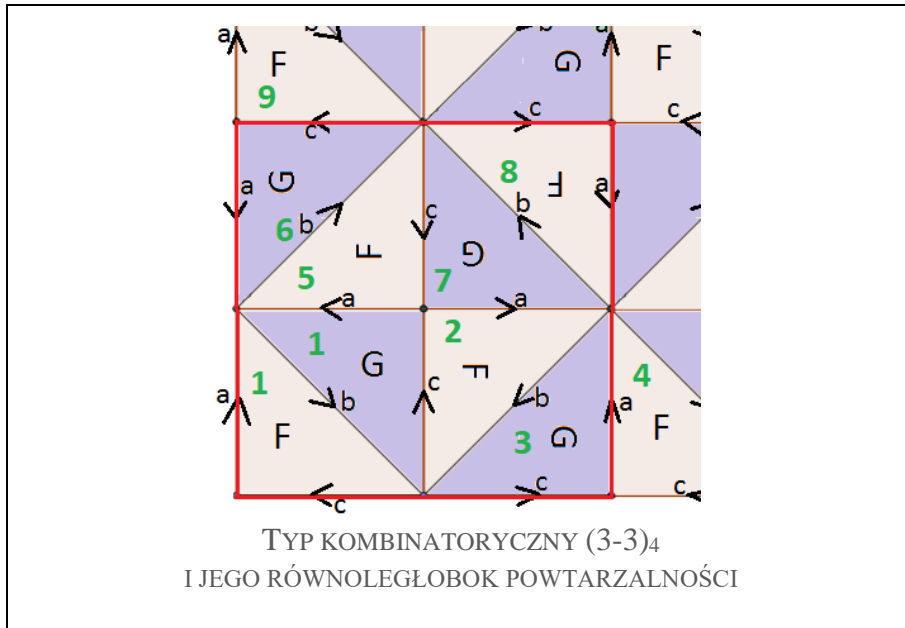
Ponownie, przystawiając płytkę I rodzaju o numerze 2 zgodnie z przyjętym typem kombinatorycznym, okazuje się, że przystawiamy wierzchołek oznaczony liczbą 2 do wierzchołka oznaczonego liczbą 4, co nie jest możliwe (Rysunek 62).



Rysunek 62.

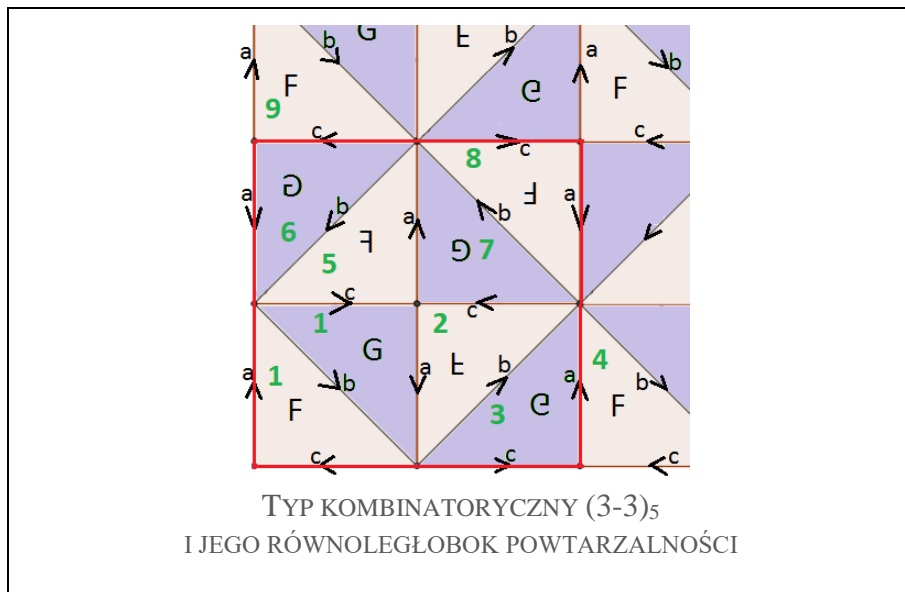
Tak więc pozostają nam dwa typy kombinatoryczne a) oraz h), dzięki którym otrzymamy równoległoboki powtarzalności prowadzące do prawdziwych N2R-parkietaczy.

Ad. a) Przystawiając płytki zgodnie z zieloną numeracją okazuje się, że płytki o numerze 4 i 9 są obrazem przez translację wyjściowej płytki I rodzaju o numerze 1. Łącząc odpowiednie wierzchołki otrzymujemy równoległobok powtarzalności (Rysunek 63).



Rysunek 63.

Ad. h) Przystawiając klepki zgodnie z typem kombinatorycznym odnajdujemy klepki I rodzaju o numerach 4 i 9, które są obrazem przez translację wyjściowej klepki I rodzaju. Otrzymujemy równoległobok powtarzalności, który rozwija się w N2R-parkietaż całej płaszczyzny (Rysunek 64).



Rysunek 64.

III przypadek. $p \neq q, q \neq r, p \neq r$.

Stosując oznaczenia liczby płytek I rodzaju wokół trzech wierzchołków potencjalnie różnych typów odpowiednio jako p, q i r , otrzymujemy liczbę wierzchołków równą $W = \frac{t}{p} + \frac{t}{q} + \frac{t}{r}$. Podstawiając wyrażenia opisujące liczbę krawędzi i liczbę ścian do równania na charakterystykę Eulera otrzymamy zależność $\frac{t}{p} + \frac{t}{q} + \frac{t}{r} = t$, czyli: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ i oznaczymy to ostatnie równanie jako (*).

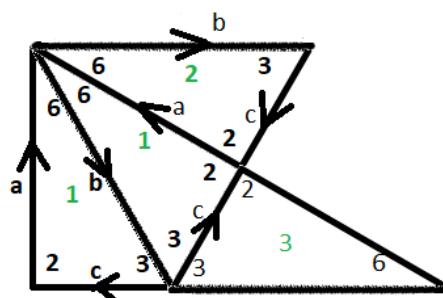
Załóżmy, że $p < q < r$. Wtedy $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$, z czego wynika, że $p < 3$. W związku z tym i zgodnie z Lematem 1 $p = 2$. Wyznaczając niewiadomą q z równania (*) otrzymujemy, że $q = \frac{2r}{r-2}$.

Ponieważ $p = 2$ oraz $p < q < r$, więc $r \geq 4$. Rozważymy poszczególne przypadki dla wszystkich możliwości wartości r , począwszy od $r = 4$.

- $r = 4$, wtedy $q = 4$, co jest sprzeczne z założeniem, że $r \neq q$ (brak rozwiązań),
- $r = 5$, wtedy $q = \frac{10}{3}$, ale $q \in \mathbb{N}$ (brak rozwiązań),
- $r = 6$, wtedy $q = 3$,
- gdy $r > 6$ to $q = \frac{2r}{r-2} = 2 \frac{r-2+2}{r-2} = 2 \left(1 + \frac{2}{r-2}\right) < 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$, z tego wynika, że $q = 2$.
Ale wtedy jest to sprzeczne z założeniem $p < q < r$.

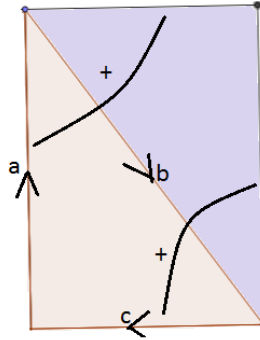
Podsumowując, jedyny układ liczb $p < q < r$ spełniających nasze wymagania to $p = 2$, $q = 3$, $r = 6$. Czyli stopnie poszczególnych wierzchołków klepki I jak i II rodzaju wynoszą odpowiednio 4, 6 i 12. Analogicznie jak w II przypadku, w schematycznych rysunkach jako trójkątne klepki obu rodzajów weźmiemy trójkąty o kątach: $\frac{2\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{6}$ i $\frac{2\pi}{12}$, czyli 90° , 60° i 30° .

Okazuje się, że nie jest konieczna analiza wszystkich możliwych typów kombinatorycznych. Jest tak, ponieważ liczba płytek I rodzaju wokół poszczególnych wierzchołków w klepkach obu rodzajów wynosi: $p = 2$, $q = 3$ i $r = 6$. Zatem, płytkę drugiego rodzaju musimy przystawić do klepki I rodzaju krawędzią łączącą wierzchołki oznaczone na Rysunku 65 jako 3 i 6 (co odpowiada oznaczeniom q i r) do krawędzi łączącej wierzchołki oznaczonych tymi samymi liczbami. Wtedy musimy przystawić płytkę I rodzaju (o zielonym numerze 2) krawędzią łączącą wierzchołki oznaczone jako 2 i 6 i wiemy, że krawędź ta jest typu a i przystawiona jest do klepki II rodzaju z zachowaniem orientacji. Następnie przystawiamy znowu płytkę pierwszego rodzaju do płytki II rodzaju (zielony numer 3) krawędzią łączącą wierzchołki o oznaczone liczbami 2 i 3, czyli krawędzią typu c . Zatem otrzymaliśmy płytkę II rodzaju o numerze 1 i możemy wywnioskować z niej schemat typu kombinatorycznego.

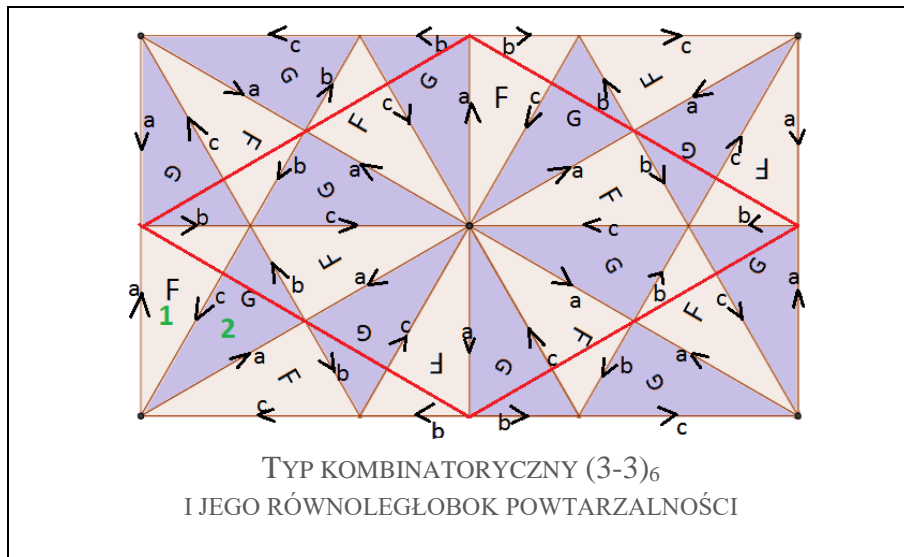


Rysunek 65.

Powyższa analiza prowadzi do jednego poprawnego schematu typu kombinatorycznego (Rysunek 66), dzięki któremu otrzymamy równoległobok powtarzalności (Rysunek 67). Zawiera on dużą liczbę klepek, dlatego nie zaznaczałam w nim kolejności przystawiania, aby nie popsuć czytelności.



Rysunek 66.



Rysunek 67.

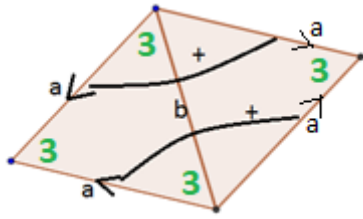
Para typów symetrii $(3_2) - (3_2)$

Każda z dwóch rodzajów płytek ma w tym przypadku dokładnie jedną krawędź symetryczną w związku z tym obie płytki mają potencjalnie dwa typy wierzchołków: A oraz B. Rysując schematy potencjalnych typów kombinatorycznych, klepki będziemy przystawiać symetrycznymi krawędziami, tak jak tego wymaga jeden z dwóch warunków regularności dla N2R-parkietaży (patrz Definicja 3.10). Oznaczmy liczbę klepek I rodzaju występujących wokół wierzchołków poszczególnych dwóch rodzajów odpowiednio przez p i q , przyczym niech p oznacza liczbę klepek I rodzaju przy wierzchołkach krawędzi symetrycznych.

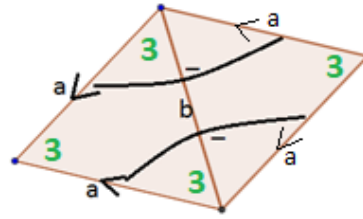
I przypadek. $p = q$

Wtedy liczba wszystkich wierzchołków wynosi: $W = \frac{3t}{p}$. Analogicznie jak w podpunkcie $(3_1) - (3_1)$ dla pierwszego przypadku z równania na charakterystykę Eulera otrzymujemy, że $p = q = 3$. W związku z tym, że krawędź typu b w płytce I rodzaju jest symetryczna, to krawędzie typu a są symetryczne względem osi symetrii krawędzi b . Tak jest również w płytce II rodzaju. Dzięki temu otrzymujemy dwa przypadki (Rysunek 68), z których powstaną N2R-parkietaże (Rysunki 69 i 70).

a)

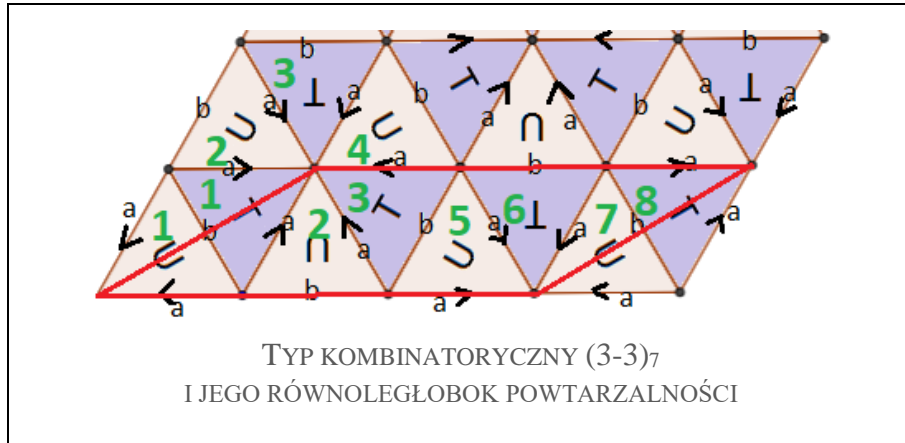


b)



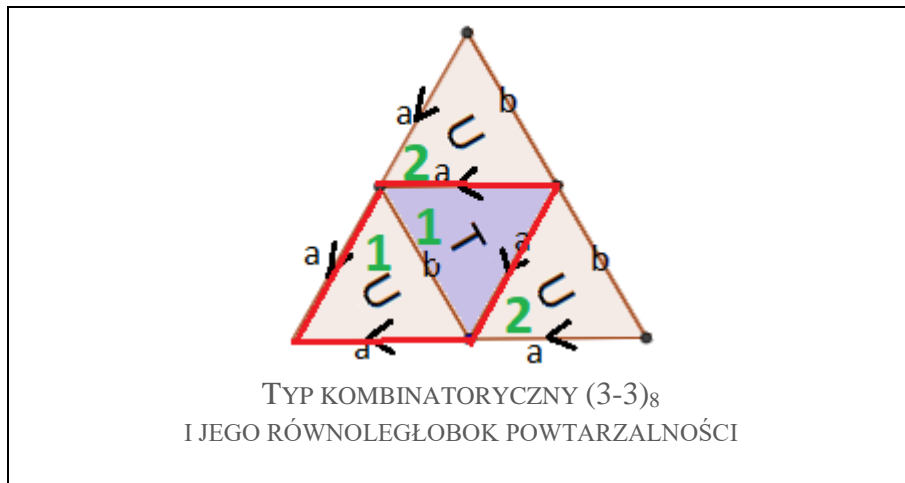
Rysunek 68.

Ad. a)



Rysunek 69.

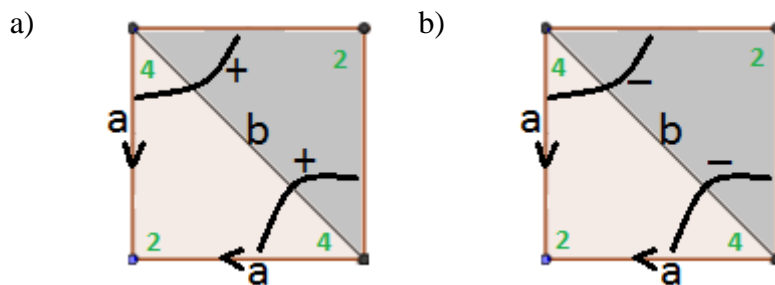
Ad. b)



Rysunek 70.

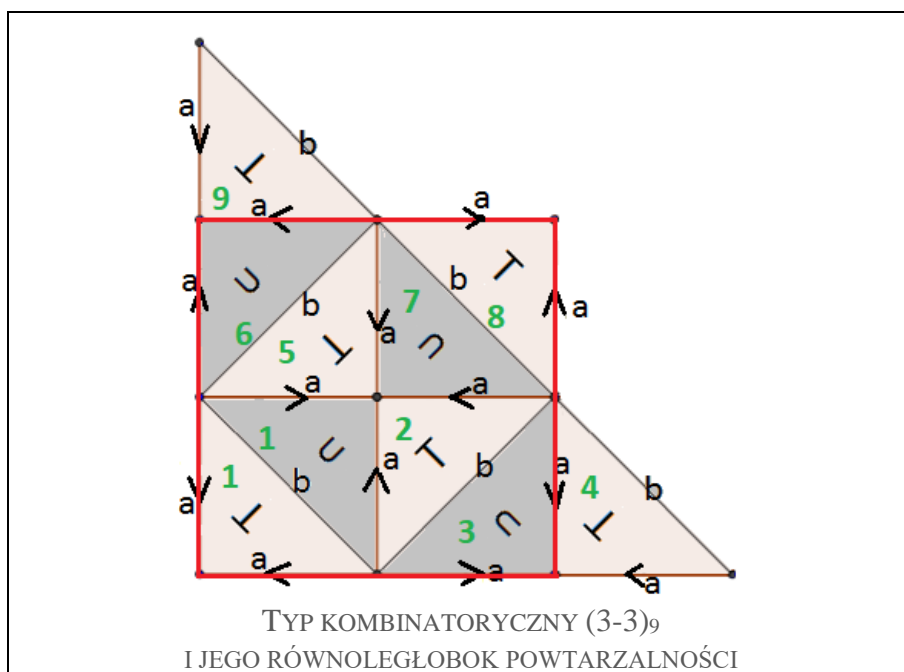
II przypadek. $p \neq q$

Liczba wierzchołków N2R-parkietażu wynosi wtedy $W = \frac{2t}{p} + \frac{t}{q}$. Sytuacja ta prowadzi do równania znanego nam już z II przypadku podpunktu (3₁) – (3₁) i otrzymujemy zatem $p = 4$ i $q = 2$. Płytki przystawiamy symetrycznymi krawędziami i podobnie jak w poprzednim Przypadku I, otrzymujemy jedynie dwa sposoby przystawienia płytek (Rysunek 71).



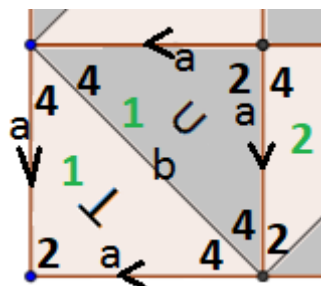
Rysunek 71.

Ad. a) Przystawiając płytki zgodnie z zieloną numeracją, okazuje się, że płytki o numerze 4 i 9 są obrazem przez translację wyjściowej płytki I rodzaju o numerze 1. Łącząc odpowiednie wierzchołki otrzymujemy równoległobok powtarzalności (Rysunek 72).



Rysunek 72.

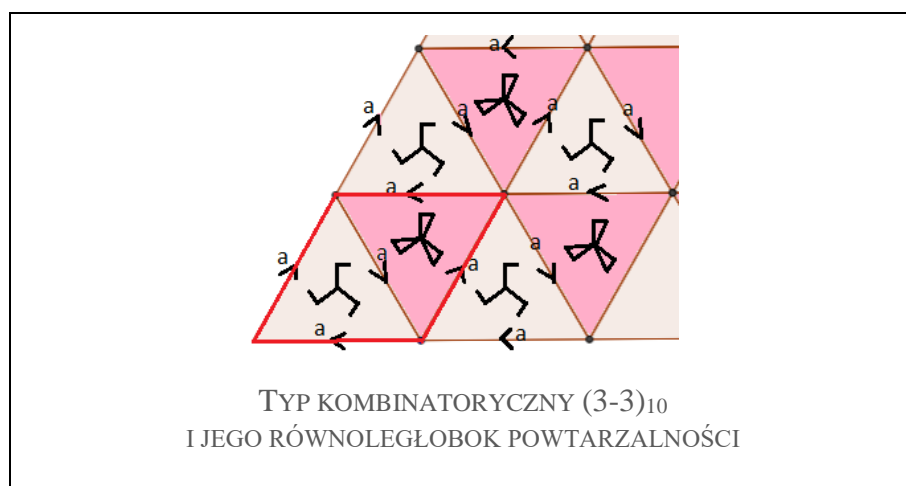
Ad. b) Po próbie przystawienia płytki o numerze 2 okazuje się, że stopnie w wierzchołkach potencjalnego parkietażu nie są równe. Dlatego nie otrzymamy równoległoboku podstawowego z tego sposobu przystawienia płytek (Rysunek 73).



Rysunek 73.

Para typów symetrii $(3_3) - (3_3)$

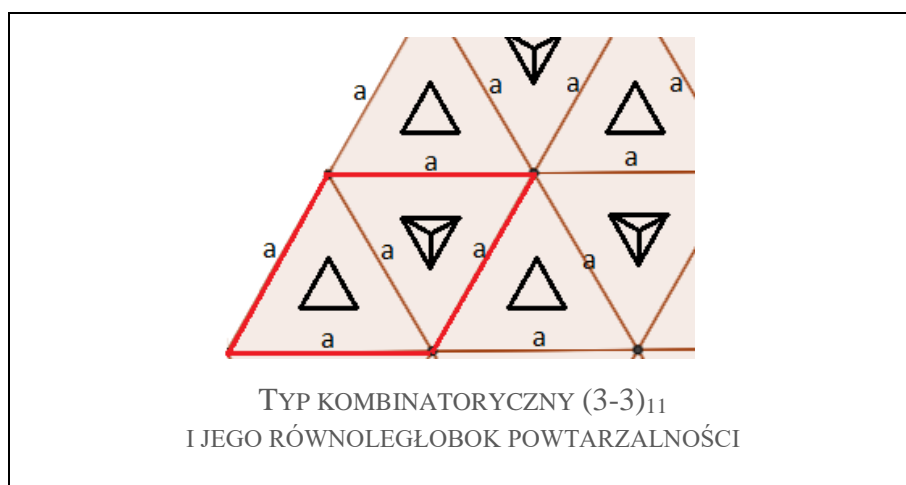
Płytki mają jeden typ wierzchołka: A. Oznaczmy zatem przez p liczbę płytek I rodzaju wokół dowolnego wierzchołka potencjalnego N2R-parkietażu o takich płytkach. Wtedy liczba wszystkich wierzchołków wynosi: $W = \frac{3t}{p}$. Analogicznie jak w podpunkcie $(3_1) - (3_1)$ przypadku pierwszego otrzymujemy $p = 3$. Obie płytki posiadają symetrie obrotowe o wielokrotność kąta 120° wokół środka trójkąta. Przystawienie płytki II rodzaju daje nam ten sam zwrot strzałek. Prowadzi to do jednego typu kombinatorycznego (Rysunek 74).



Rysunek 74.

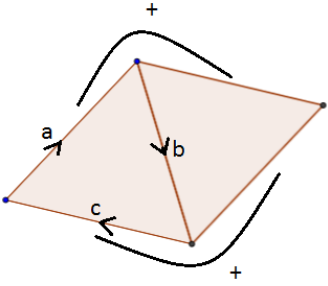
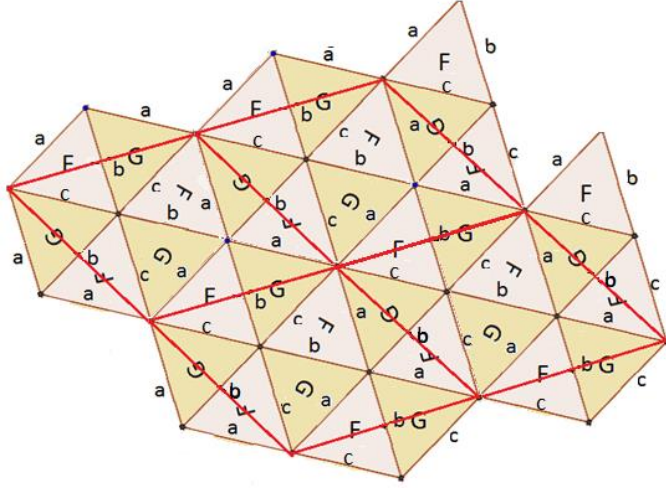
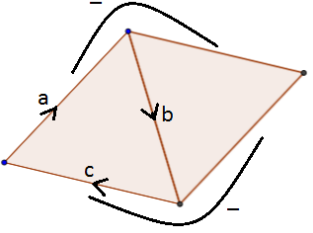
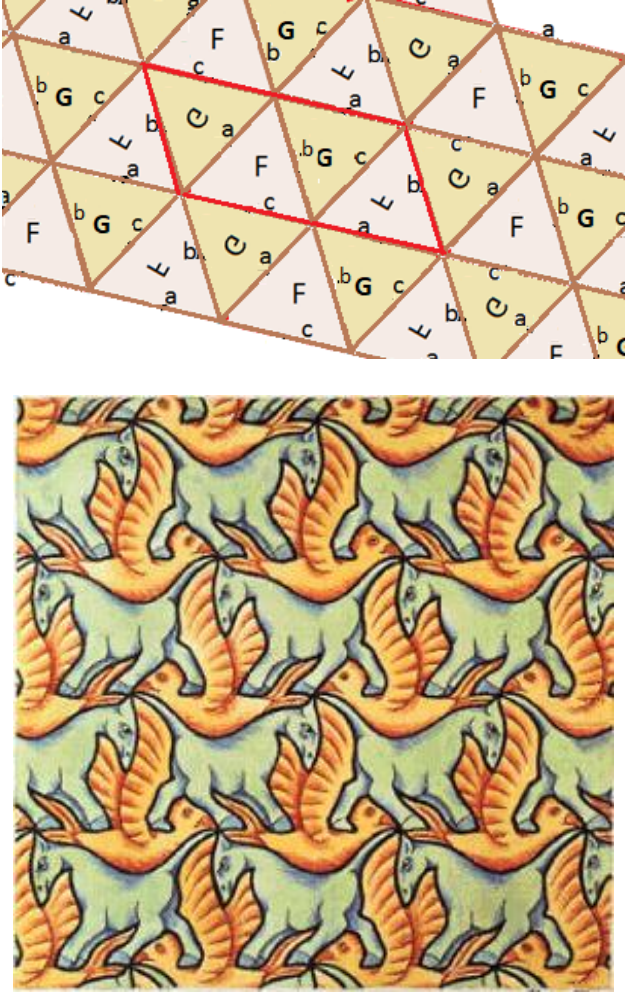
Para typów symetrii $(3_4) - (3_4)$

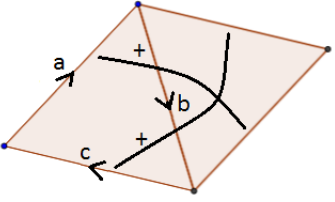
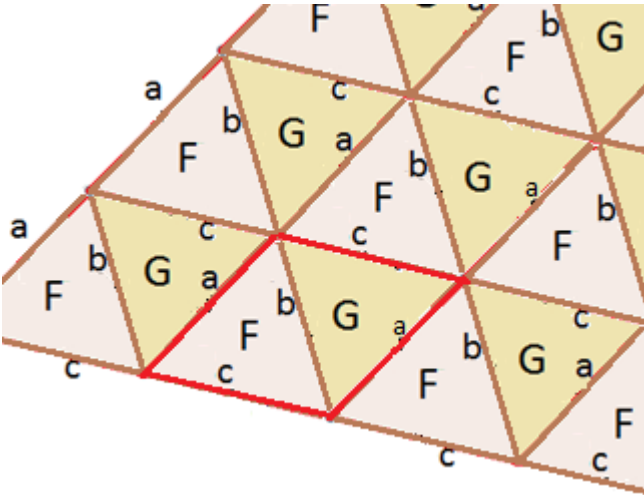
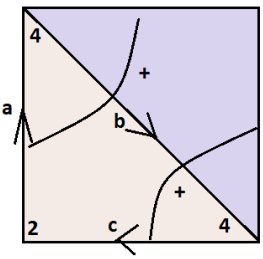
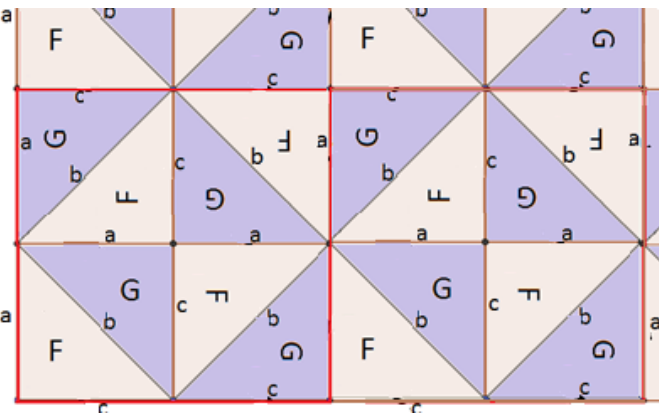
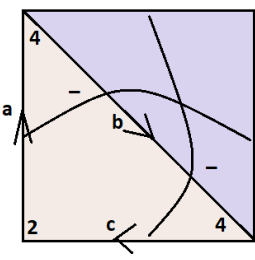
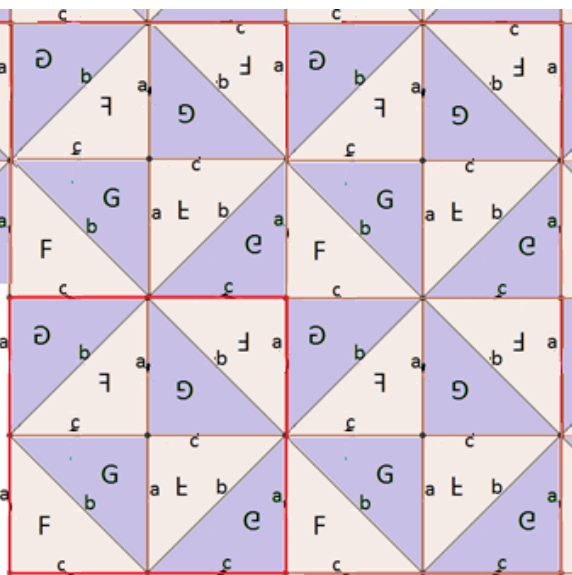
Podobnie jak w poprzedniej sytuacji płytki mają jeden typ wierzchołka: A. W przypadku tym da się stworzyć tylko jeden N2R-parkietaż, ponieważ wszystkie krawędzie płytek są symetryczne (Rysunek 75).

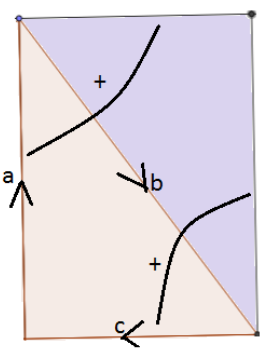
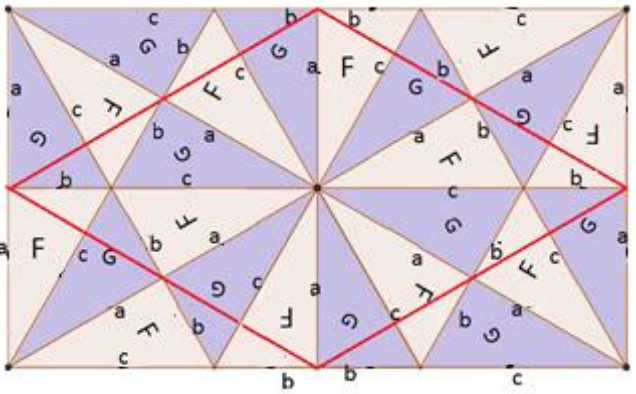
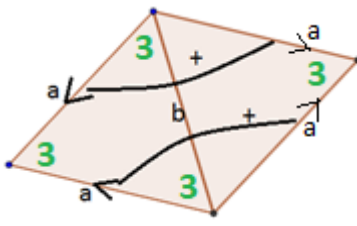
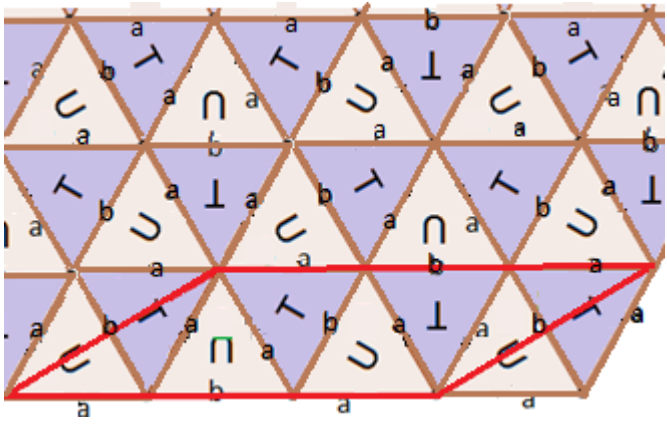
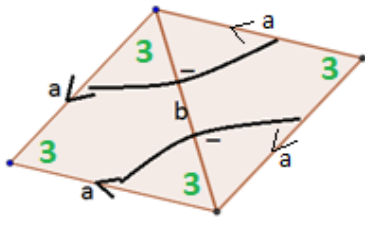
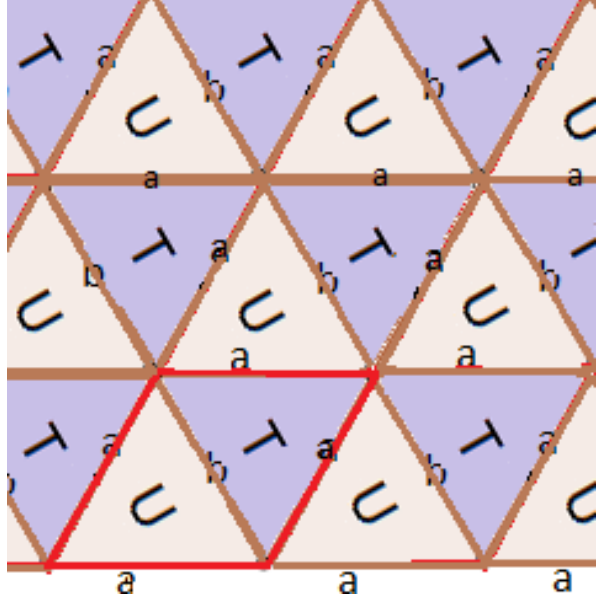


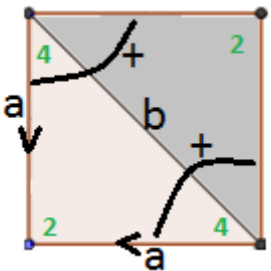
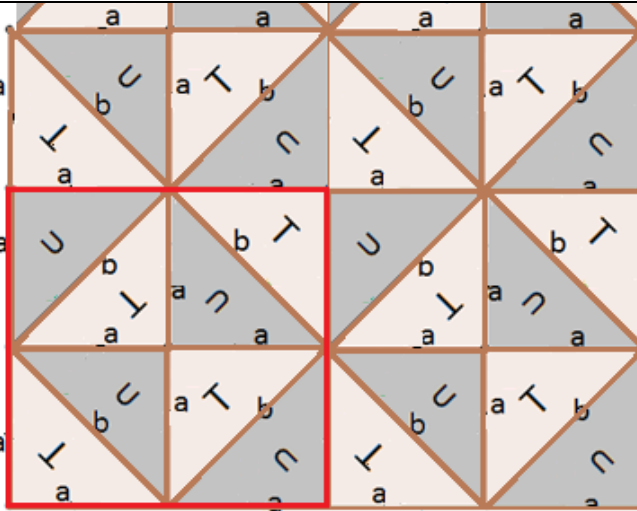
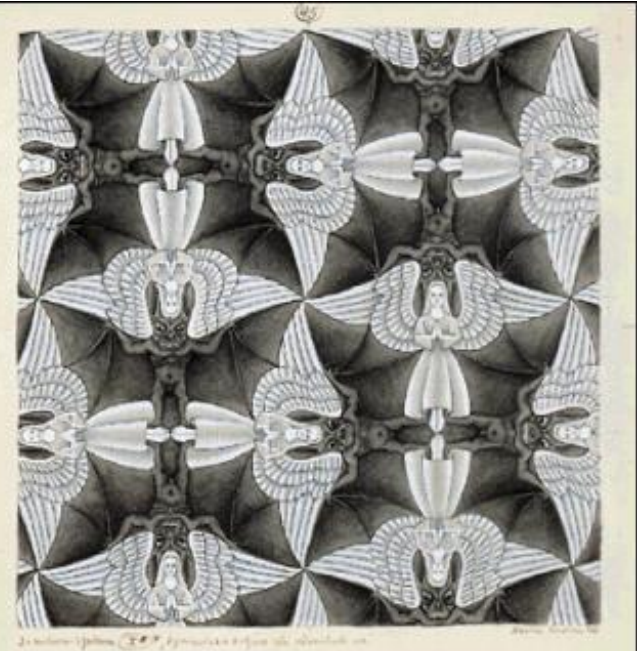
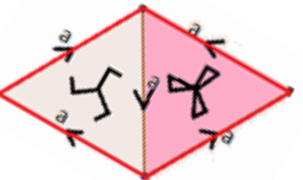
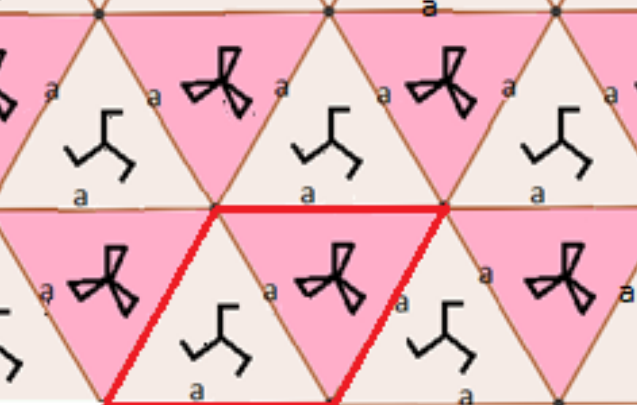
Rysunek 75.

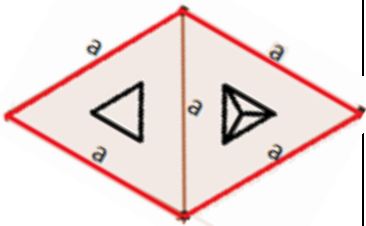
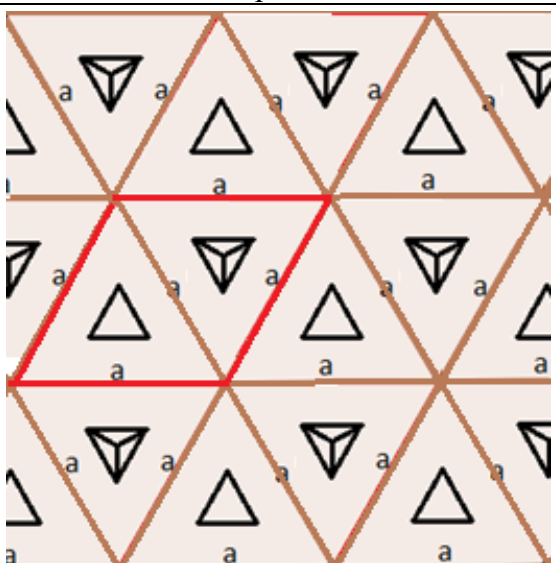
Podsumowując, jedynie z jedenastu schematów typów kombinatorycznych przystawiania klepek trójkątnych można uzyskać N2R-parkietáže. Podsumowując, przedstawimy teraz wszystkie typy kombinatoryczne razem z fragmentami N2R-parkietażu i z zaznaczeniem pojedynczego równoległoboku powtarzalności. W przypadku, gdy dany typ kombinatoryczny N2R-parkietażu został wykorzystany przez Mauritsa Eschera w jednej z jego kompozycji, dołączymy także ilustrację takiej kompozycji.

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(3-3) ₁		
(3-3) ₂		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(3-3) ₃		
(3-3) ₄		
(3-3) ₅		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(3-3) ₆		
(3-3) ₇		
(3-3) ₈		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(3-3) ₉		 
(3-3) ₁₀		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(3-3) ₁₁		

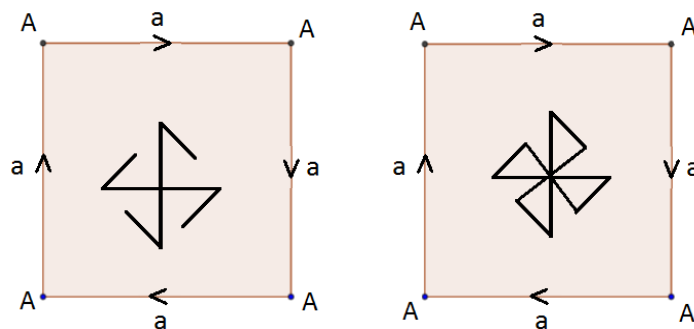
8.3 Para 4-kąt – 4-kąt

Posługując się informacjami zawartymi w Rozdziale 5.2, przyglądnijmy się liczbom typów krawędzi symetrycznych i niesymetrycznych w klepkach 4-kątnych o poszczególnych typach symetrii:

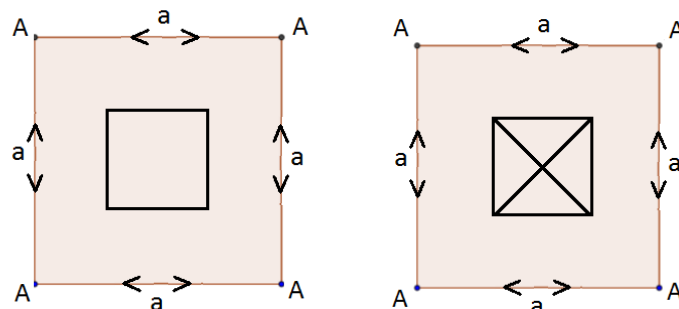
Typ symetrii:	(4 ₁)	(4 ₂)	(4 ₃)	(4 ₄)	(4 ₅)	(4 ₆)	(4 ₇)	(4 ₈)
Liczba krawędzi symetrycznych:	0	1	0	2	0	0	2	0
Liczba krawędzi niesymetrycznych:	1	0	2	1	2	4	0	1

Zgodnie z Obserwacją 5.4, jedyne potencjalne pary typów symetrii klepek 4-kątnych obu rodzajów, z których można zbudować N2R-parkietaż to:

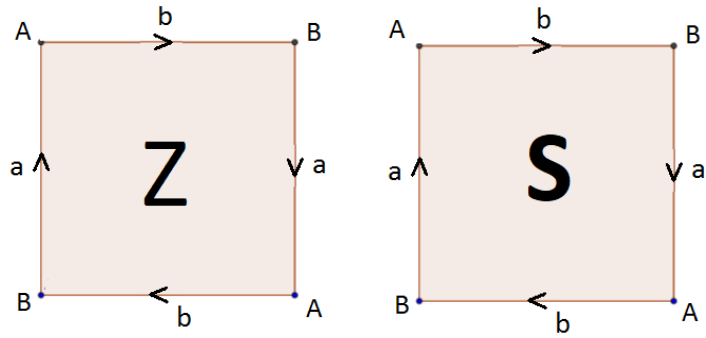
(4₁) – (4₁):



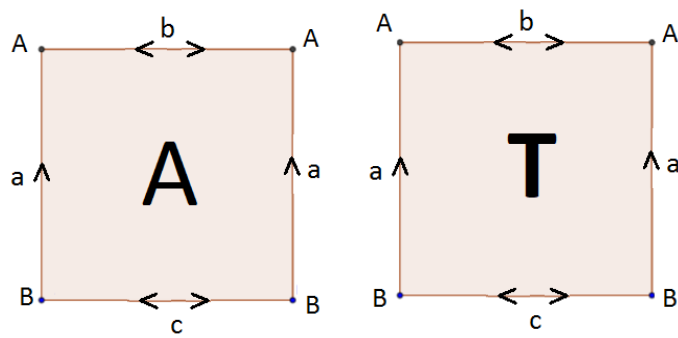
(4₂) – (4₂):



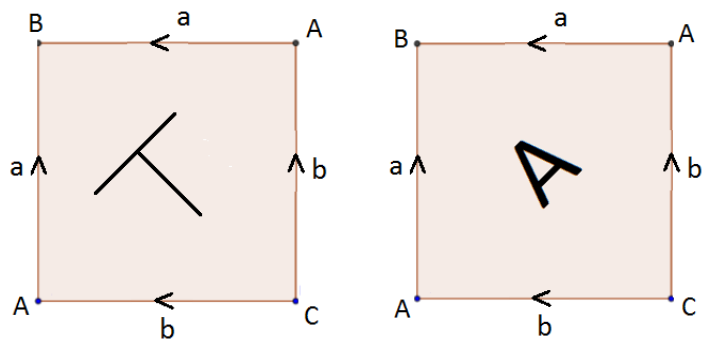
(4₃) – (4₃):



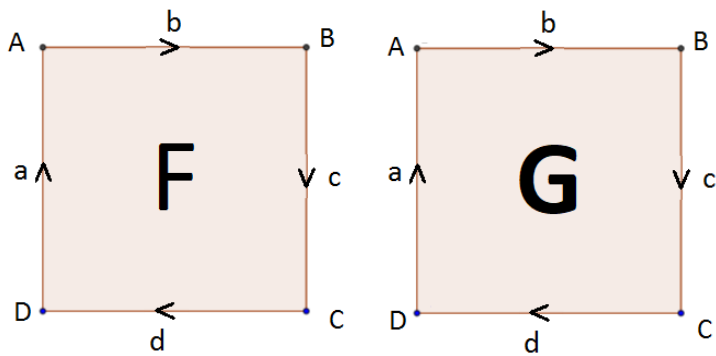
(4₄) – (4₄):



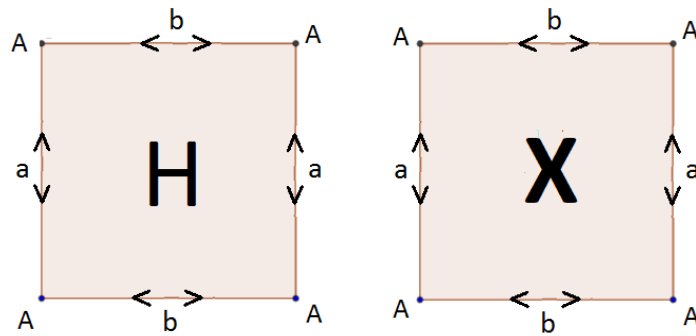
(4₅) – (4₅):



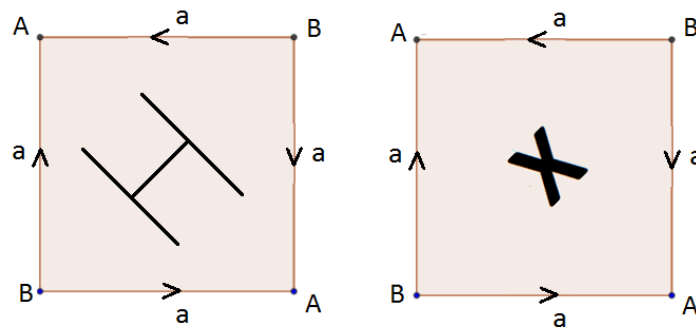
(4₆) – (4₆):



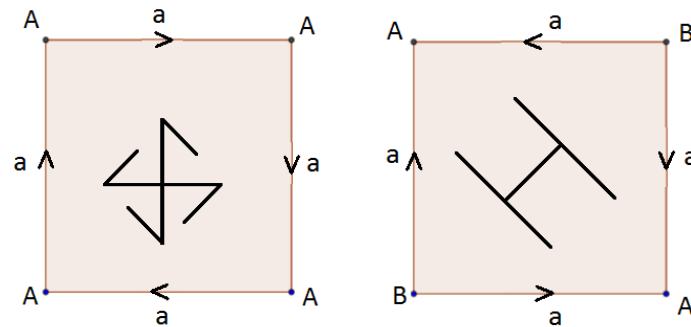
(47) – (47):



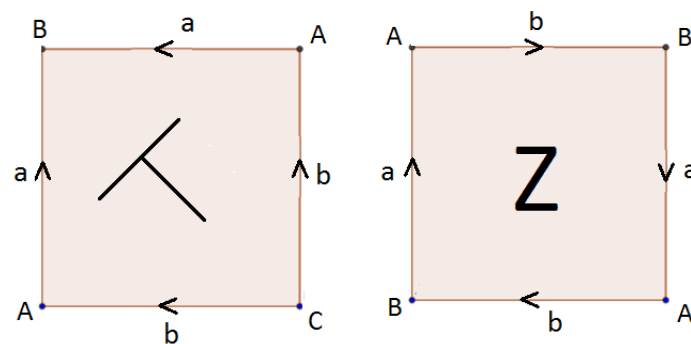
(48) – (48):



(41) – (48):



(43) – (45):



Rysunek 76.

Podobnie jak w przypadku pary 3-kąt – 3-kąt, w celu rozróżnienia klepki I rodzaju od klepki II rodzaju w parach klepek tego samego typu symetrii w drugiej płytce umieszczono inny symbol reprezentujący dany typ symetrii.

Lemat 8.2. Wszystkie wierzchołki N2R-parkietażu zbudowanego z obu płytek czworokątnych mają stopień 4.

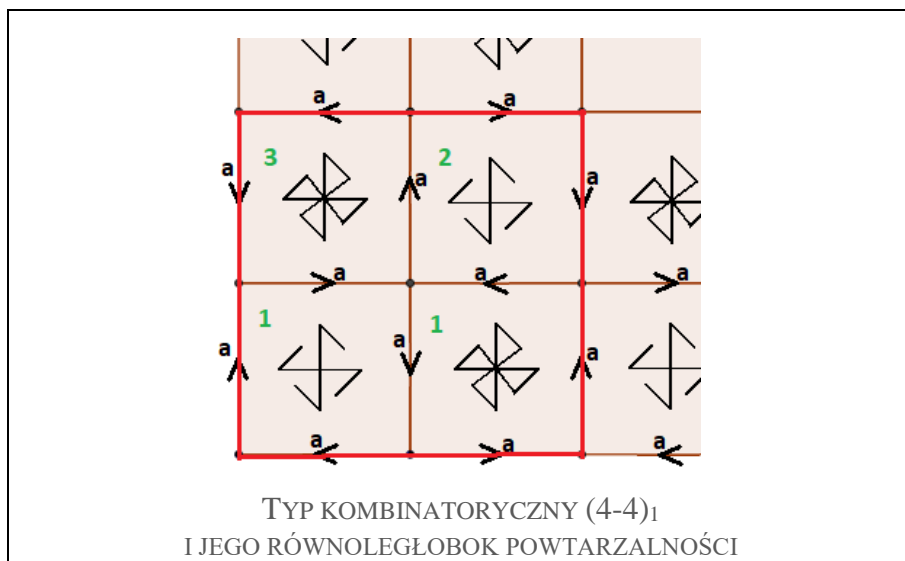
Dowód Lematu 8.2.

Rozważmy parkietaż indukowany na torusie z potencjalnego N2R-parkietażu. Załóżmy, że w parkietażu tym jest t czworokątów I rodzaju i s czworokątów II rodzaju. Liczba krawędzi wynosi zatem $K = 4t = 4s$ a z tego z kolei wynika, że $s = t$. Natomiast liczba ścian to $S = t + s = 2t$. Zgodnie z Lematem 1, $W \leq \frac{4t}{2}$. Równość zachodzi tylko wtedy, gdy do każdego wierzchołka przylegają dokładnie dwa 4-kąty każdego z rodzajów. Z drugiej strony, z charakterystyki Eulera widać, że: $0 = W - K + S = W - 4t + 2t = W - 2t$. Zatem otrzymujemy $W = 2t$. Skoro liczba wierzchołków jest równa $2t$, to znaczy, że wokół jednego wierzchołka są dokładnie dwa czworokąty I rodzaju i dwa czworokąty II rodzaju, występujące na przemian. To zaś oznacza, że każdy wierzchołek ma stopień 4. \square

Wypiszemy teraz wszystkie schematy typów kombinatorycznych i następnie sprawdzimy, czy prowadzą one do N2R-parkietażu.

Para typów symetrii $(4_1) - (4_1)$

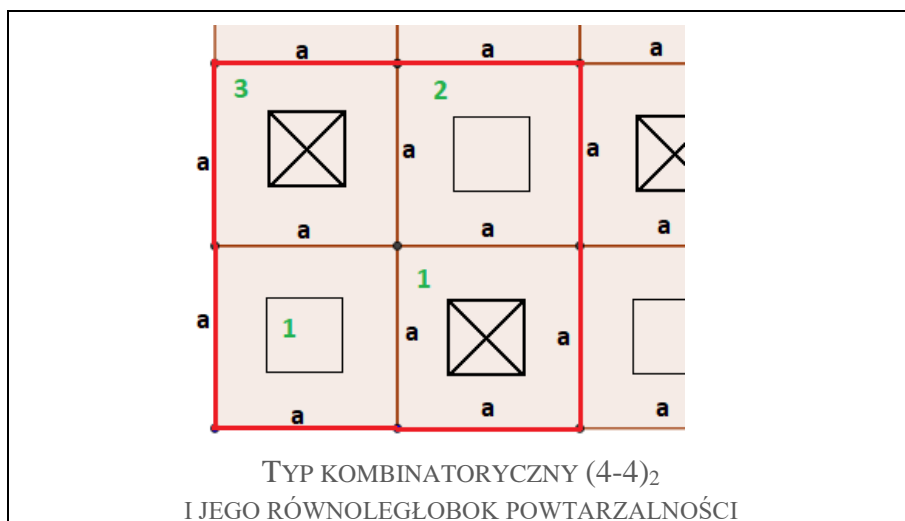
W tym przypadku otrzymujemy tylko jedną możliwość przystawienia płytek, ponieważ obie płytki mają typ symetrii obrotowej i jej symetrami są obroty o wielokrotności kąta 90° . Otrzymujemy prawdziwy typ kombinatoryczny, który przedstawiony jest na Rysunku 77.



Rysunek 77.

Para typów symetrii $(4_2) - (4_2)$

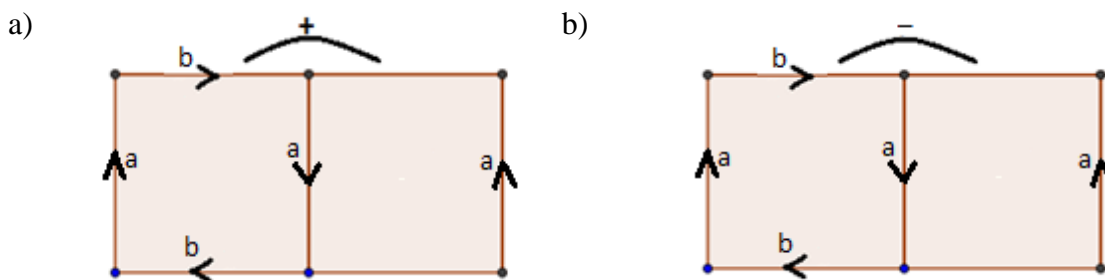
W związku z tym, że klepki obu rodzajów mają wszystkie krawędzie symetryczne, tego samego typu, to otrzymujemy jeden typ kombinatoryczny, a z niego N2R-parkietaż przedstawiony na Rysunku 78.



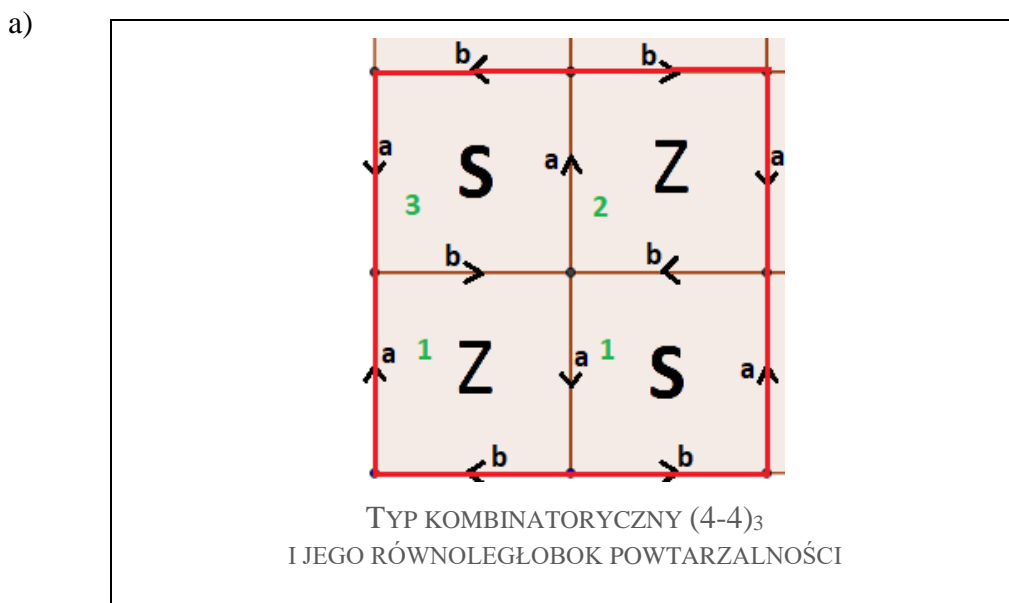
Rysunek 78.

Para typów symetrii $(4_3) - (4_3)$

Przystawiając płytki obu rodzajów wzdłuż krawędzi o typie a otrzymujemy dwa potencjalne typy kombinatoryczne. Wiemy, że obie płytki mają typ symetrii obrotowej, więc należy rozpatrzyć tylko dwa przypadki (Rysunek 79), które prowadzą do N2R-parkietażu (Rysunek 80 i Rysunek 81).

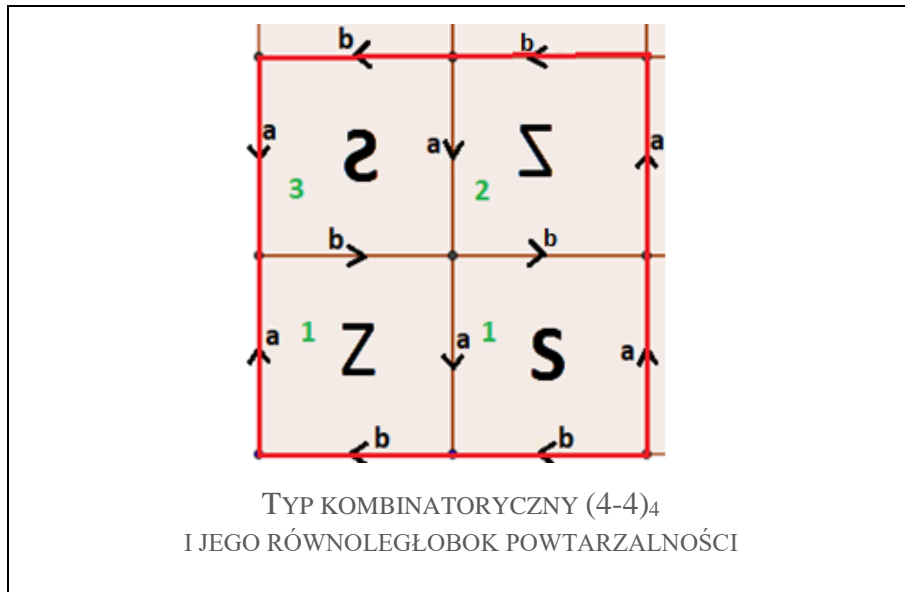


Rysunek 79.



Rysunek 80.

b)

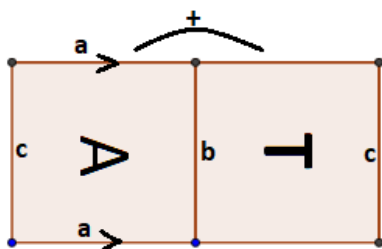


Rysunek 81.

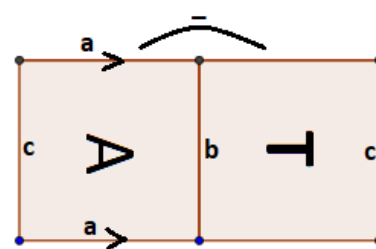
Para typów symetrii $(4_4) - (4_4)$

Obie płytki przystawiamy wzdłuż krawędzi symetrycznych. Wiemy, że dwie niesymetryczne krawędzie w każdej z obu klepek są tego samego typu (ponieważ obie klepki mają typ symetrii kalejdoskopowej D_1), więc otrzymujemy dwa potencjalne schematy typów kombinatorycznych (Rysunek 82).

a)



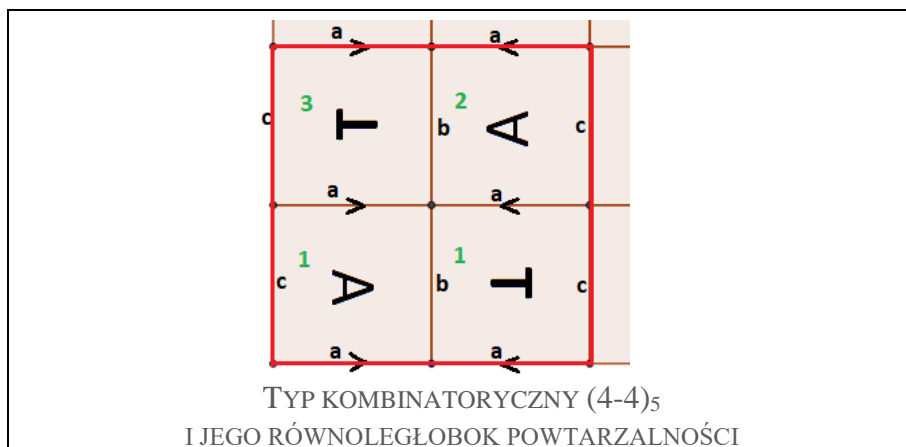
b)



Rysunek 82.

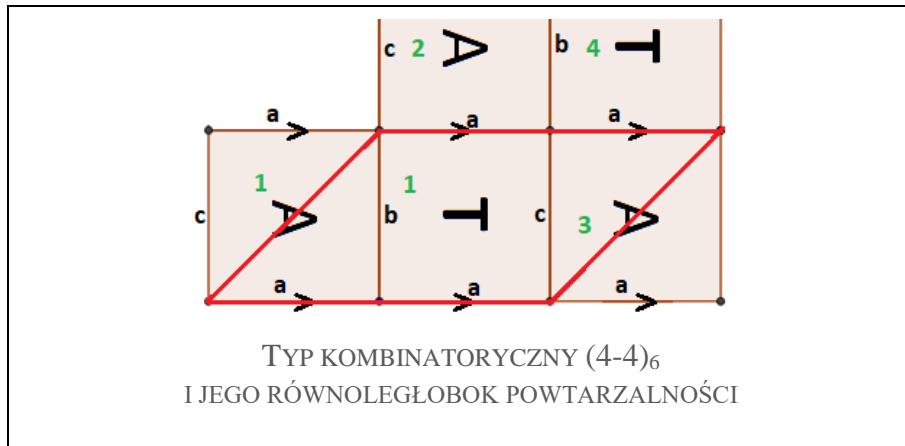
Okazuje się, że oba schematy typów kombinatorycznych przedstawionych na Rysunkach 83 i 84 prowadzą do N2R-parkietażu całej płaszczyzny.

a)



Rysunek 83.

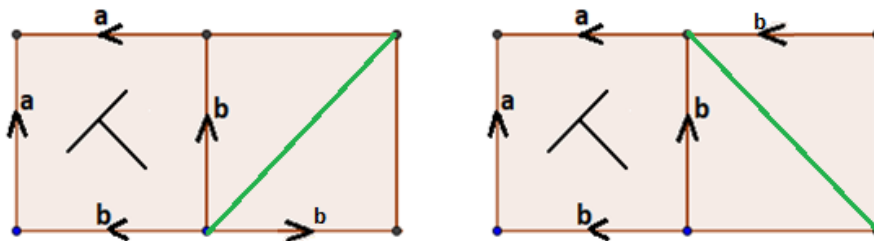
b)



Rysunek 84.

Para typów symetrii $(4_5) - (4_5)$

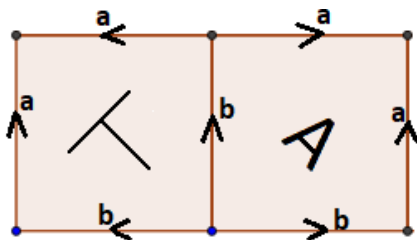
W tym przypadku płytki obu rodzajów mają typ symetrii kalejdoskopowej i osią symetrii każdej z klepek jest jedna przekątna czworokąta. Przystawiamy klepki wzdłuż krawędzi typu b i otrzymujemy dwa możliwe położenia klepki II rodzaju. Wystarczy dokonać analizy jednego typu kombinatorycznego, ponieważ położenie klepki II rodzaju zależy od początkowego przystawienia klepek wzdłuż krawędzi typu b , raz z dodatnią orientacją (lewa ilustracja Rysunku 85), a raz z ujemną orientacją (prawa ilustracja Rysunku 85).



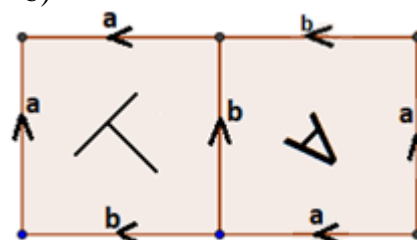
Rysunek 85.

Ostatecznie otrzymujemy dwa potencjalne typy kombinatoryczne (Rysunek 86).

a)

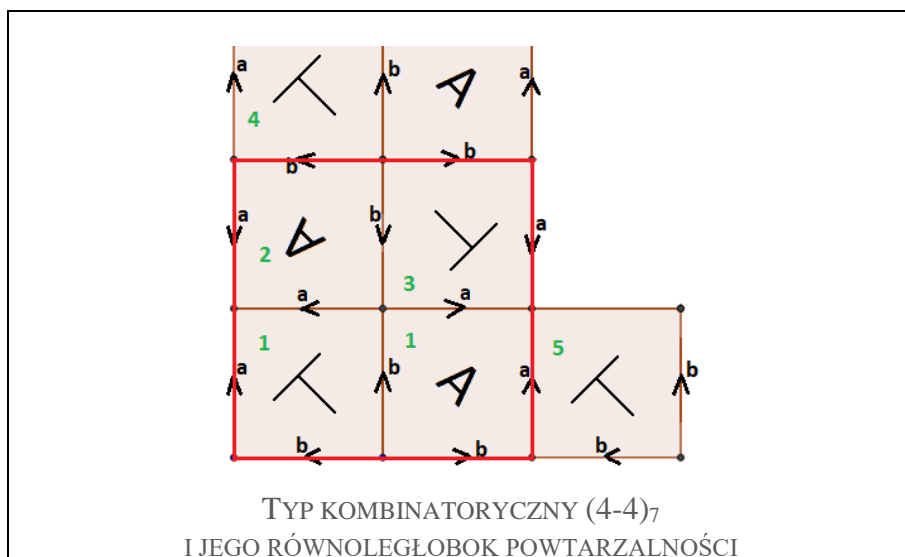


b)



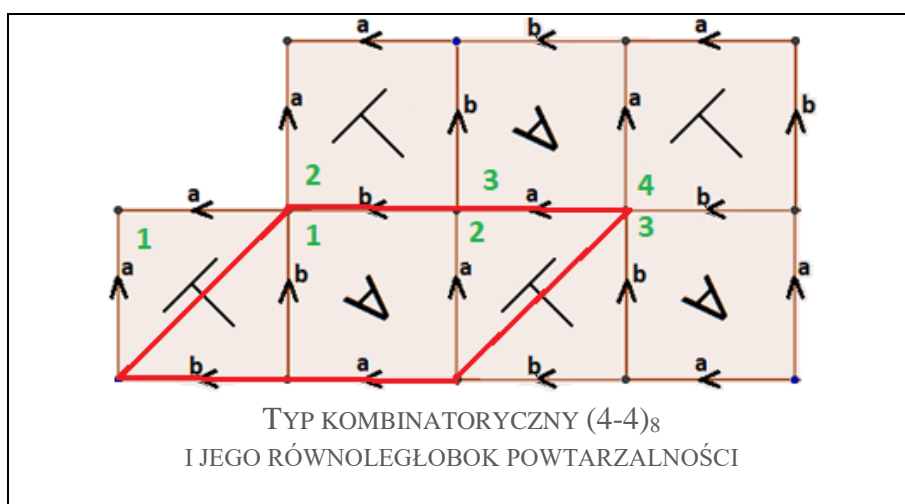
Rysunek 86.

Ad. a) Przystawiając płytki zgodnie z numeracją oznaczoną kolorem zielonym otrzymujemy równoległobok powtarzalności, a z niego N2R-parkietaż całej płaszczyzny (Rysunek 87)



Rysunek 87.

Ad. b) Przystawiając płytki zgodnie z numeracją oznaczoną kolorem zielonym otrzymujemy równoległobok powtarzalności, a z niego N2R-parkietaż całej płaszczyzny (Rysunek 88).

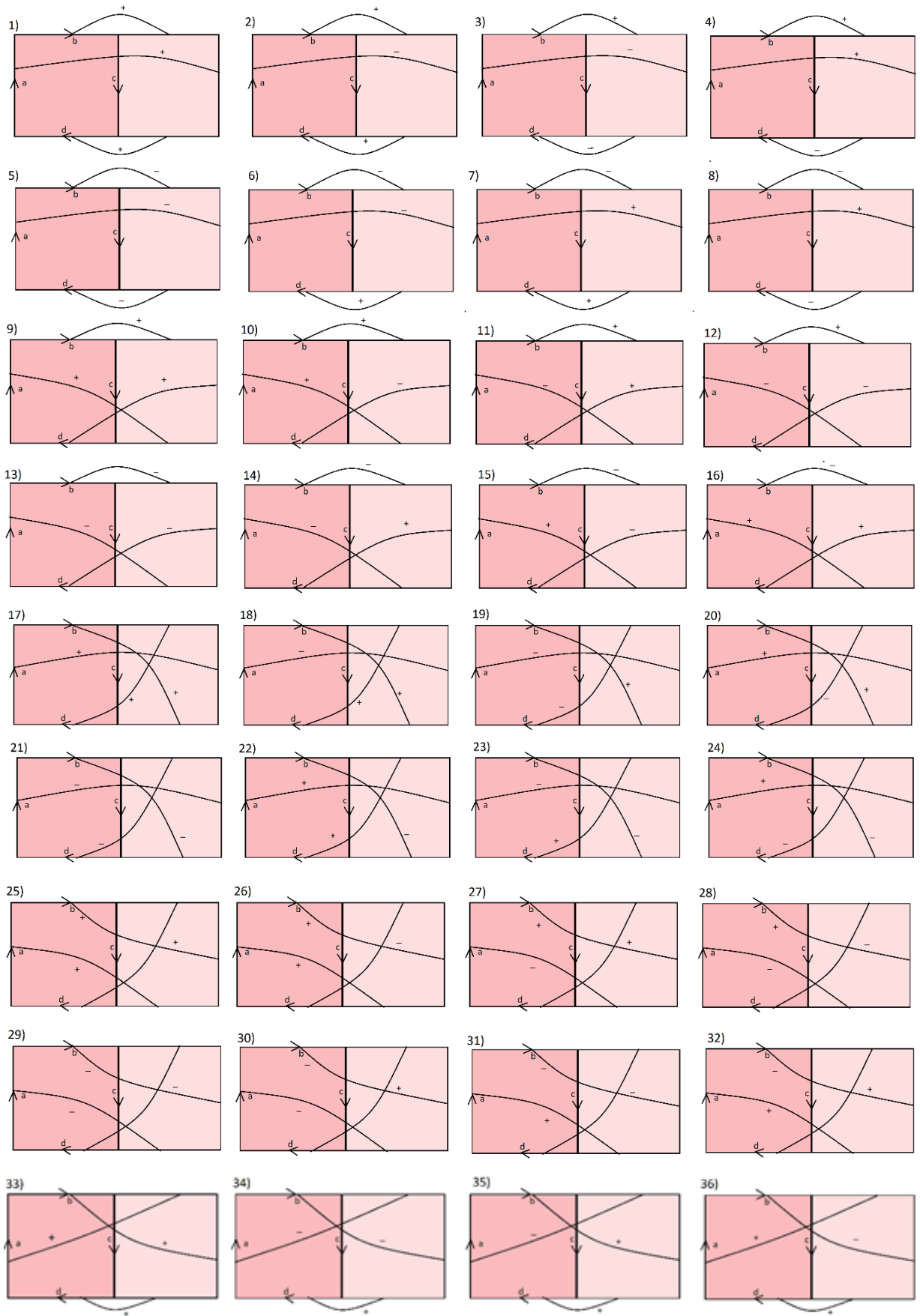


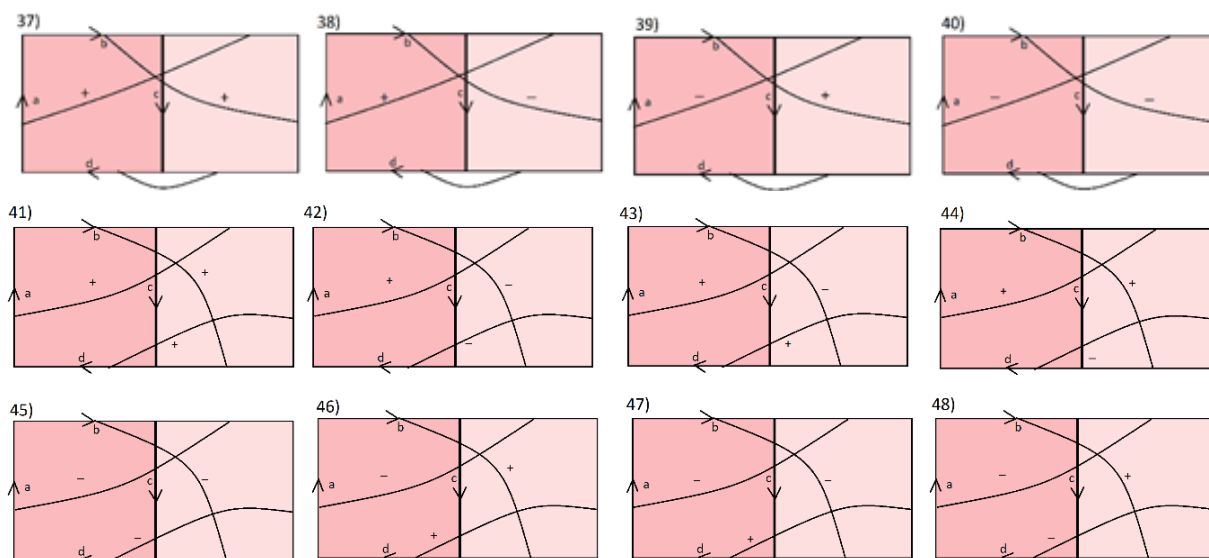
Rysunek 88.

Para typów symetrii (4₆) – (4₆)

W tym przypadku klepki obu rodzajów mają niesymetryczne krawędzie potencjalnie różnych typów. Przystawiamy klepki wzdłuż jednej z krawędzi, a następnie mamy 3! możliwości przystawienia trzech krawędzi płytki pierwszego rodzaju do trzech krawędzi płytki II rodzaju. Każde z tych przystawień może być związane z dodatnią, albo ujemną orientacją przystawianej płytki. Daje to nam $2^3 \cdot 3!$ sposobów przystawień klepek obu rodzajów, czyli 48 potencjalnych typów kombinatorycznych.

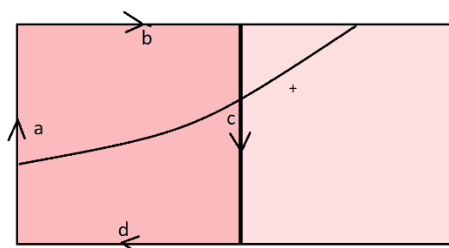
Na Rysunku 89 przedstawione są wszystkie schematy tych czterdziestu ośmiu typów kombinatorycznych.





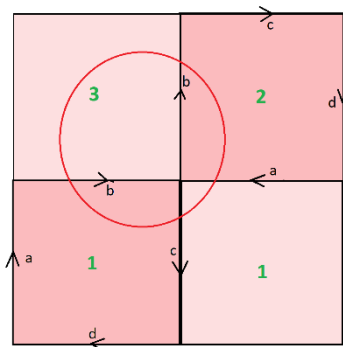
Rysunek 89.

Rozpatrzenie wszystkich schematów z osobna byłoby pracochłonne, więc zaczęłam zastanawiać się nad całymi grupami diagramów, które można wykluczyć wspólnym argumentem. Okazuje się, że łatwo można to zrobić. Jedna para przyległych typów krawędzi, która wyklucza osiem przypadków (a wraz z analogicznymi symetrycznymi nawet 24) zilustrowana jest na Rysunku 90.



Rysunek 90.

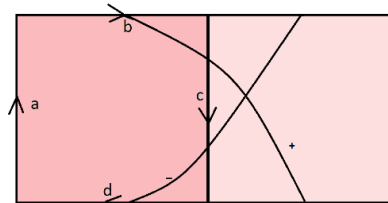
Przystawiając wyjściowe klepki oznaczone zielonym numerem 1, a następnie klepkę I rodzaju (numer 2) zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego, okazuje się, że płytkę II rodzaju (numer 3) powinna mieć dwie krawędzie typu b . Daje nam to sprzeczność, ponieważ klepka o typie symetrii (4_6) posiada wszystkie krawędzie o różnych typach (Rysunek 91).



Rysunek 91.

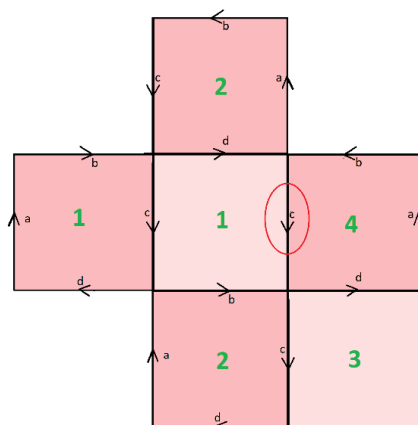
Para przyległych typów krawędzi przedstawiona na Rysunku 90 wyklucza wszystkie schematy typów kombinatorycznych, które zawierają ten sposób przylegania, a także analogiczne symetryczne schematy. Są to typy o numerach: 9, 10, 11, 14, 15, 16, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 47.

Kolejny wybór pary przyległych krawędzi (Rysunek 92) wyklucza inne cztery schematy typów kombinatorycznych: 19, 20, 22 oraz 23.



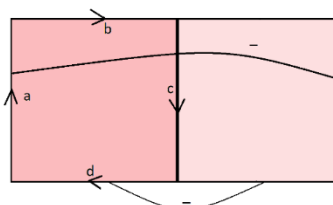
Rysunek 92.

Zgodnie z Rysunkiem 93, przystawiamy klepki I rodzaju (numer 2) do klepki wyjściowej II rodzaju, zgodnie wyborem pary przyległych krawędzi. Następnie do krawędzi typu c klepki I rodzaju dostawiamy klepkę II rodzaju (numer 3) oraz ponownie klepkę I rodzaju (numer 4) do krawędzi typu d płytki 3. Okazuje się, że płytka II rodzaju powinna mieć wtedy dwie krawędzie typu c , co jest sprzeczne z jej typem symetrii.



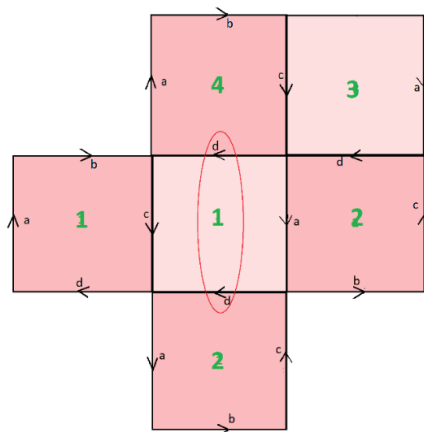
Rysunek 93.

Kolejny wybór pary przyległych krawędzi wyklucza trzy typy kombinatoryczne, które zawierają ten sposób przylegania (Rysunek 94). Są to typy 3, 5 oraz 6.



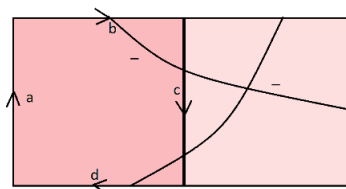
Rysunek 94.

Na początek, zgodnie z Rysunkiem 95, przystawiamy klepki I rodzaju o numerze 2 do wyjściowej klepki II rodzaju według wyboru pary przyległych krawędzi, a następnie klepki o numerach 3 i 4. Szybko okazuje się, że wyjściowa klepka II rodzaju musiałaby mieć dwie krawędzie jednakowego typu d , co jest sprzeczne z typem symetrii klepki.



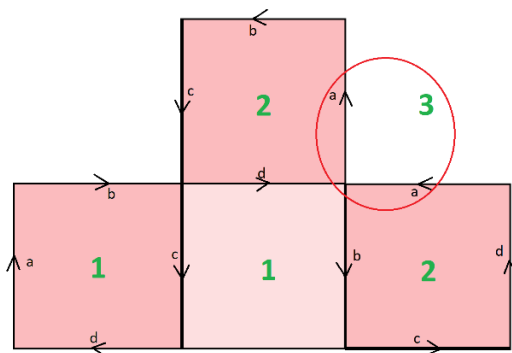
Rysunek 95.

Następny wybór pary przyległych krawędzi (Rysunek 96) wyklucza dwa diagramy spośród tych, które nie zostały jeszcze odrzucone: 29 i 45.



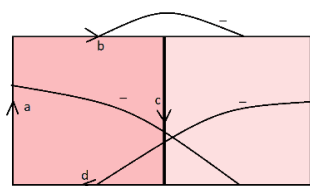
Rysunek 96.

Przystawiając klepki zgodnie z numeracją zaznaczoną na zielono, okazuje się, że klepka II rodzaju (numer 3) powinna mieć dwie krawędzie tego samego typu a (Rysunek 97).

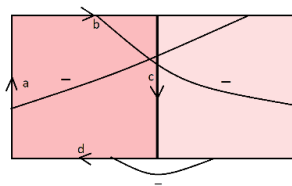


Rysunek 97.

Kolejne dwa schematy typów kombinatorycznych (13 i 40) są symetryczne, a więc, zgodnie z Definicją 6.2, opisują równoważne typy kombinatoryczne (Rysunki 98 i 99). Okazuje się, że schematy te także możemy wykluczyć.

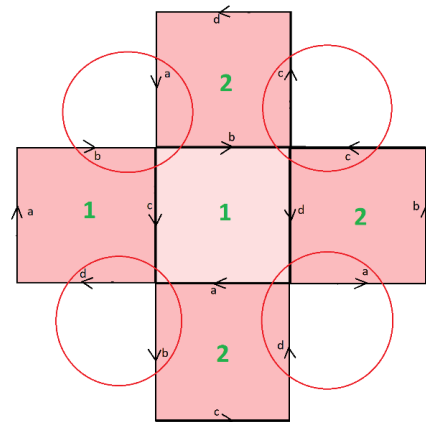


Rysunek 99.



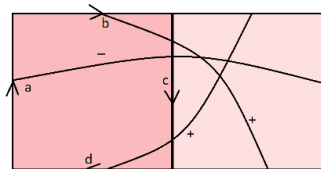
Rysunek 98.

Przystawiamy do płytki II rodzaju, zgodnie ze schematem typu kombinatorycznego, płytki I rodzaju (numer 2) i okazuje się, że chcąc przystawić płytki II rodzaju otrzymujemy sprzeczność z wyjściową klepką II rodzaju (Rysunek 100).



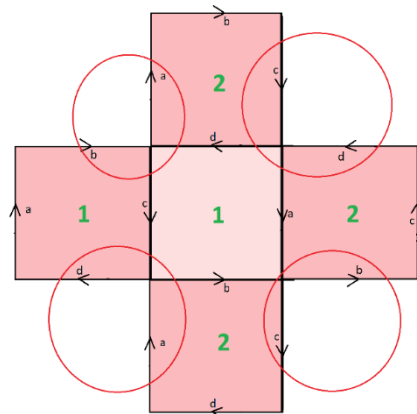
Rysunek 100.

Ostatni schemat, który również można wykluczyć, to schemat typu kombinatorycznego o numerze 18 (Rysunek 101).



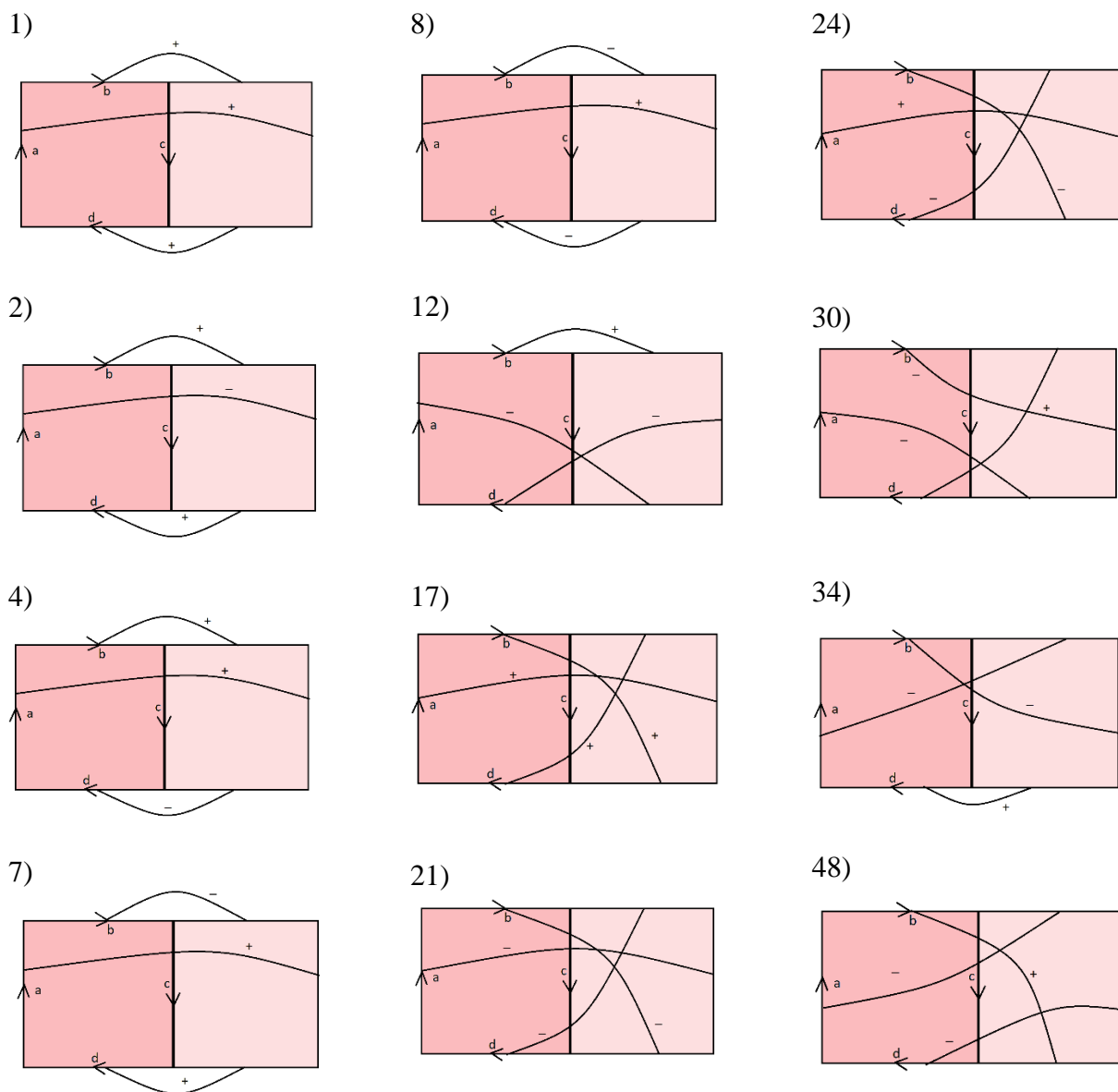
Rysunek 101.

Przystawiając płytki zgodnie z numeracją oznaczoną na zielono na Rysunku 102, okazuje się, że płytki II rodzaju, które powinny przylegać na przemian z klepkami I rodzaju mają inny zwrot strzałek (oznaczono czerwonymi pętlami) niż wyjściowa klepka II rodzaju o numerze 1.



Rysunek 102.

Takim oto sposobem wykluczaliśmy szybko aż 36 schematów potencjalnych typów kombinatorycznych, z których nie można uzyskać N2R-parkietażu. Pozostałe typy kombinatoryczne (jest ich 12) przedstawione na Rysunku 103, prowadzą do N2R-parkietażu całej płaszczyzny i przedstawię teraz ich równoległoboki powtarzalności oraz fragmenty tych parkietażu.



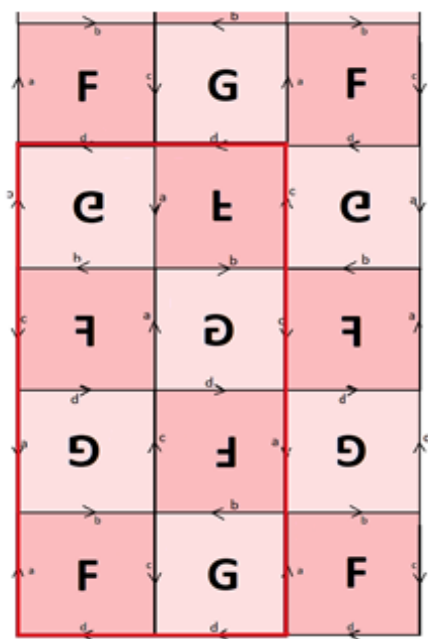
Rysunek 103.

Z Rozdziału 6, który definiuje typ kombinatoryczny, wiemy, że symetryczne schematy opisują ten sam typ kombinatoryczny. W tym przypadku, symetryczne schematy to: 4 i 7, 12 i 34, 30 i 48. W takim razie, w każdej parze możemy rozpatrzyć po jednym przypadku, co daje nam 9 typów kombinatorycznych. Jednakże, okazuje się, że również spośród tych dziewięciu N2R-parkietaczy płaszczyzny można znaleźć takie, które mają ten sam typ kombinatoryczny. N2R-parkietacze pochodzące od schematów 2, 4 i 21 mają ten sam typ kombinatoryczny (Rysunek 104), jak i również 8 i 24 mają ten sam typ kombinatoryczny (Rysunek 105). Pozostawimy czytelnikowi dokładniejsze uzasadnienie tych obserwacji.

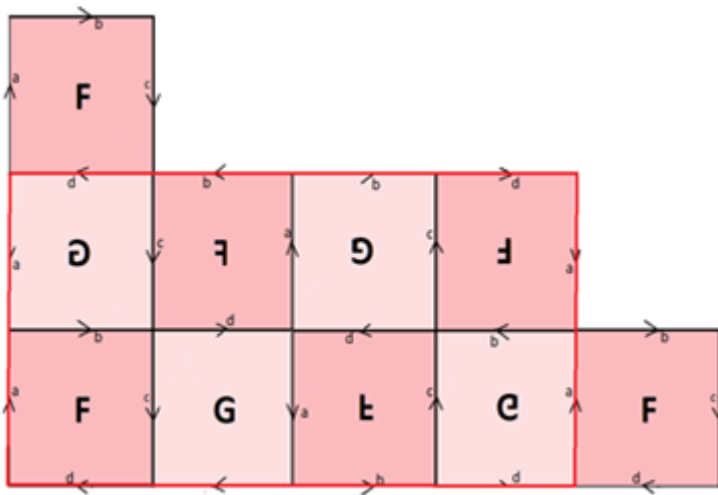
2)



4)

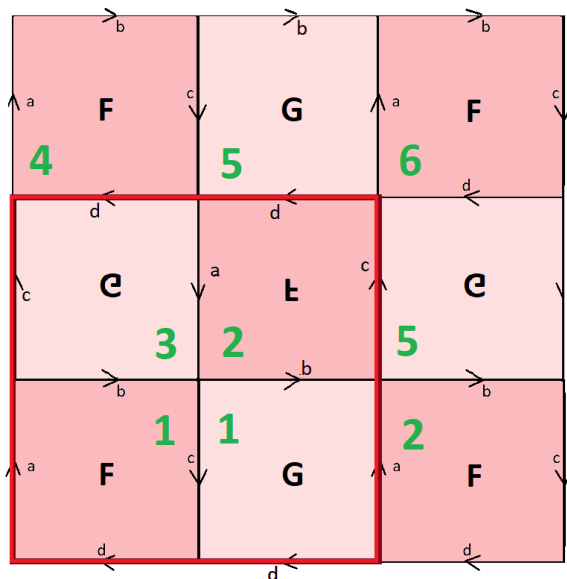


21)

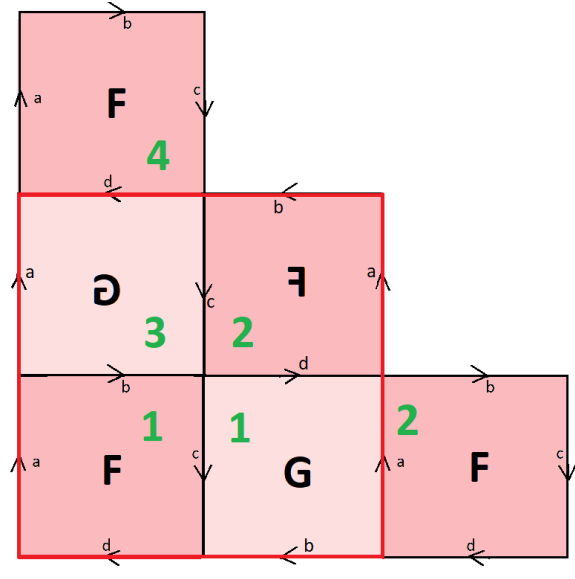


Rysunek 104. Parkietaże pochodzące od schematów 2), 4) i 21) o jednakowym typie parkietaży

8)



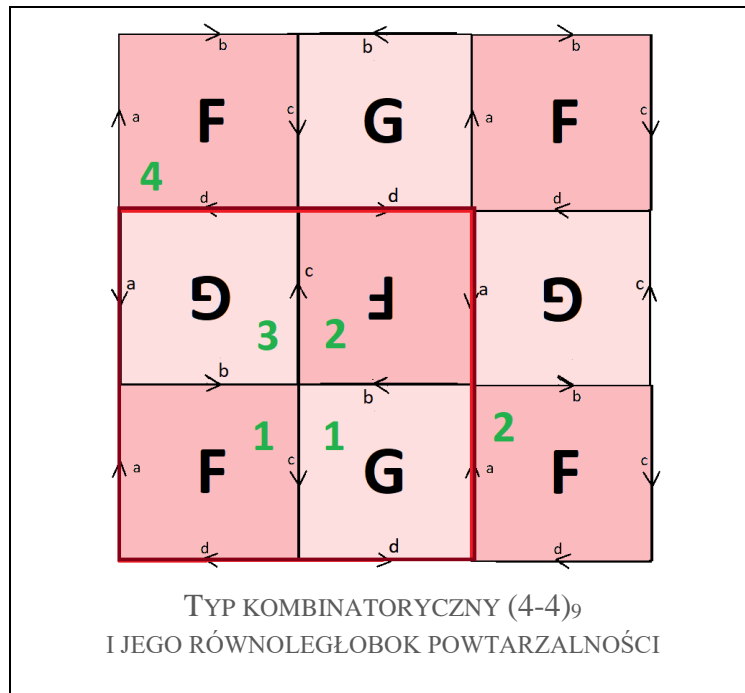
24)



Rysunek 105. Parkietaże pochodzące od schematów 8) i 24) o jednakowym typie parkietaży

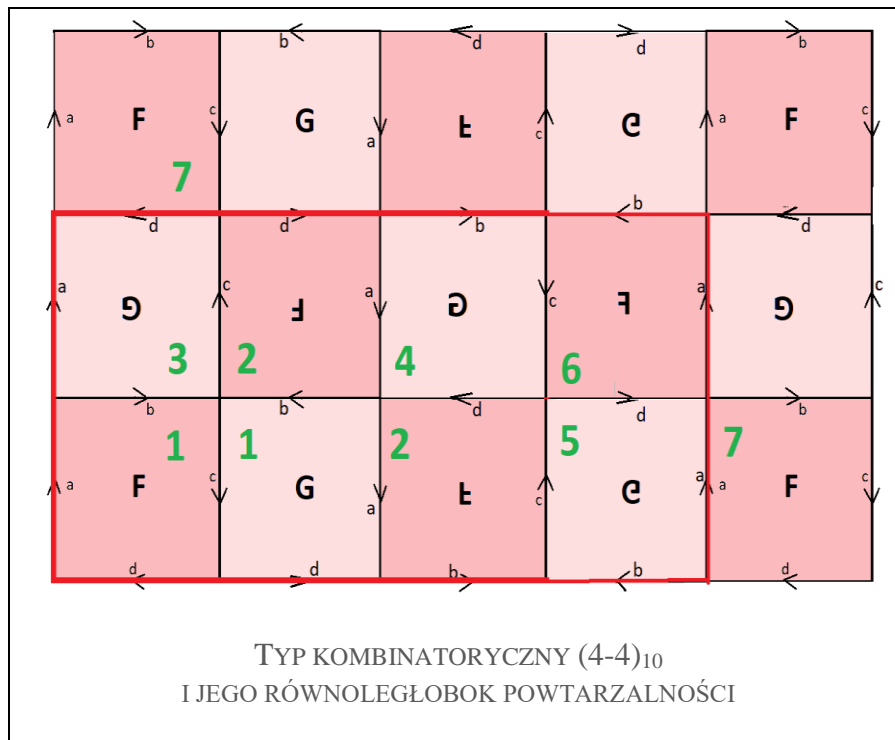
Podsumowując, pozostaje nam 6 różnych typów kombinatorycznych dla N2R-parkietaży z klepkami o typach symetrii $(4_6) - (4_6)$ (Rysunki od 106 do 111).

Ad. 1)



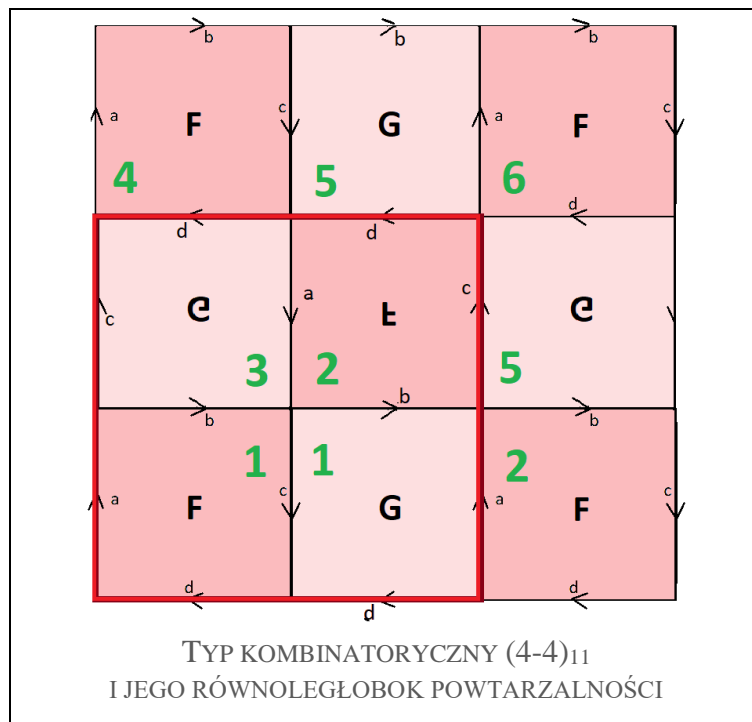
Rysunek 106.

Ad. 2)



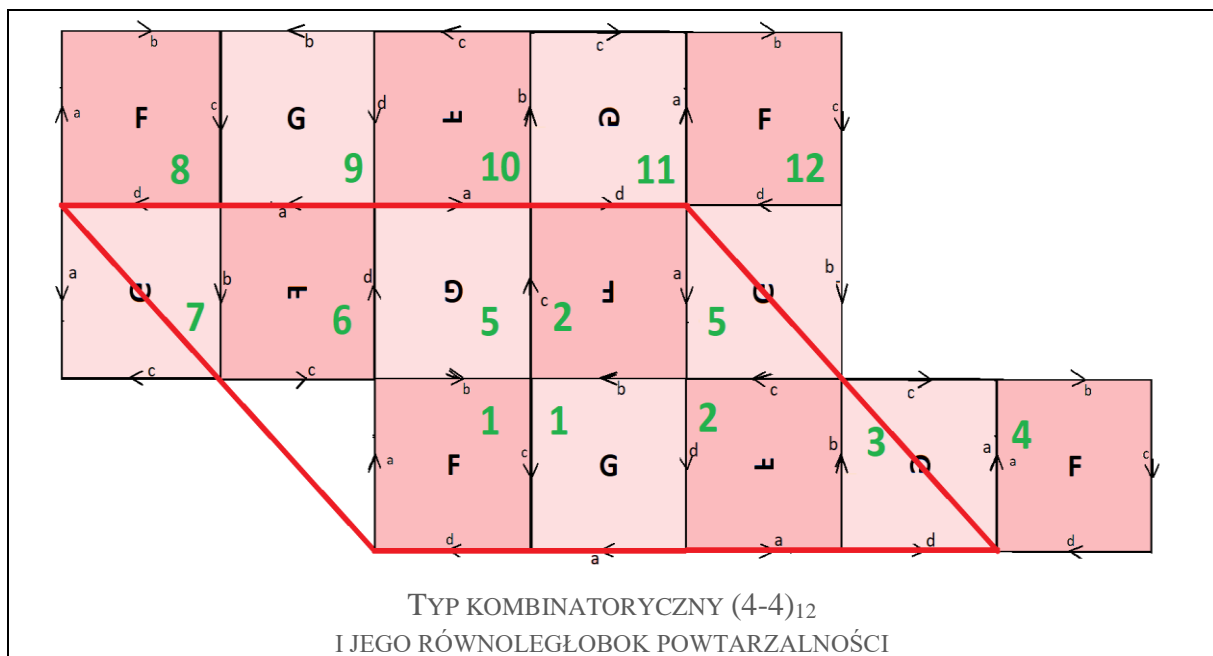
Rysunek 107.

Ad. 8)



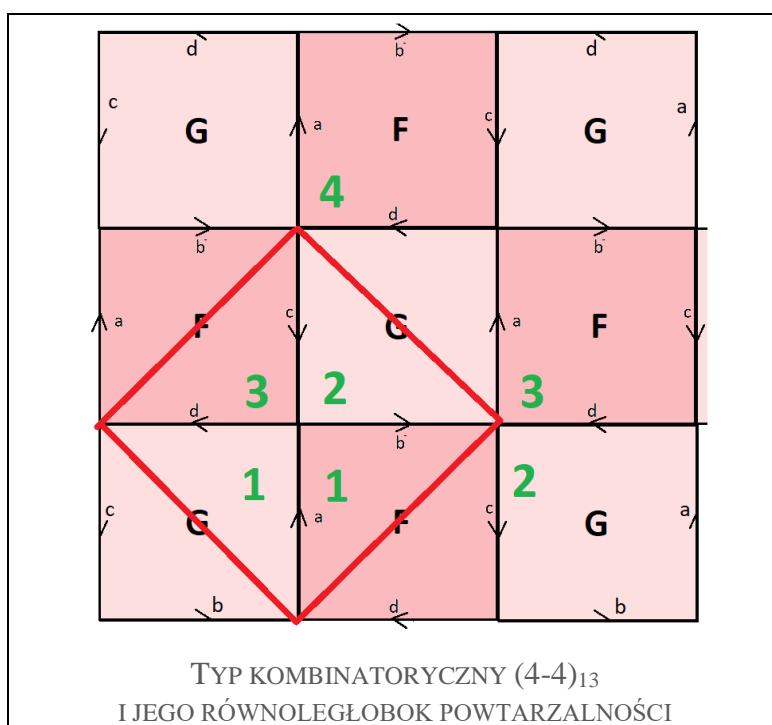
Rysunek 108.

Ad. 12)



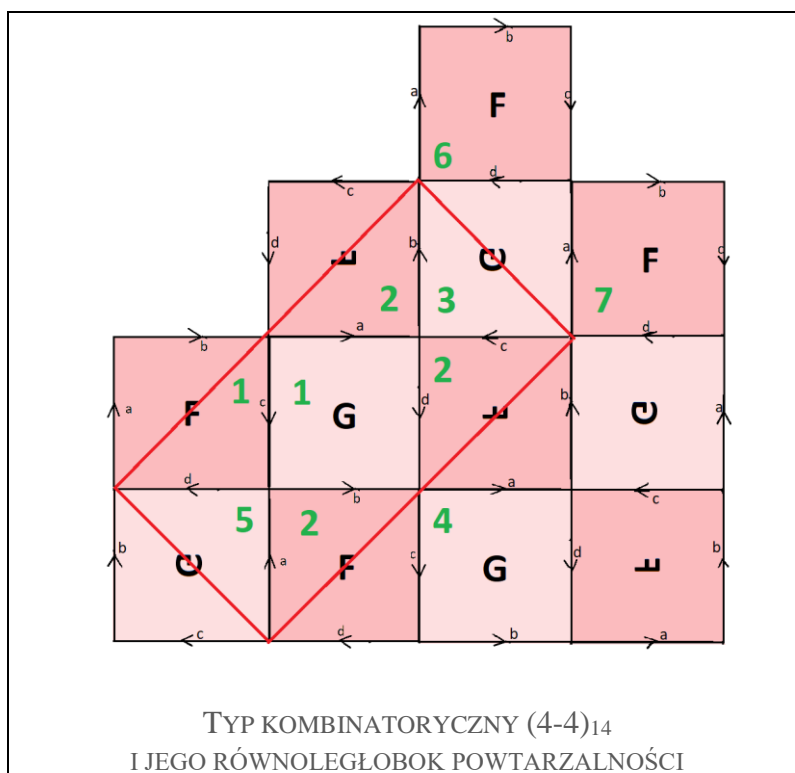
Rysunek 109.

Ad. 17)



Rysunek 110.

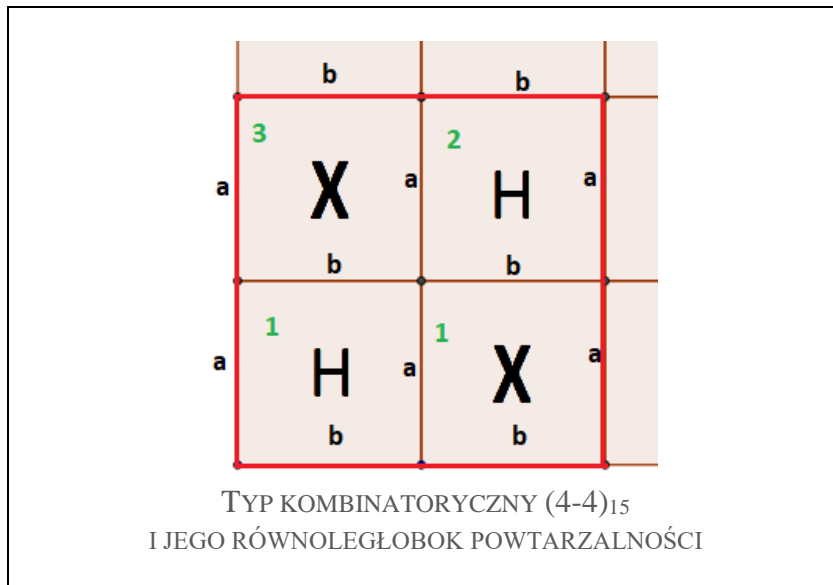
Ad. 48)



Rysunek 111.

Para typów symetrii (4₇) – (4₇)

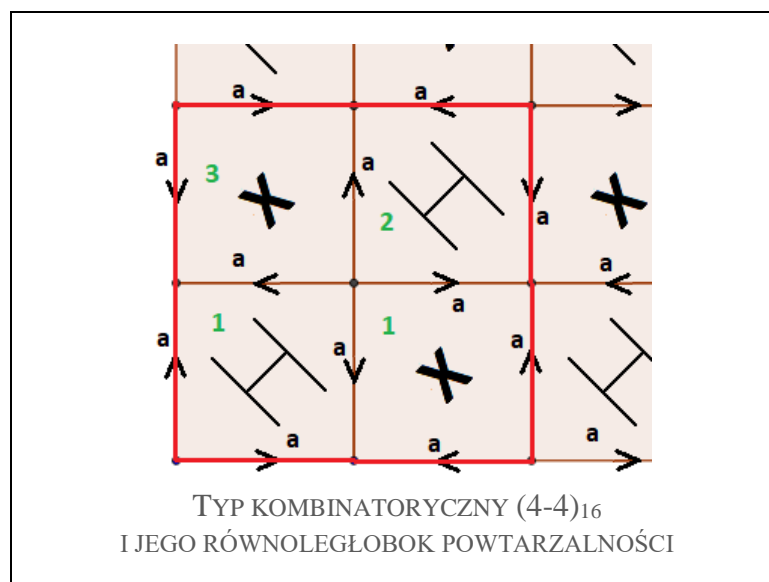
Przystawiamy klepki obu rodzajów symetrycznymi krawędziami i otrzymujemy jeden typ kombinatoryczny, a z niego N2R-parkietaż całej płaszczyzny (Rysunek 112).



Rysunek 112.

Para typów symetrii (4₈) – (4₈)

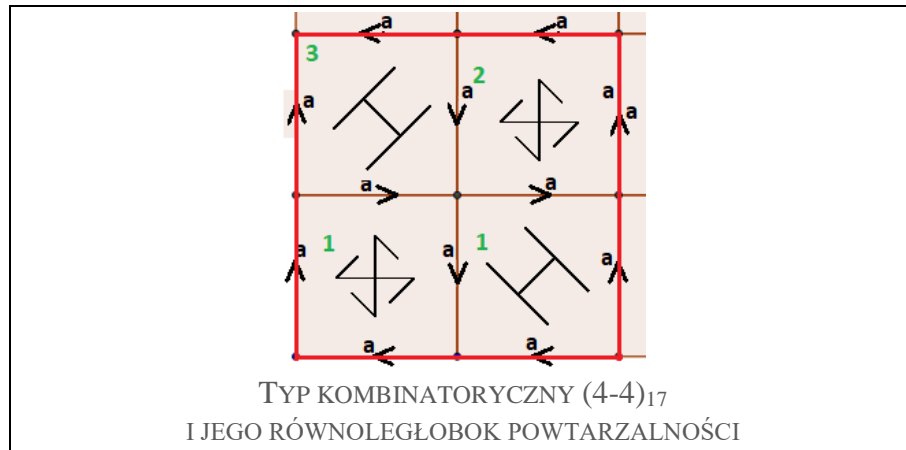
Przystawiamy klepki obu rodzajów jedną z krawędzi tego samego typu i otrzymujemy jeden typ kombinatoryczny. Jest tak, ponieważ symetrami klepki są osie symetrii wzdłuż obu przekątnych. W ten sposób otrzymujemy N2R-parkietaż (Rysunek 113).



Rysunek 113.

Para typów symetrii (4₁) – (4₈)

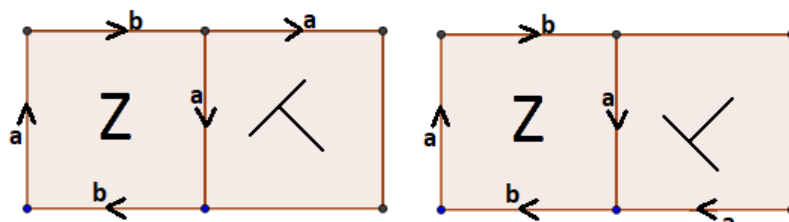
Kolejny przypadek znowu prowadzi do jednego typu kombinatorycznego. Osie symetrii klepki II rodzaju przekształcają jedną z krawędzi na pozostałe trzy krawędzie. Otrzymujemy kolejny równoległobok powtarzalności, a z niego N2R-parkietaż całej płaszczyzny (Rysunek 114).



Rysunek 114.

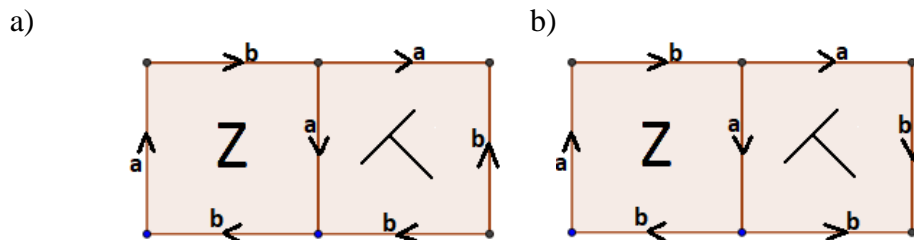
Para typów symetrii (4₃) – (4₅)

Płytki II rodzaju ma typ symetrii kalejdoskopowej, czyli jej osią symetrii jest jedna z przekątnych czworokąta. W związku z tym możemy od razu na rysunku zaznaczyć odbitą krawędź typu *a*, co daje nam dwa przypadki (Rysunek 115). Analogicznie jak w przypadku pary typów symetrii (4₅) – (4₅), te typy kombinatoryczne są równoważne, gdyż klepki na początku przystawione są raz wzdłuż krawędzi typu *a* z dodatnią orientacją (lewy rysunek), a raz z ujemną (prawy rysunek).



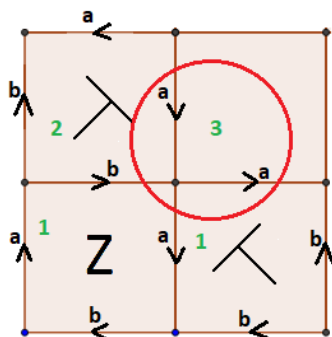
Rysunek 115.

Pozostałe dwie krawędzie są tego samego typu *b*, więc mamy dwa potencjalne typy kombinatoryczne.



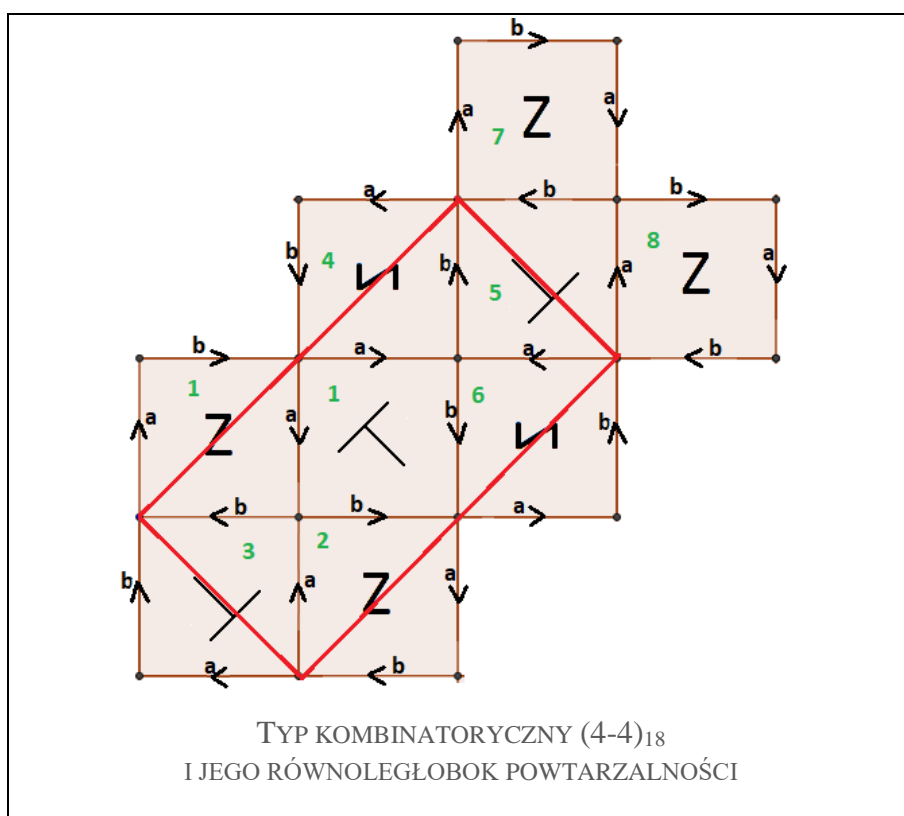
Rysunek 116.

Ad. a) Pierwszej możliwości Rysunku 116 nie da się rozwinąć do N2R-parkietażu, co obrazuje ilustracja z Rysunku 117. Przystawiając klepki zgodnie z zieloną numeracją, okazuje się, że klepka I rodzaju oznaczona zielonym numerem 3 ma dwie sąsiednie krawędzie typu *a*, co jest sprzeczne z wyjściową klepką tego samego typu.



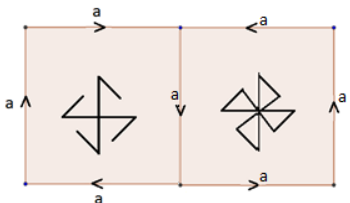
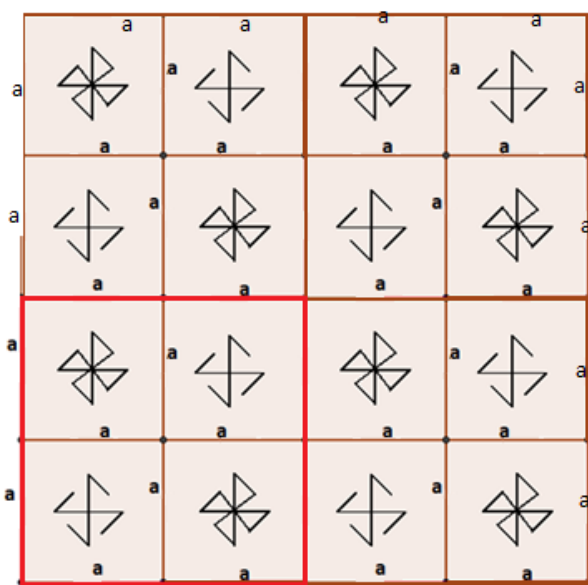
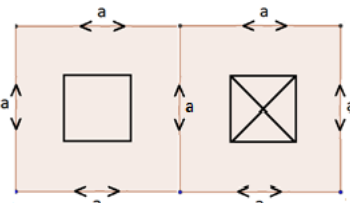
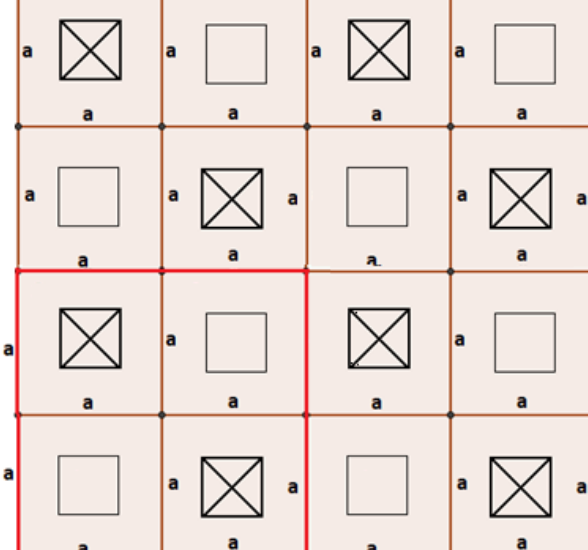
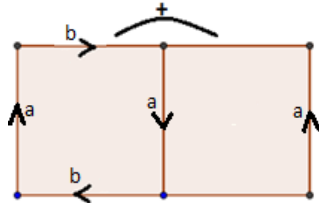
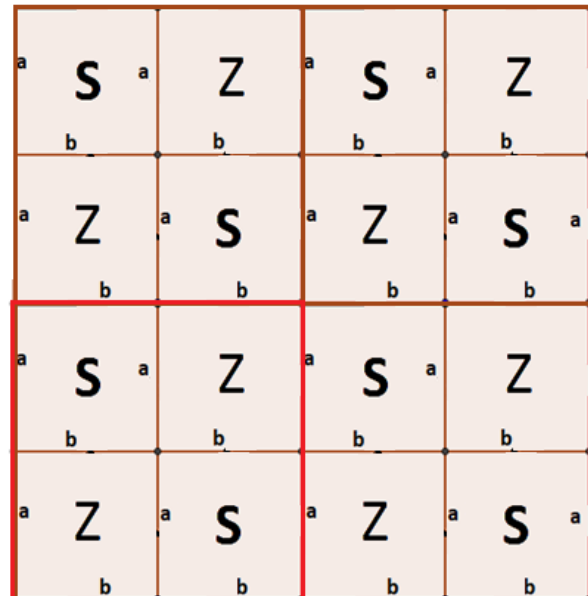
Rysunek 117.

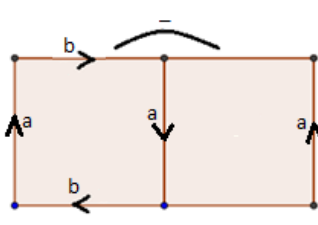
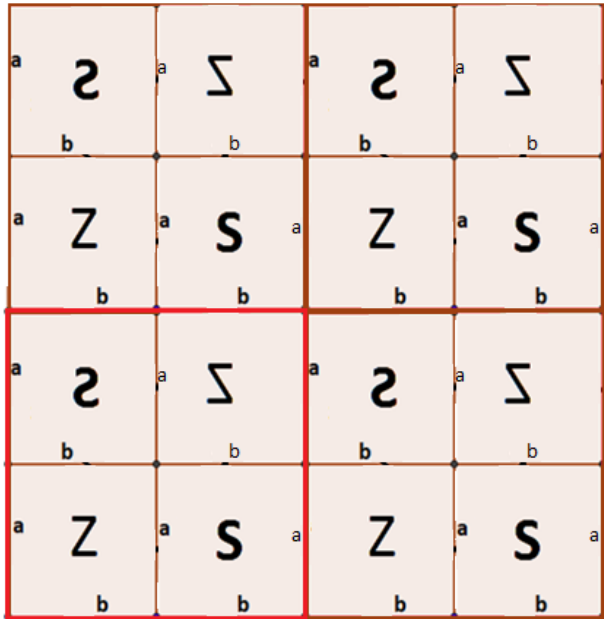
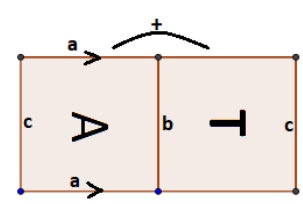
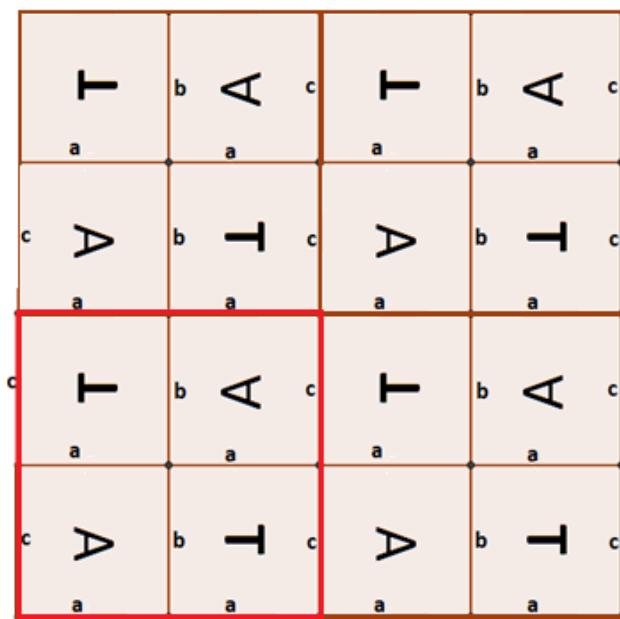
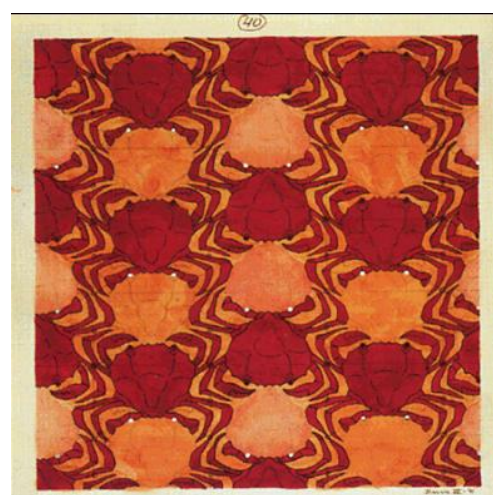
Ad. b) Przystawiając klepki zgodnie z drugim typem kombinatorycznym otrzymujemy równoległobok powtarzalności, a z niego prawdziwy N2R-parkietaż (Rysunek 118).

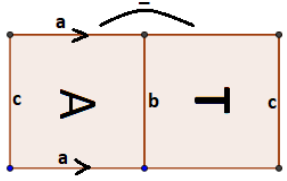
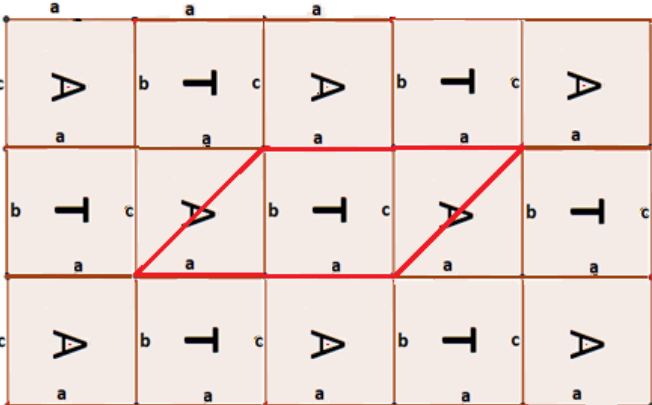
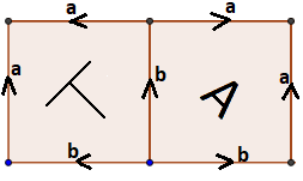
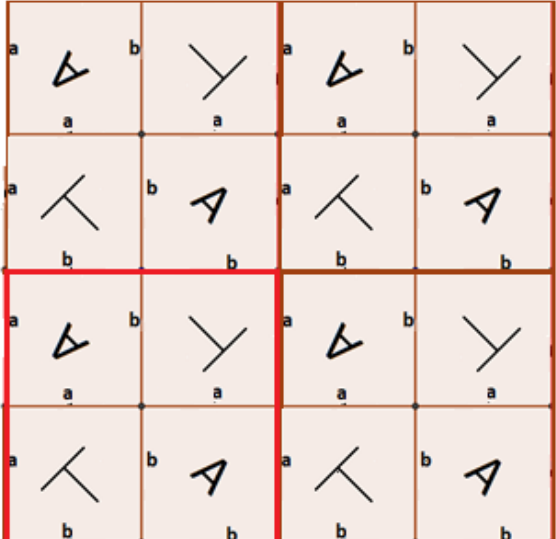
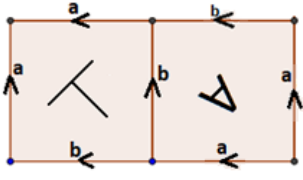
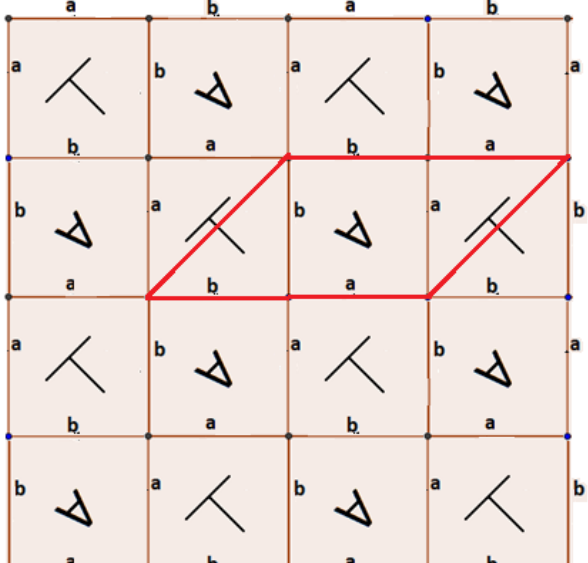


Rysunek 118.

Podsumowując, jedynie z osiemnastu schematów typów kombinatorycznych przystawiania klepek 4-kątnych do klepek 4-kątnych można uzyskać N2R-parkietaż całej płaszczyzny. Przedstawimy teraz wszystkie prawidłowe typy kombinatoryczne razem z fragmentami N2R-parkietażu wraz z zaznaczeniem pojedynczego równoległoboku powtarzalności. W przypadku, gdy dany typ kombinatoryczny pojawił się wśród kompozycji Mauritsa Eschera, dołączymy również ilustrację takiej przykładowej kompozycji.

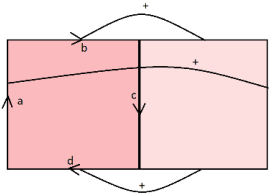
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₁		
(4-4) ₂		
(4-4) ₃		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₄		
(4-4) ₅		 

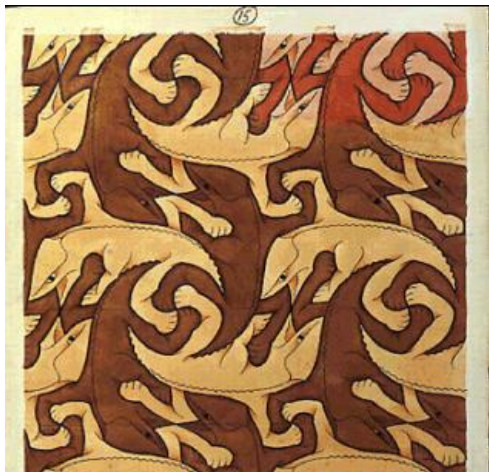
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₆		
(4-4) ₇		
(4-4) ₈		

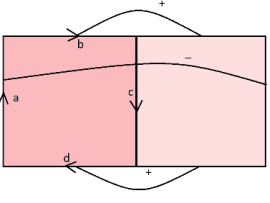
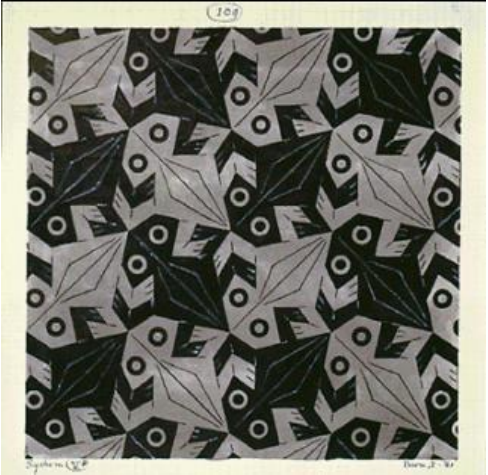
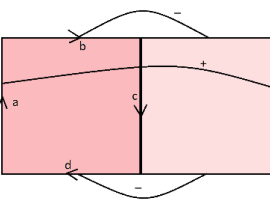



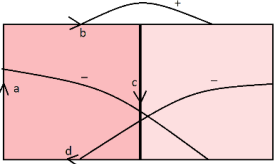
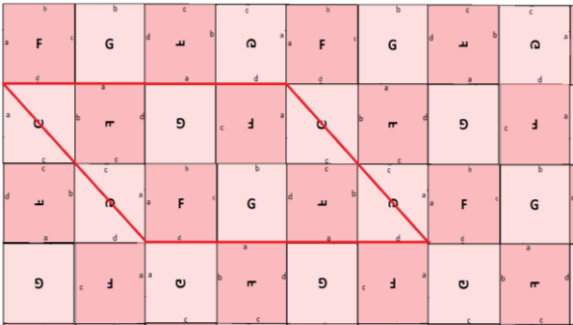

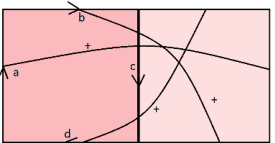
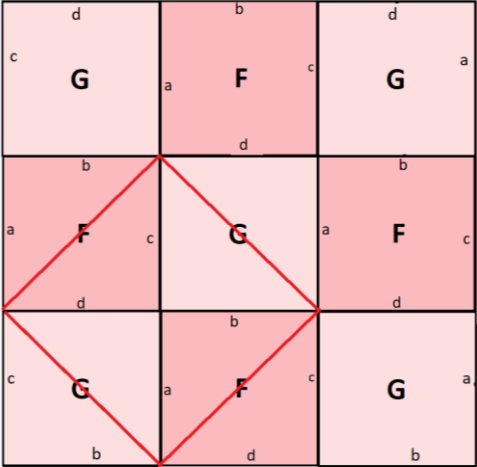
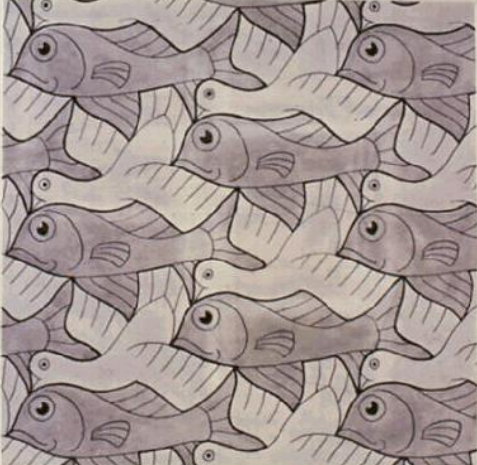
(4-4)₉

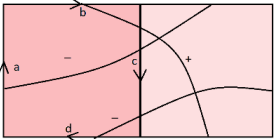
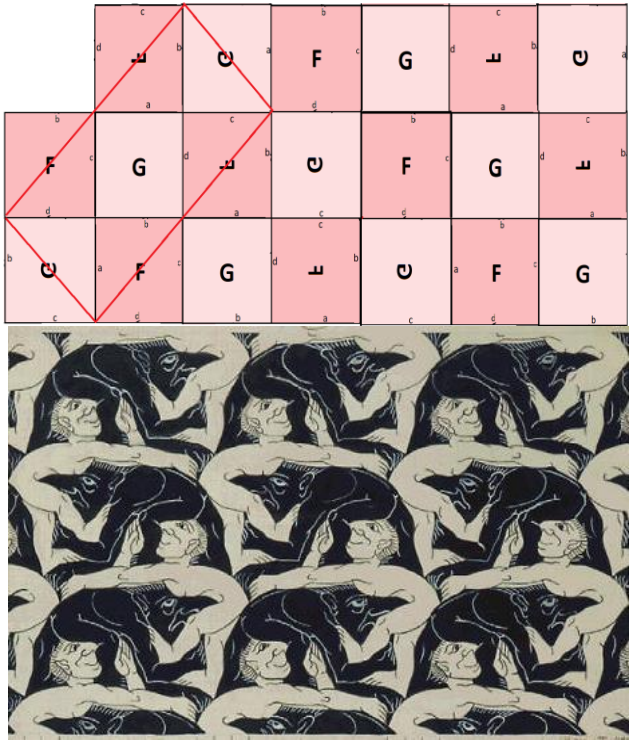
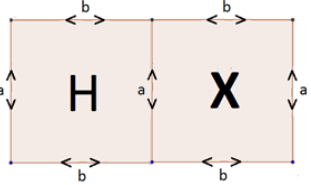
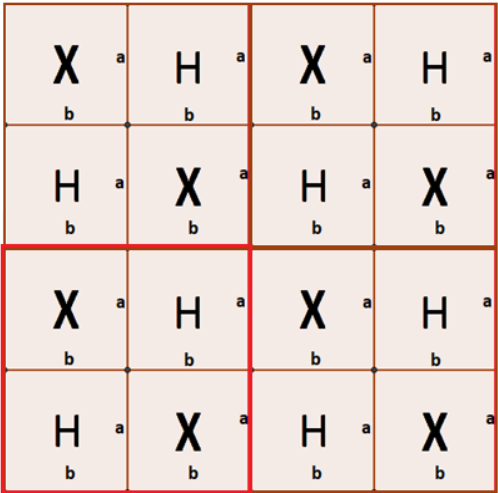
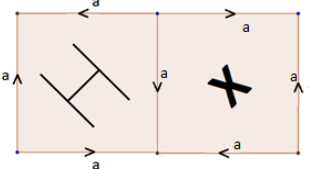
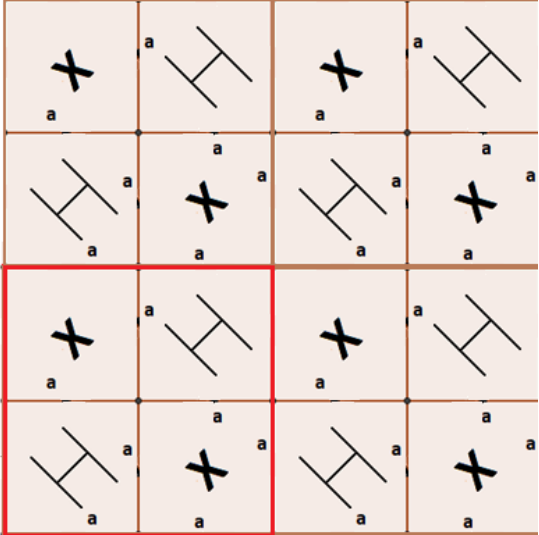


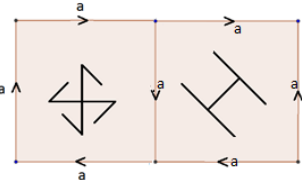
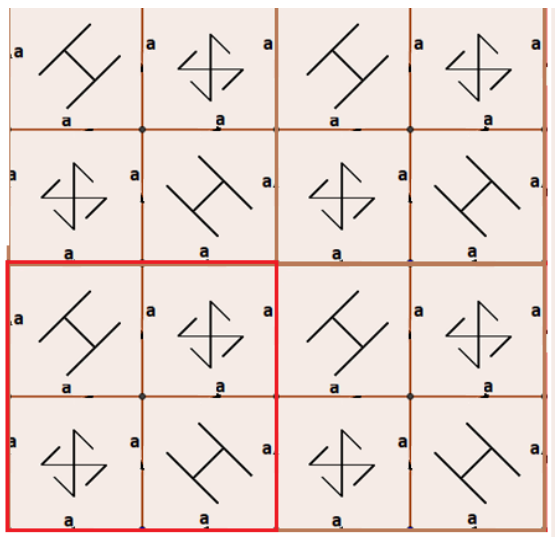
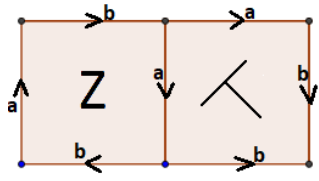
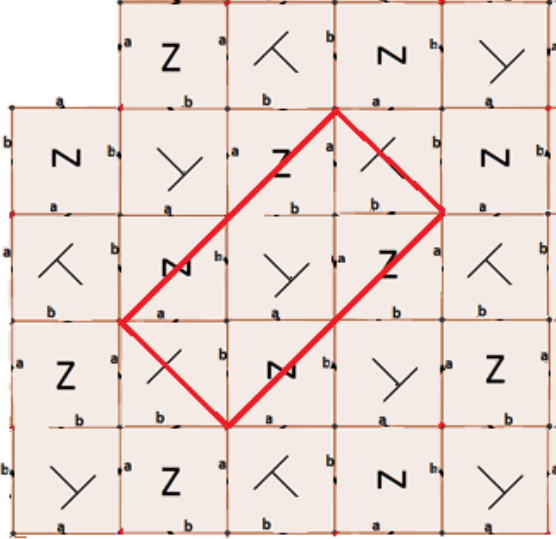
b	b	b	b	b
a	c	a	c	a
F	G	F	G	F
d	d	d	d	d
a	c	a	c	a
G	F	G	F	G
b	b	b	b	b
a	c	a	c	a
F	G	F	G	F
d	d	d	d	d
a	c	a	c	a
F	G	F	G	F
d	d	d	d	d



Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż																																										
(4-4) ₁₀		<table border="1" data-bbox="766 230 1385 566"> <tr> <td>b</td><td>b</td><td>d</td><td>d</td><td>b</td><td>b</td> </tr> <tr> <td>a</td><td>F</td><td>G</td><td>e</td><td>F</td><td>G</td> </tr> <tr> <td>d</td><td>d</td><td>b</td><td>b</td><td>d</td><td>d</td> </tr> <tr> <td>a</td><td>g</td><td>f</td><td>f</td><td>g</td><td>f</td> </tr> <tr> <td>b</td><td>b</td><td>d</td><td>d</td><td>b</td><td>b</td> </tr> <tr> <td>a</td><td>F</td><td>G</td><td>e</td><td>F</td><td>G</td> </tr> <tr> <td>d</td><td>d</td><td>b</td><td>b</td><td>d</td><td>d</td> </tr> </table> 	b	b	d	d	b	b	a	F	G	e	F	G	d	d	b	b	d	d	a	g	f	f	g	f	b	b	d	d	b	b	a	F	G	e	F	G	d	d	b	b	d	d
b	b	d	d	b	b																																							
a	F	G	e	F	G																																							
d	d	b	b	d	d																																							
a	g	f	f	g	f																																							
b	b	d	d	b	b																																							
a	F	G	e	F	G																																							
d	d	b	b	d	d																																							
(4-4) ₁₁		<table border="1" data-bbox="766 1075 1359 1467"> <tr> <td>b</td><td>b</td><td>b</td><td>b</td><td>b</td> </tr> <tr> <td>a</td><td>F</td><td>G</td><td>F</td><td>G</td> </tr> <tr> <td>d</td><td>d</td><td>d</td><td>d</td><td>d</td> </tr> <tr> <td>c</td><td>e</td><td>e</td><td>e</td><td>e</td> </tr> <tr> <td>b</td><td>b</td><td>b</td><td>b</td><td>b</td> </tr> <tr> <td>a</td><td>F</td><td>G</td><td>F</td><td>G</td> </tr> <tr> <td>d</td><td>d</td><td>d</td><td>d</td><td>d</td> </tr> </table> 	b	b	b	b	b	a	F	G	F	G	d	d	d	d	d	c	e	e	e	e	b	b	b	b	b	a	F	G	F	G	d	d	d	d	d							
b	b	b	b	b																																								
a	F	G	F	G																																								
d	d	d	d	d																																								
c	e	e	e	e																																								
b	b	b	b	b																																								
a	F	G	F	G																																								
d	d	d	d	d																																								

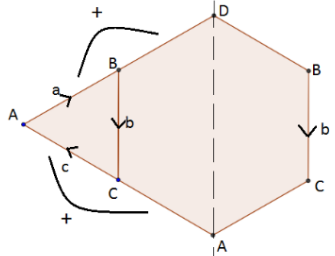
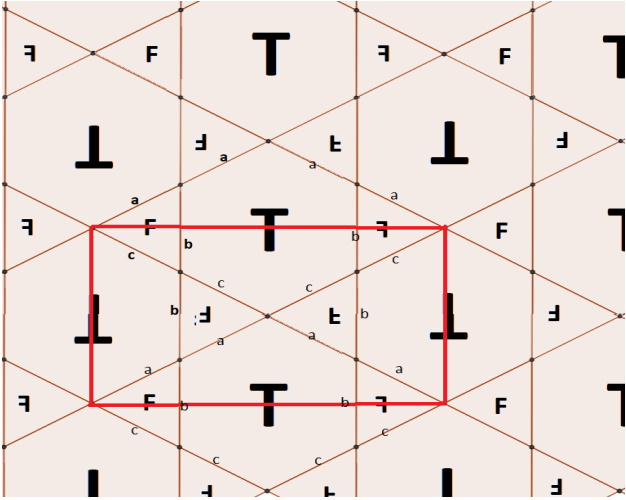
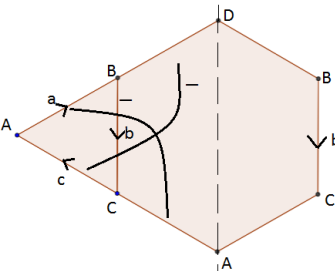
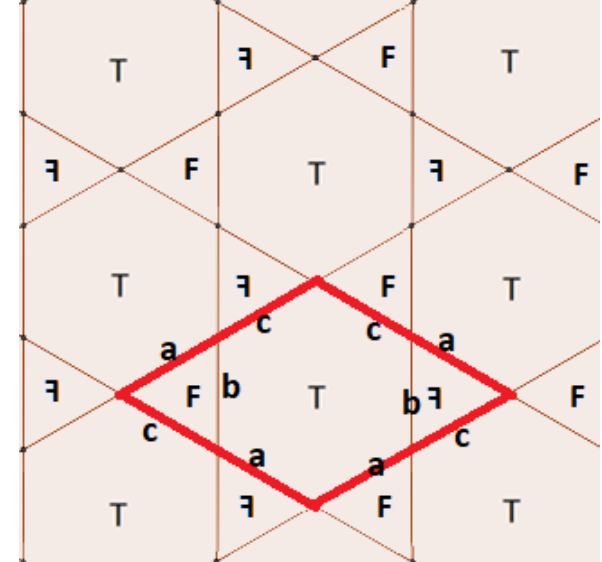
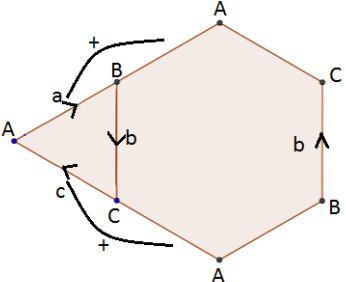
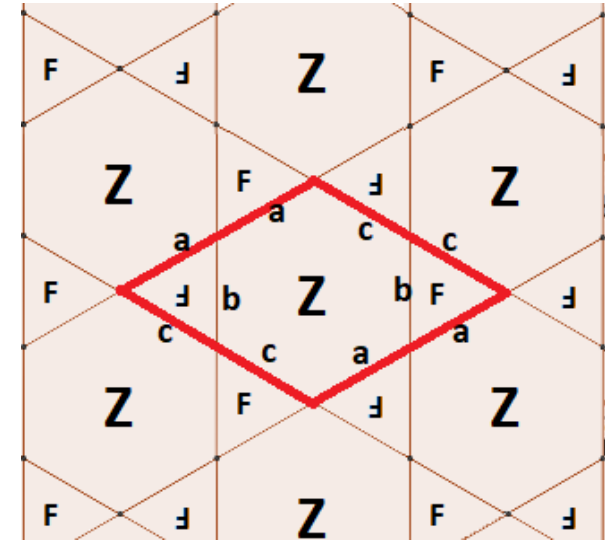
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₁₂		 
(4-4) ₁₃		 

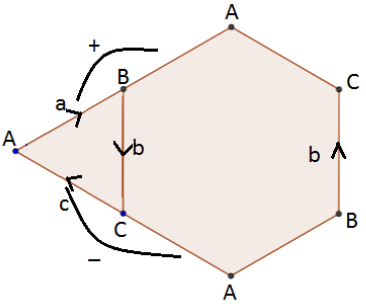
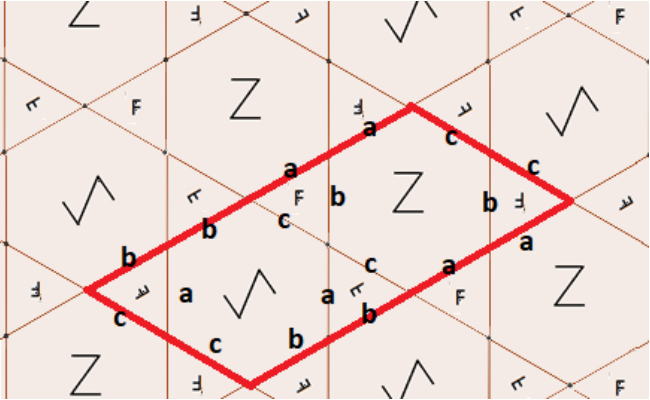
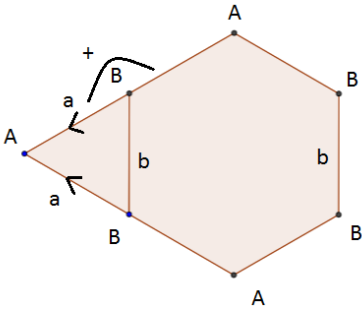
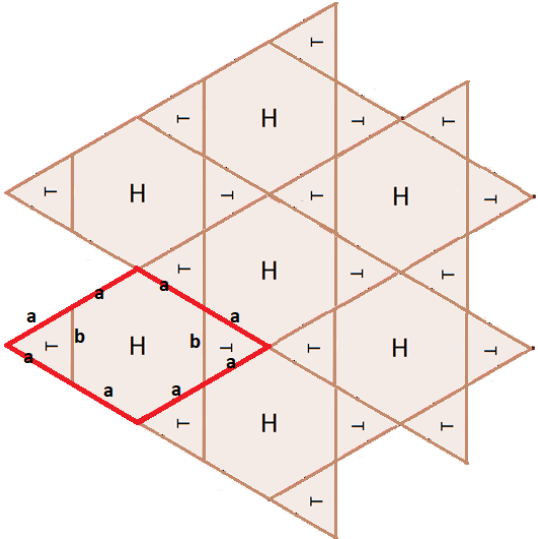
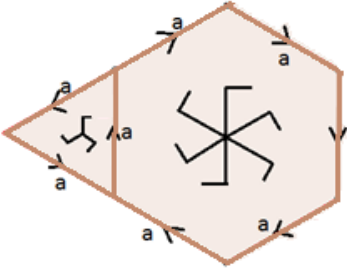
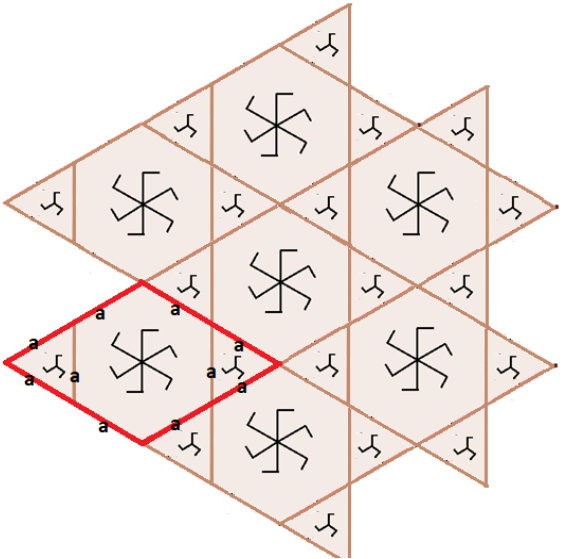
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₁₄		
(4-4) ₁₅		
(4-4) ₁₆		

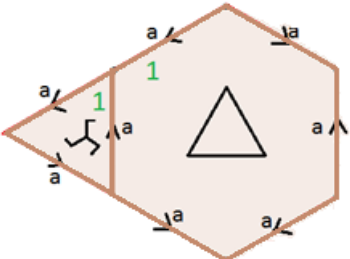
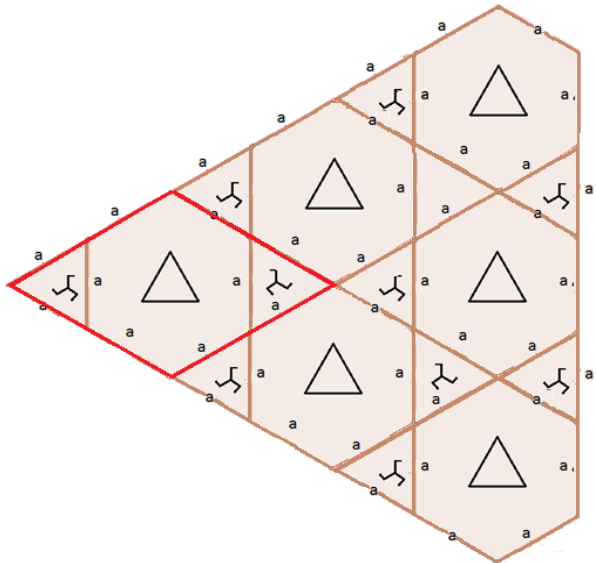
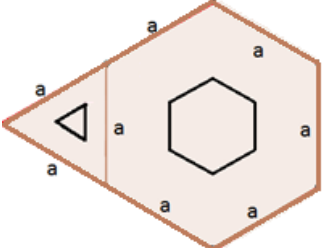
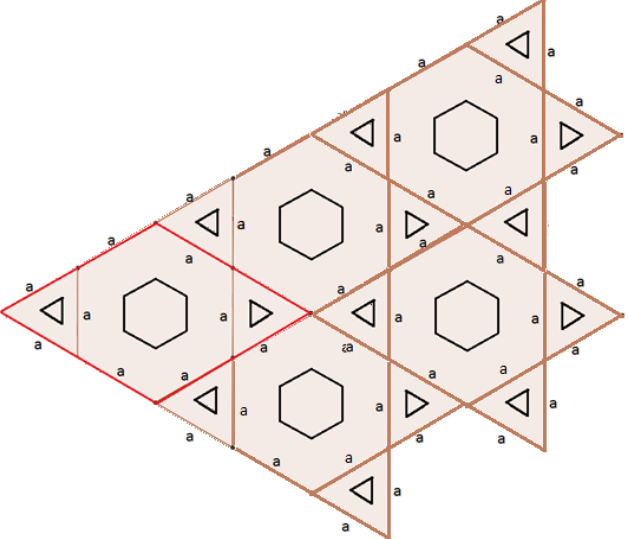
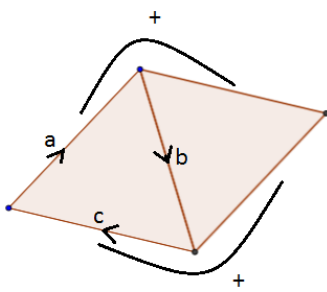
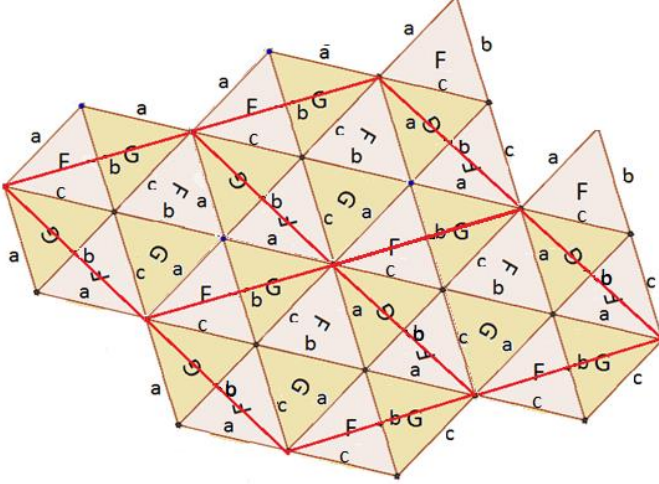
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₁₇		
		

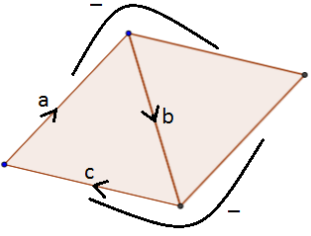
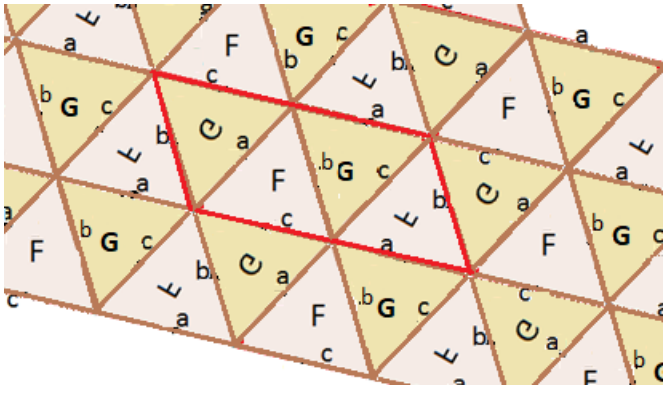
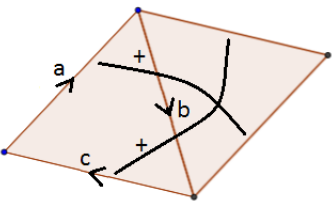
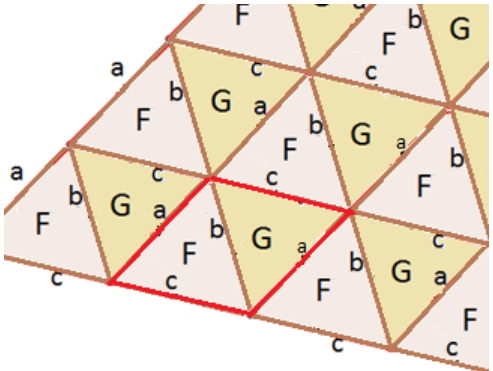
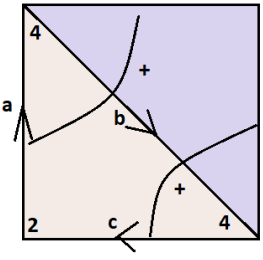
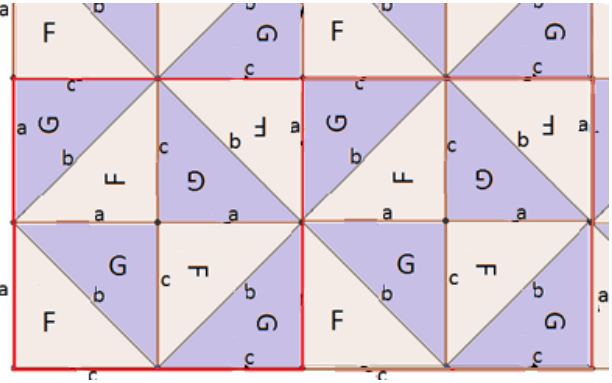
9 Lista typów kombinatorycznych N2R-parkietaży

Przedostatni z rozdziałów tej pracy dotyczy podsumowania wszystkich parkietaży omawianej przeze mnie klasy parkietaży. Po pracochłonnych obliczeniach, uzyskałam 37 różnych typów kombinatorycznych. Umieściłam je w poniższej tabeli wraz z przyjętą numeracją oraz z utworzonych z nich fragmentami N2R-parkietaży płaszczyzny.

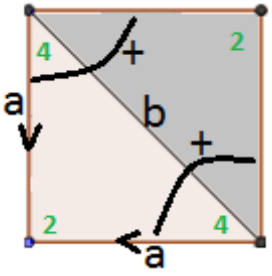
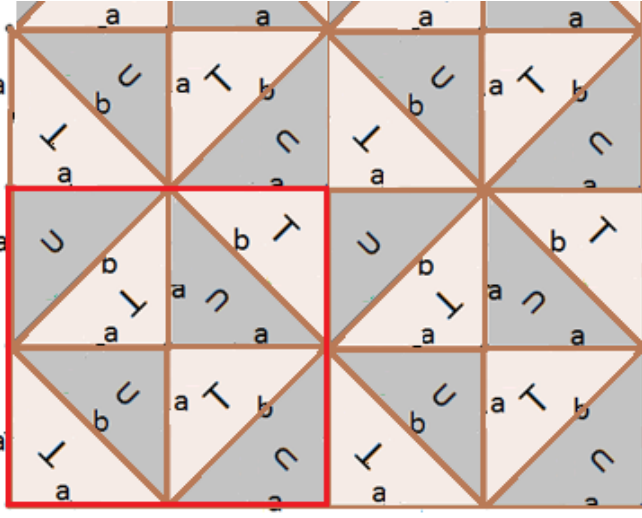
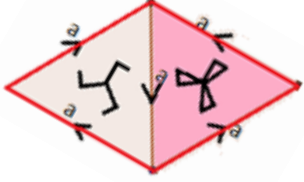
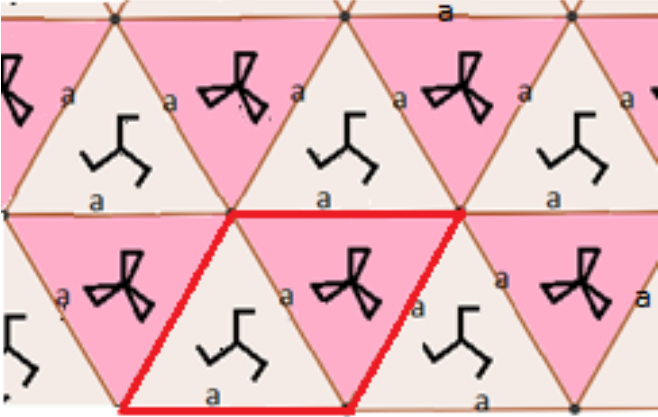
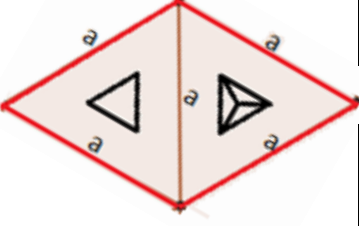
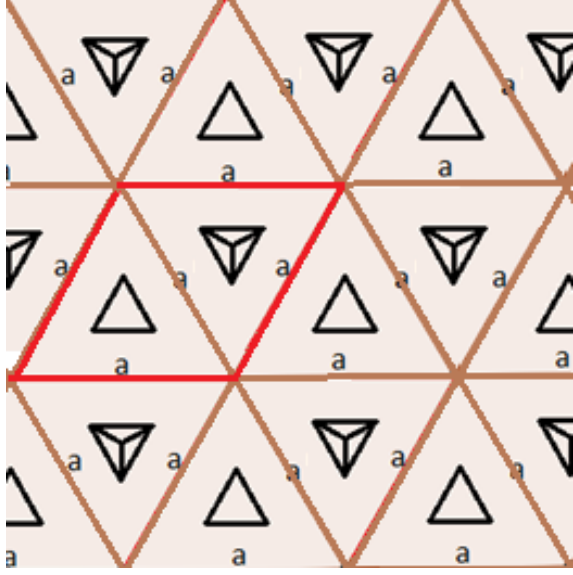
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(6-3) ₁		
(6-3) ₂		
(6-3) ₃		

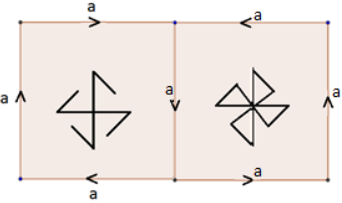
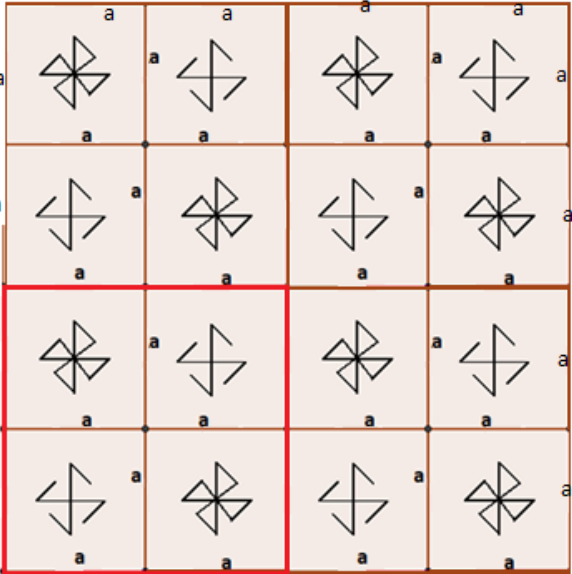
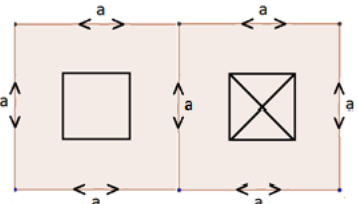
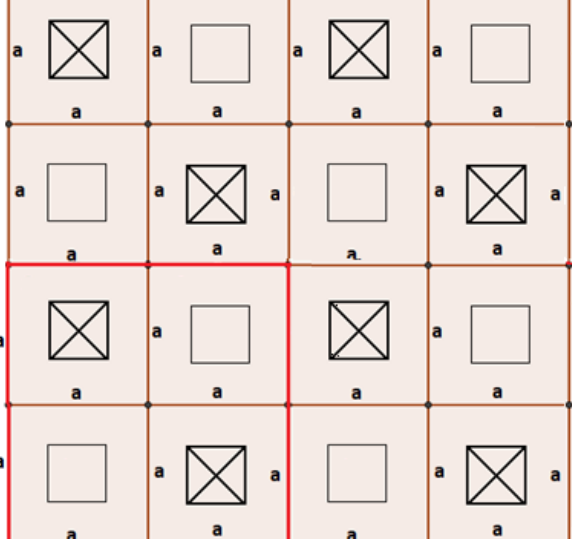
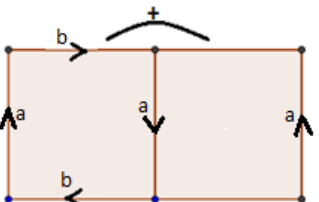
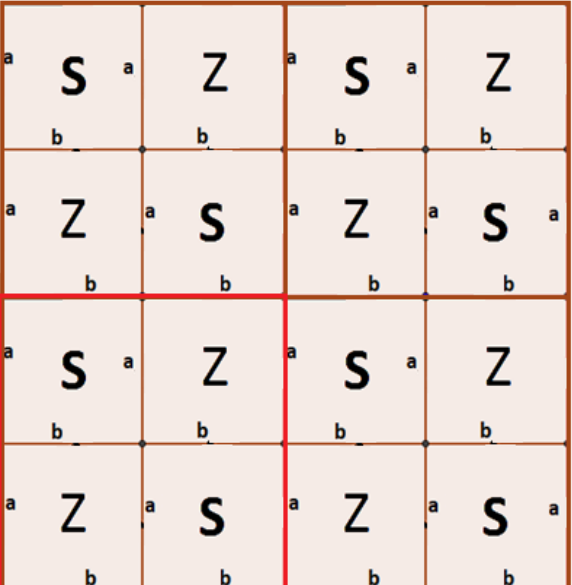
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(6-3) ₄		
(6-3) ₅		
(6-3) ₆		

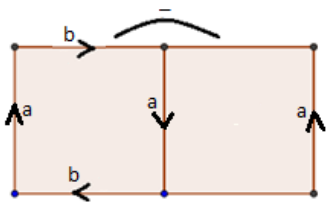
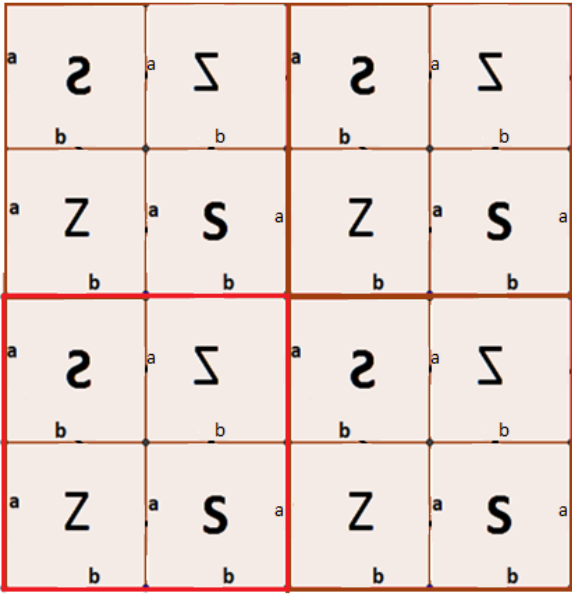
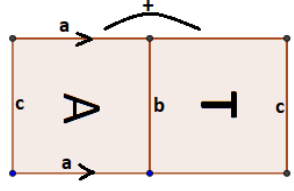
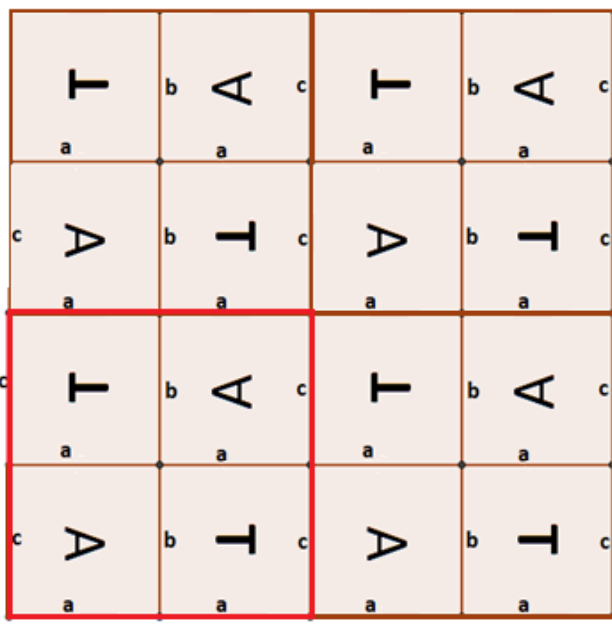
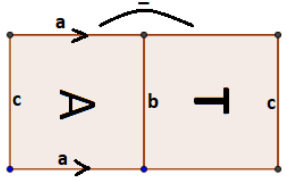
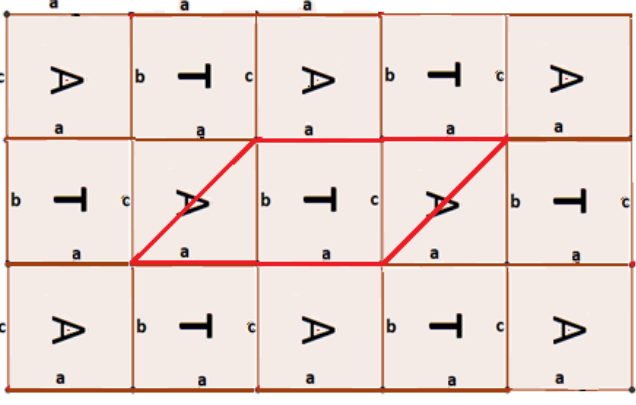
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(6-3) ₇		
(6-3) ₈		
(3-3) ₁		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(3-3) ₂		
(3-3) ₃		
(3-3) ₄		

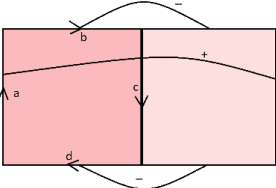
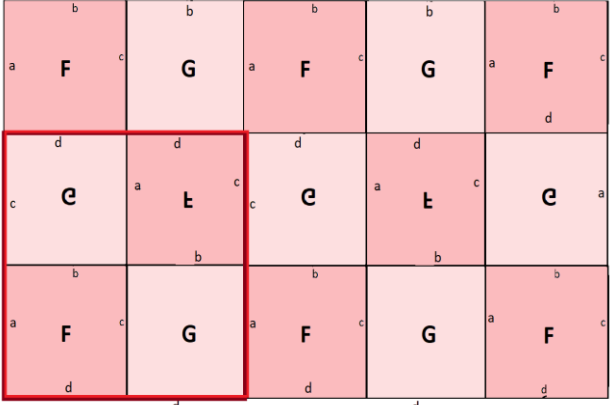
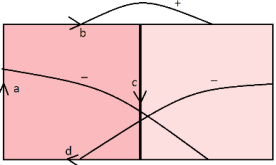
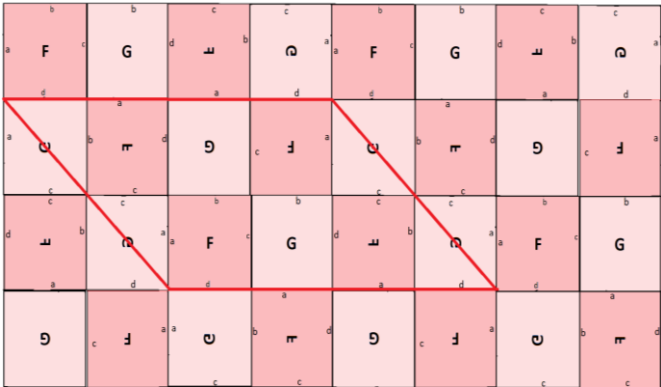
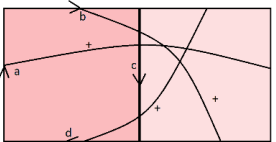
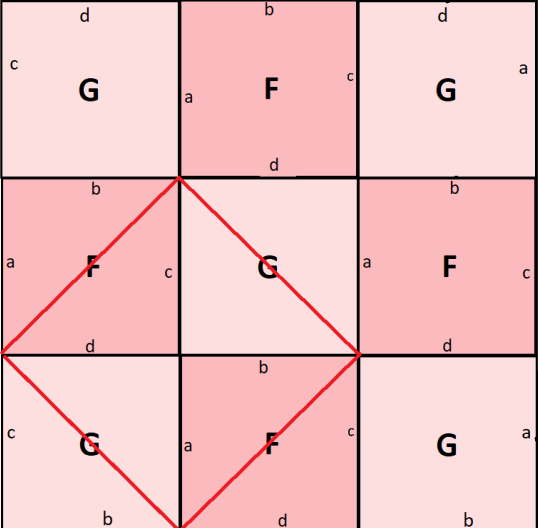
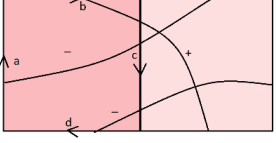
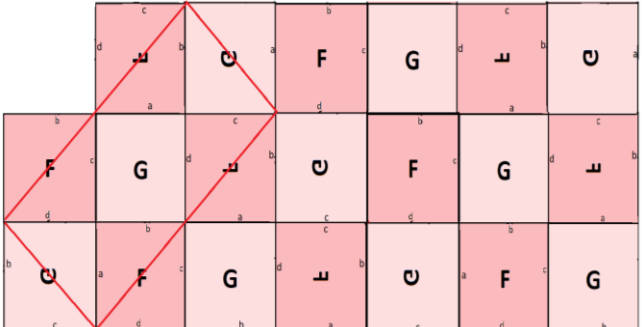
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(3-3) ₅		
(3-3) ₆		
(3-3) ₇		
(3-3) ₈		

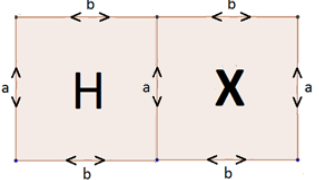
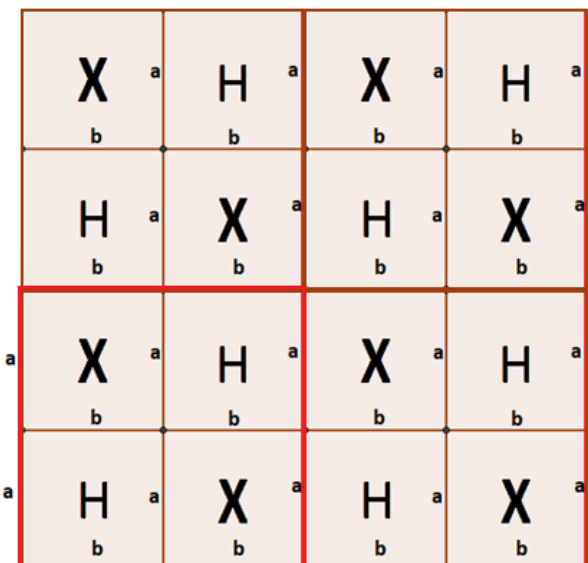
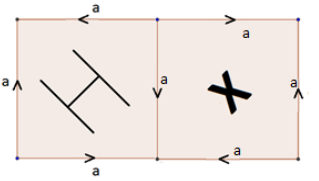
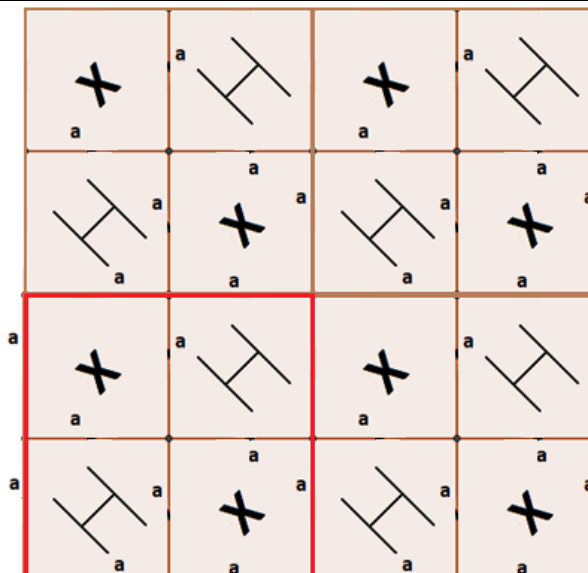
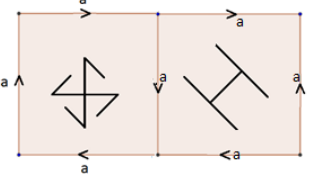
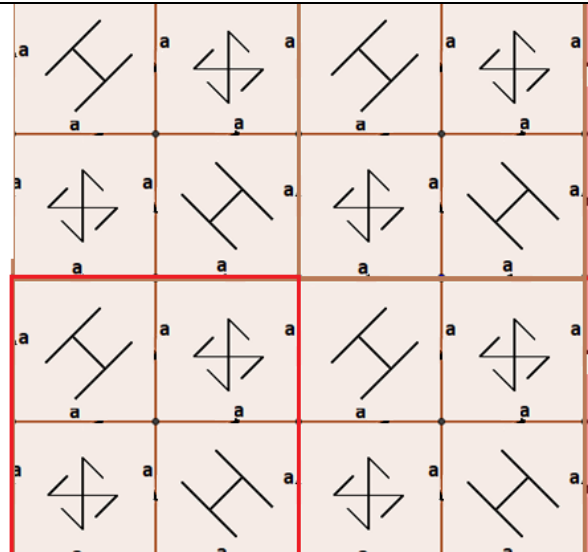
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(3-3) ₉		
(3-3) ₁₀		
(3-3) ₁₁		

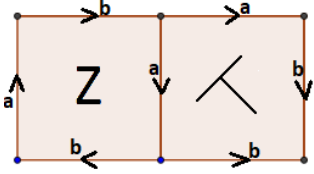
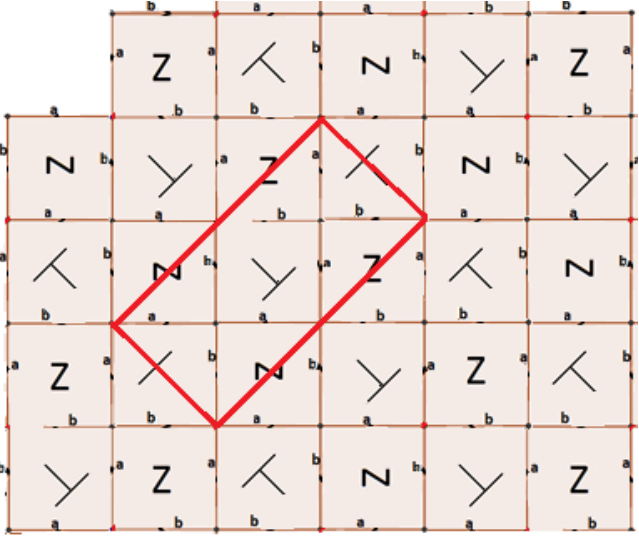
Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₁		
(4-4) ₂		
(4-4) ₃		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₄		
(4-4) ₅		
(4-4) ₆		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₇		
(4-4) ₈		
(4-4) ₉		
(4-4) ₁₀		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₁₁		
(4-4) ₁₂		
(4-4) ₁₃		
(4-4) ₁₄		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₁₅		
(4-4) ₁₆		
(4-4) ₁₇		

Numer	Typ kombinatoryczny	N2R-parkietaż
(4-4) ₁₈		

10 N2R-parkietaże Eschera i ich typy kombinatoryczne

Jak już wspomniałam we wstępie pracy, holenderski grafik M. C. Escher między innymi tworzył kompozycje będące regularnymi parkietażami płaszczyzny. Udało mi się znaleźć 58 takich parkietaży „escherowskich”, a wśród nich jest 36, które kwalifikują się jako N2R-parkietaże. Grafik stworzył mozaiki jedynie dla pary 4-kąt i 4-kąt (30 parkietaży) oraz dla pary 3-kąt i 3-kąt (pozostałe 6 parkietaży). Nie znalazłam wśród jego kompozycji będących N2R-parkietażami żadnej, która odpowiadałaby parze 3-kąt i 6-kąt. Najwięcej parkietaży utworzył dla typu kombinatorycznego (4-4)₁₂. Dokładna liczba typów kombinatorycznych wykorzystanych przez Eschera to 12. Poniżej na Rysunkach od 119 do 130 prezentuję wszystkie kompozycje Eschera będące N2R-parkietażami ze wskazaniem ich typów kombinatorycznych. Wszystkie reprodukcje znajdują się na stronie internetowej Fundacji Eschera [3].

Typ kombinatoryczny (3-3)₁:



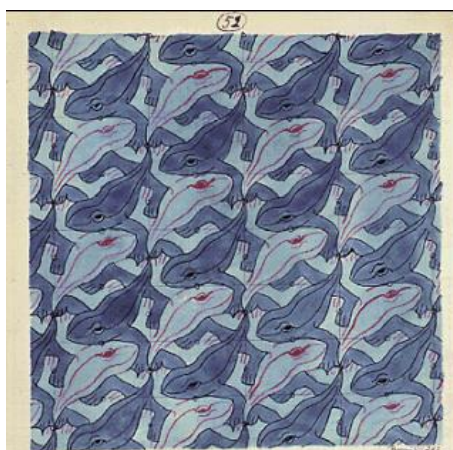
Rysunek 119

Typ kombinatoryczny (3-3)₂:



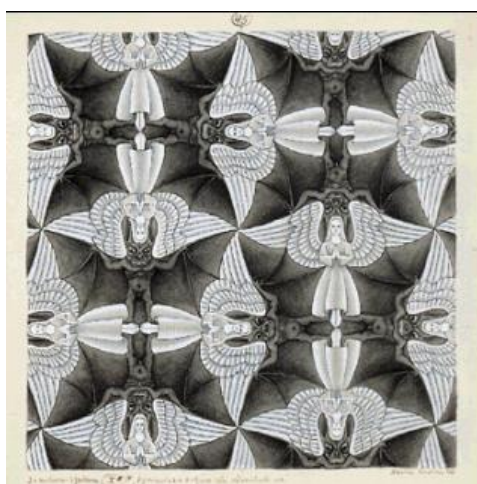
Rysunek 120

Typ kombinatoryczny (3-3)₃:



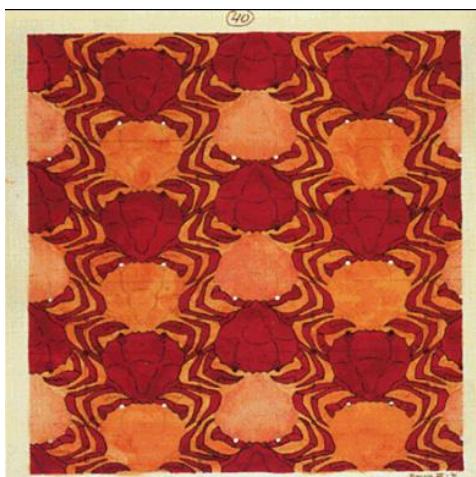
Rysunek 121

Typ kombinatoryczny (3-3)₇:



Rysunek 122

Typ kombinatoryczny (4-4)₅:



Rysunek 123

Typ kombinatoryczny (4-4)₈:



Rysunek 124

Typ kombinatoryczny (4-4)₉:



Rysunek 125

Typ kombinatoryczny (4-4)₁₀:



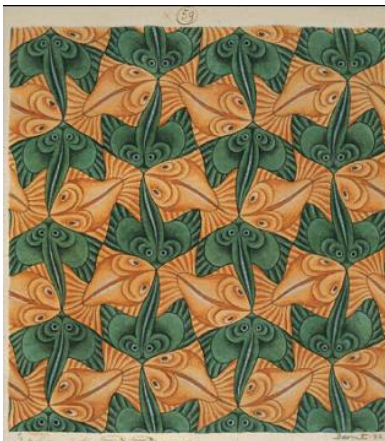
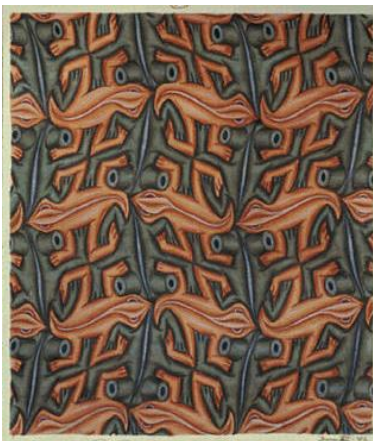
Rysunek 126

Typ kombinatoryczny (4-4)₁₁:



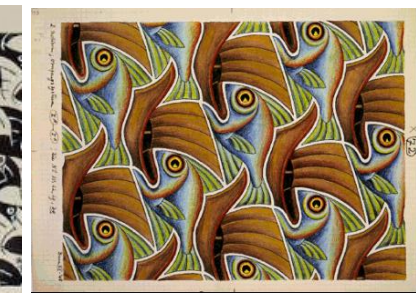
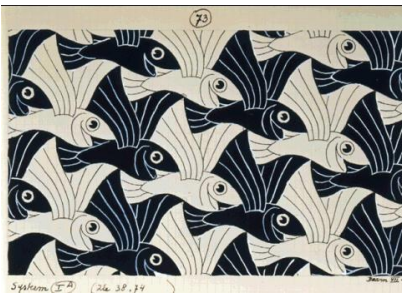
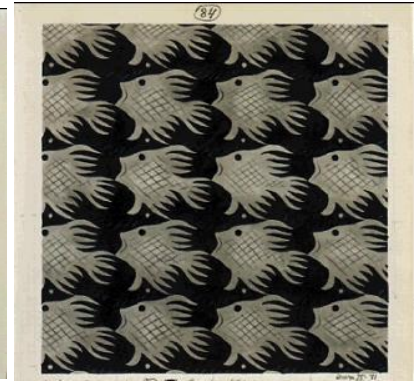
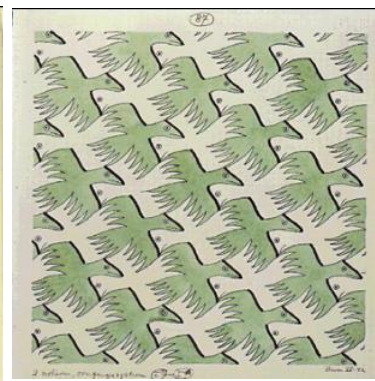
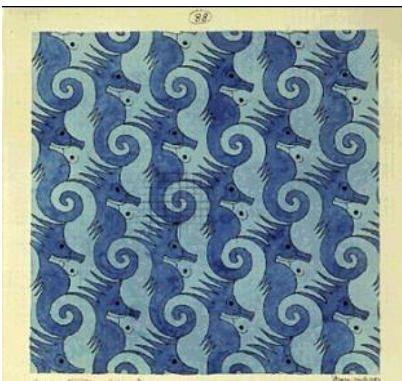
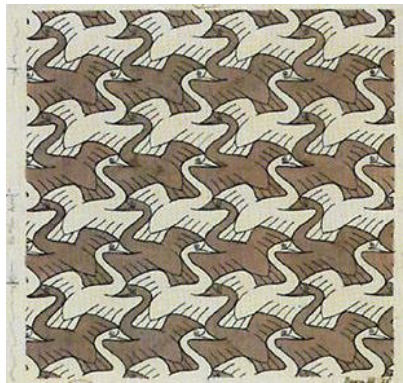
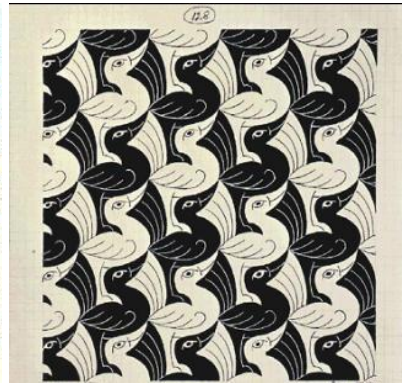
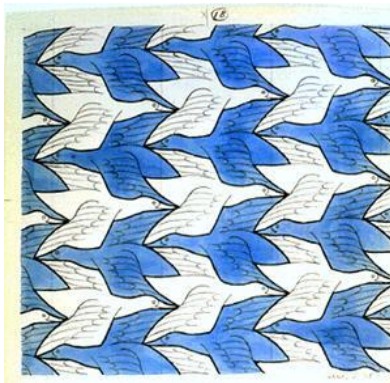
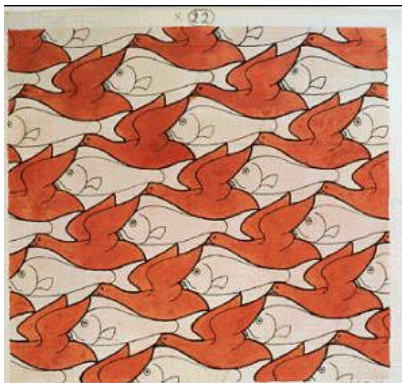
Rysunek 127

Typ kombinatoryczny (4-4)₁₂:



Rysunek 128

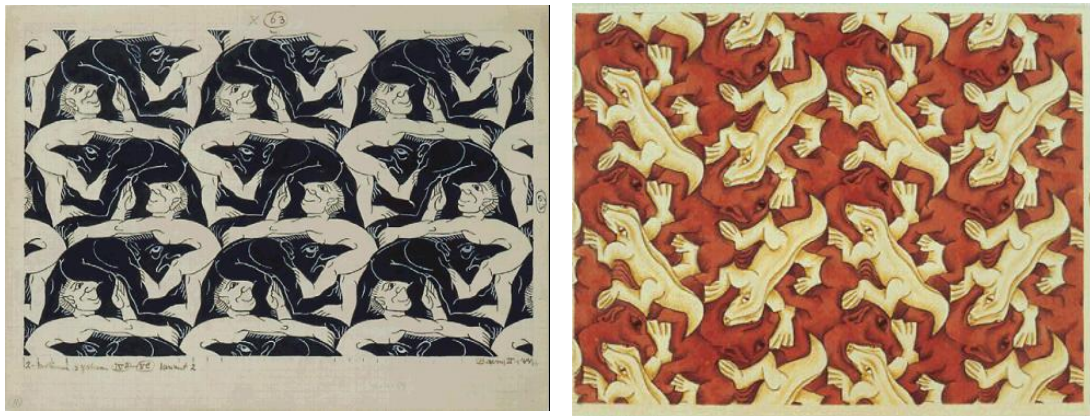
Typ kombinatoryczny (4-4)₁₃:





Rysunek 129

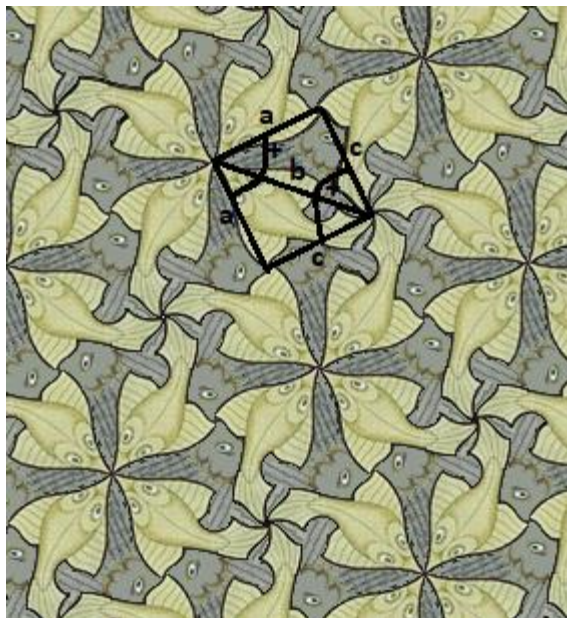
Typ kombinatoryczny (4-4)₁₄:



Rysunek 130

Escher preferował typy parkietaży, w których oba rodzaje płytek są niesymetryczne. Jedyne przykłady jego kompozycji, w których płytki mają symetrie własne, to te z Rysunku 122 (typ (3-3)₇), z Rysunku 123 (typ (4-4)₅) oraz z Rysunku 124 (typ (4-4)₈). Escher zrealizował wszystkie typy parkietaży, w których obie płytki są 4-kątne i nie mają symetrii własnych. Są to typy o numerach: (4-4)₉, (4-4)₁₀, (4-4)₁₁, (4-4)₁₂, (4-4)₁₃ i (4-4)₁₄. Natomiast, wśród typów parkietaży, w których obie płytki są 3-kątne i obie płytki nie posiadają symetrii własnych, nie zrealizował typów: (3-3)₄, (3-3)₅ oraz (3-3)₆.

Rysunek 131 przedstawia N2R-parkietaż o typie kombinatorycznym $(3-3)_4$, którego Escher między innymi nie zdołał zrealizować. Utworzony został własnoręcznie w programie Paint, natomiast jedna z płytek parkietażu została wykorzystana z parkietażu Eschera o typie kombinatorycznym $(3-3)_2$. Pozostawimy czytelnikowi możliwość stworzenia własnych kompozycji innych typów parkietaży, których grafik nie zrealizował.



Rysunek 131. N2R-parkietaż o typie kombinatorycznym $(3-3)_4$

11 Bibliografia

[1]: H. S. M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa 1967

[2]: H. Weyl, *Symetria*, Warszawa 1960.

[3]: Oficjalna strona fundacji Eschera, <https://www.mcescher.com/gallery/symmetry/> (dostęp XII 2018)

[4]: Doris Schattschneider, *Lessons in Duality and Symmetry from M.C. Escher*, Bethlehem USA

[5]: B. Grünbaum, G. C. Shephard, *Thilings and Patterns*, New York, W. H. Freeman and Company, 1987

[6]: C. S. Kaplan, *Introductory Tiling Theory for Computer Graphics*, Morgan & Claypool Publishers, 2009