Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Maria Kaczmarek

Klasyfikacja szlaków ze względu na symetrie metodą Conwaya

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dra hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2016

.....
(imiona i nazwisko)

..... …….
(aktualny adres do korespondencji) (numer PESEL)

.....
(adres e-mail)

.....
(wydział)

.....
(kierunek studiów)

..... **.....**
(poziom i forma studiów) (numer albumu)

OŚWIADCZENIE O PRAWACH AUTORSKICH I DANYCH OSOBOWYCH

Ja niżej podpisana …… studentka Wydziału …… kierunek …… oświadczam, że przedkładana praca dyplomowa na temat: ……

- jest mojego autorstwa i nie narusza autorskich praw w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity: Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem;
- nie zawiera danych i informacji uzyskanych w sposób niedozwolony;
- nie była wcześniej przedmiotem innej urzędowej procedury związanej z nadaniem dyplomu uczelni wyższej lub tytułu zawodowego;
- treść pracy dyplomowej przedstawionej do obrony, zawarta na przekazanym nośniku elektronicznym, jest identyczna z jej wersją drukowaną. Oświadczam, iż zostałam poinformowana o prawie dostępu do treści moich danych osobowych oraz ich poprawiania. Udostępnienie przez mnie danych osobowych ma charakter dobrowolny.

Wyrażam zgodę, na:

- udostępnienie mojej pracy dla celów naukowych i dydaktycznych;
- przetwarzanie moich danych osobowych w myśl ustawy z dnia 29 sierpnia 1997 r. o ochronie danych osobowych (tekst jednolity: Dz. U. z 2014 r., poz. 1182, z późn. zm.);
- umieszczenie mojej pracy w bazie danych Uczelni i jej przechowywanie przez okres stosowny do potrzeb Uczelni;
- wykorzystanie mojej pracy jako elementu komparatywnej bazy danych Uczelni;
- udostępnienie mojej pracy innym podmiotom celem prowadzenia kontroli antyplagiatowej prac dyplomowych i innych tekstów, które zostaną opracowane w przyszłości;
- porównywanie tekstu mojej pracy z tekstami innych prac znajdujących się w bazie porównawczej systemu antyplagiatowego i zasobach Internetu.

Wrocław, …… ……
(rrrr – mm – dd) (czytelny podpis autora pracy)

Spis treści

Wstęp 4
1. Izometrie i symetrie 5
2. Szlaki, rodzaje ich symetrii oraz sformułowanie Głównego Twierdzenia 7
3. Charakterystyka Eulera i klasyfikacja powierzchni 12
    3.1. Charakterystyka Eulera powierzchni 12
    3.2. Klasyfikacja powierzchni z brzegiem i ich charakterystyki Eulera 14
4. Orbifold szlaku 16
5. Orbifoldowa charakterystyka Eulera 22
6. Potencjalne formy orbifoldów szlaków oraz dowód Głównego Twierdzenia 29
Bibliografia 35

Wstęp

Ze szlakami, w postaci szlaczków, spotykamy się już na początku szkoły podstawowej, ale okazuje się, że nie tylko ćwiczą one nasze ręce, ale mają też matematyczny urok. Ta praca może być pomocna nauczycielom, którzy chcieliby swoich uczniów zaciekawić tym zagadnieniem. Także sami uczniowie (choć raczej ze szkół ponadgimnazjalnych) mogą do tej pracy sięgnąć i pogłębiać swoje zainteresowania matematyczne. Staraliśmy się tak dostosować język, aby był on precyzyjny, ale zrozumiały także dla niezbyt zaawansowanych (matematycznie) czytelników. Dlatego też umieściliśmy w tekście odniesienia do literatury, dla odbiorców, którzy potrzebują uzupełnić wiedzę niezbędną do podążania za rozumowaniami przedstawionymi w pracy.

Praca ta przedstawia klasyfikację szlaków przy użyciu metody J. H. Conwaya przedstawionej w pierwszej części książki *The Symmetries of Things* [1], gdzie została ona użyta do przeprowadzenia klasyfikacji typów symetrii wzorów płaskich. Nie jest to jednak dokładne przyłożenie metody do szlaków, ale raczej nasza jej interpretacja.

Inspiracją dla tej pracy była także praca magisterska K. Kijewskiej *O symetriach wzorów płaskich* [2], gdzie metoda Conwaya została uściślona, a pewne luki w dowodach, wynikające z popularnonaukowego charakteru książki [1], zostały uzupełnione.

Celem tej pracy jest wykazanie, że dowolny szlak ze względu na rodzaje symetrii należy do jednego z siedmiu wymienionych i opisanych w pracy typów. Aby przeprowadzić taką klasyfikację szlaków, potrzebne jest wprowadzenie pewnych pojęć. Stąd pierwsza część pracy to swego rodzaju wprowadzenie teoretyczne, na którym bazując i przechodząc kolejne etapy, dochodzimy ostatecznie do dowodu głównego twierdzenia.

1. Izometrie i symetrie

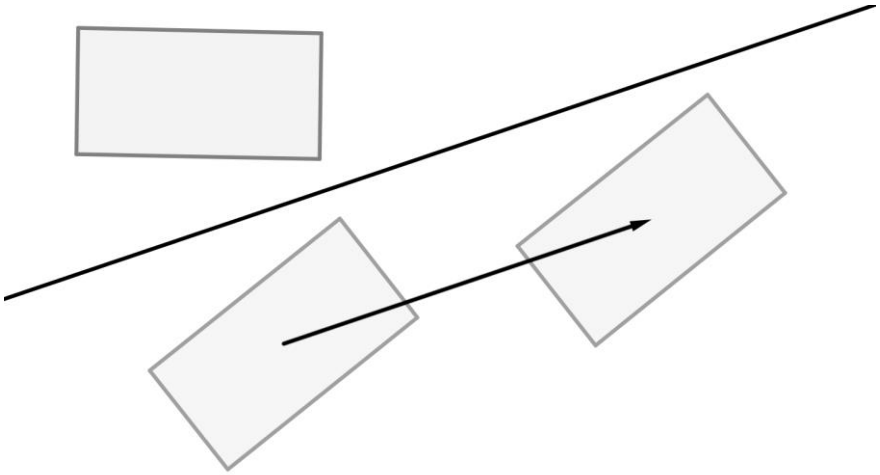
Definicja 1.1
Izomerią nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które zachowuje odległości. To znaczy, że przekształcenie f z płaszczyzny w siebie jest izometrią wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary punktów a, b płaszczyzny mamy, że odległość pomiędzy a i b jest taka sama, jak odległość między $f(a)$ i $f(b)$.

Wiadomo, że izometriami płaszczyzny są translacje, obroty, odbicia względem prostych oraz symetrie z poślizgiem, i tylko te przekształcenia. Dowód można znaleźć na przykład w Rozdziale 1 książki *Wykłady z geometrii elementarnej* R. Domana [3].

Ponieważ z translacjami, obrotami i odbiciami względem prostych mamy szansę spotkać się w trakcie nauki szkolnej, przytoczmy tylko definicję symetrii z poślizgiem, jako najmniej znanej izometrii płaszczyzny.

Definicja 1.2
Symetrią z poślizgiem nazywamy takie złożenie translacji z odbiciem względem prostej, że wektor translacji jest niezerowy oraz równoległy do prostej, względem której odbijamy.

Na Rysunku 1.1 zilustrowano przekształcenie wielokąta przez pewną symetrię z poślizgiem (źródło tego oraz wszystkich następnych rysunków: opracowanie własne).



Rys. 1.1. Przekształcenie wielokąta przez symetrię z poślizgiem

Prostą, względem której odbijamy, nazywamy *osią symetrii z poślizgiem*. Jest ona jedyną prostą, którą symetria z poślizgiem przeprowadza na siebie.

Uwaga 1.3
Kolejność składania translacji i odbicia w powyższej definicji symetrii z poślizgiem nie ma znaczenia, to znaczy złożenie danej translacji z danym odbiciem da tę samą symetrię z poślizgiem, co złożenie w odwrotnej kolejności (odbicia z translacją).

Ponieważ praca ta jest poświęcona szlakom (a nie płaszczyźnie), więc będą nas interesowały tylko te izometrie, które zachowują szlaki.

Definicja 1.4
Symetrią figury zawartej w płaszczyźnie nazywamy izometrię płaszczyzny przekształcającą tę figurę na siebie.

Uwaga 1.5
W tej pracy będziemy mówić, że figura *F posiada* pewien rodzaj symetrii. Na przykład kwadrat posiada symetrię obrotową oraz symetrię odbiciową i nie posiada symetrii translacyjnej.

2. Szlaki, rodzaje ich symetrii oraz sformułowanie Głównego Twierdzenia

Aby zdefiniować szlaki potrzeba doprecyzować, w jakiej przestrzeni będziemy je rozpatrywać. Zajmować się będziemy szlakami, które „żyją” na płaszczyźnie euklidesowej, a dokładniej – między dwoma prostymi równoległymi. Będziemy używać nazwy *pasa* na część płaszczyzny zawartą między prostymi ograniczającymi dany szlak.

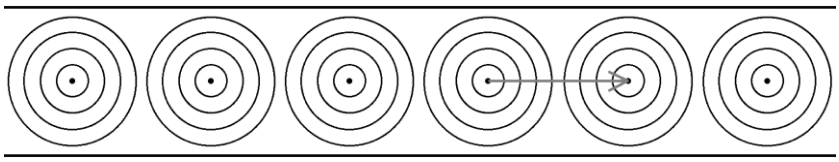
Podstawową własnością szlaku jest powtarzalność jego elementów. W tej pracy będzie mowa o szlakach, w których da się wyróżnić pewien najmniejszy fragment (skończonej długości), który powtarza się w całym pasie. Bardziej precyzyjnie własność tę ujmuje poniższa definicja.

Definicja 2.1
Szlakiem nazywamy figurę nieograniczoną F mieszczącą się w pewnym pasie P, wraz z prostymi wyznaczającymi pas P, taką że posiada ona symetrię translacyjną o wektory równoległe do pasa P, wśród których istnieje najkrótszy wektor o niezerowej długości.

Ten najkrótszy wektor będziemy nazywać *wektorem podstawowym szlaku*. Jest on określony z dokładnością do znaku, gdyż translacja o wektor przeciwny do wektora podstawowego także jest symetrią danego szlaku i wektor ten też jest najkrótszy.

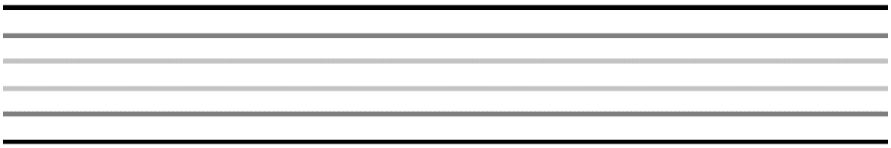
Proste wyznaczające pas P będziemy nazywać *prostymi brzegowymi szlaku*.

Przykład szlaku (a właściwie jego skończonego fragmentu) z zaznaczonym wybranym wektorem podstawowym przedstawiono na Rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Przykład szlaku z zaznaczonym wektorem podstawowym

Aby wskazać na znaczenie założenia o wektorze podstawowym w powyższej definicji szlaku, rozważmy przykład figury, która tej definicji nie spełnia. Przedstawiona jest ona na Rysunku 2.2. Nie da się w niej wyróżnić wektora podstawowego niezerowej długości. A dokładniej, translacja o każdy niezerowy wektor równoległy do prostych brzegowych pasa jest symetrią tej figury, więc wśród niezerowych wektorów translacji nie ma wektora najkrótszego.



Rys. 2.2. Figura, która nie spełnia definicji szlaku

Zastanówmy się teraz, które z izometrii płaszczyzny mogą być symetriami szlaku. Zauważmy, że aby pewna izometria była symetrią szlaku, musi przeprowadzać pas, w którym znajduje się szlak na siebie. Zatem musi w szczególności przeprowadzać proste brzegowe tego pasa na te same proste.

Z definicji każdy szlak posiada symetrię translacyjną, o wektorach równoległych do prostych brzegowych. Inne translacje nie przeprowadzą prostych brzegowych na siebie, więc nie mogą się pojawić wśród symetrii szlaku.

Czy obrót może być symetrią szlaku? Gdyby przeprowadzał jedną z prostych brzegowych na siebie, to środek obrotu musiałby leżeć na tej prostej, zaś kąt obrotu musiałby wynosić 180°. Ale wtedy druga prosta brzegowa nie mogłaby przejść na siebie. Zatem jeśli szlak ma mieć symetrię obrotową, to musi ona przeprowadzać każdą z prostych brzegowych na tę drugą. Będzie tak tylko wtedy, gdy punkt, wokół którego obracamy będzie leżał dokładnie w połowie odległości między prostymi brzegowymi, a obrót będzie o 180°. Okazuje się więc, że jedynymi obrotami, które potencjalnie mogą się pojawić wśród symetrii szlaku są obroty o 180° wokół punktów leżących w połowie odległości pomiędzy prostymi brzegowymi szlaku. Opisane powyżej symetrie szlaku, o ile się pojawią, będziemy nazywać *półobrotami*, natomiast punkty, względem których obracamy będziemy nazywać *środkami półobrotów*.

Kolejnym rodzajem symetrii do sprawdzenia jest symetria odbiciowa. Czy odbicie względem prostej nachylonej do prostych brzegowych pod kątem ostrym α może przeprowadzać je na siebie? Nie, ponieważ kąt między prostą a jej odbiciem symetrycznym wynosi $2 \cdot \alpha$, więc dla α różnego od 0° i od 90° prosta nie zostanie przekształcona („odbita”) na siebie.

Stąd jedyne kąty, pod którymi może być nachylona oś symetrii, to 0° i 90°. Oznacza to, że oś symetrii musi być prostopadła bądź równoległa do prostych brzegowych. Jeśli odbicie ma przeprowadzać proste brzegowe na siebie, to równoległa do nich oś symetrii może leżeć tylko w połowie odległości między nimi. Taką oś będziemy nazywali *poziomą*. Natomiast jeśli chodzi o osie prostopadłe do prostych brzegowych, to odbicie względem dowolnej z nich potencjalnie może być symetrią szlaku. Jeśli takie osie symetrii się pojawią, będziemy je nazywali *pionowymi* osiami symetrii.

Pozostaje sprawdzić, czy symetria z poślizgiem może być symetrią szlaku. Zauważmy, że prosta leżąca dokładnie w połowie odległości między prostymi brzegowymi musi zostać przez

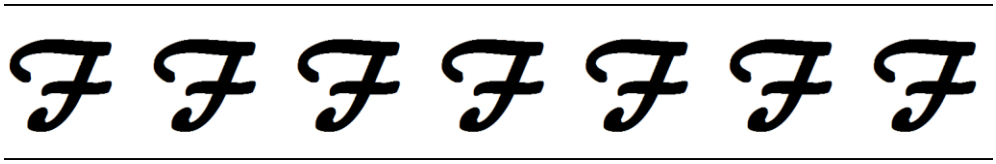
każdą symetrię szlaku przeprowadzona sama na siebie, gdyż odległość od prostych brzegowych musi zostać przez symetrię (izometrię) zachowana. Zatem jest to jedyna „kandydatka” na oś symetrii z poślizgiem zachowującej szlak. Ponieważ dowolna symetria z poślizgiem o takiej osi przeprowadza pas na siebie, potencjalnie tak opisana symetria z poślizgiem może być symetrią szlaku.

Ostatecznie mamy więc pięć potencjalnych rodzajów symetrii szlaku, a są nimi:

- translacje o wektor równoległy do prostych brzegowych,
- półobroty wokół punktów leżących na prostej przebiegającej w połowie odległości między prostymi brzegowymi szlaku,
- odbicie względem prostej poziomej,
- odbicia względem prostych pionowych,
- symetrie z poślizgiem o osi położonej w połowie odległości między prostymi brzegowymi.

Podane rodzaje symetrii mogą dla konkretnych szlaków występować w różnych konfiguracjach, które w tej pracy będziemy nazywać *typami*. Poniżej przedstawione są przykłady szlaków posiadających różne typy symetrii wraz z ilustrującymi je Rysunkami 2.3-2.9 (szlaki są oczywiście nieograniczone, rysunki za to ze względów praktycznych zawsze są skończone).

Typ I obejmuje szlaki, których symetriami są tylko translacje o całkowite wielokrotności wektora podstawowego. Przykład takiego szlaku jest pokazany na Rysunku 2.3.



Rys. 2.3. Szlak typu I

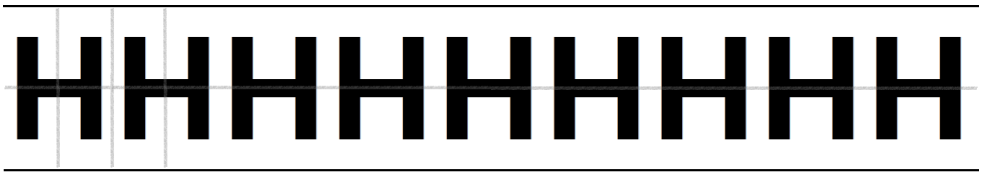
Typ II charakteryzuje szlaki, wśród symetrii których oprócz symetrii translacyjnych (jak w typie I) jest odbicie względem poziomej osi. Ponadto symetrie z poślizgiem o poziomej osi i wektorze będącym całkowitą wielokrotnością wektora podstawowego także przeprowadzają ten szlak na siebie. Na Rysunku 2.4 jest przedstawiony przykładowy szlak tego typu, zaznaczona jest na nim także pozioma oś symetrii.

Rys. 2.4. Szlak typu II

Typ III opisuje szlaki, które mają symetrie translacyjne (jak w typie I) oraz odbiciowe względem pionowych osi symetrii, występujących w odległości co ½ długości wektora podstawowego szlaku. Kilka spośród tych osi symetrii jest pokazanych na Rysunku 2.5, na którym przedstawiono przykładowy szlak tego typu.

Rys. 2.5. Szlak typu III

Do typu IV zaliczamy szlaki, których symetriami są translacje (jak w typie I), odbicie względem poziomej osi symetrii oraz odbicia względem pionowych osi symetrii, występujących w odległości co ½ długości wektora podstawowego szlaku. Ponadto na przecięciach osi symetrii poziomej i pionowych znajdują się punkty, względem których obrót o 180° jest symetrią szlaku. Także symetrie z poślizgiem o poziomej osi i wektorze będącym całkowitą wielokrotnością wektora podstawowego przeprowadzają szlak typu IV na siebie. Na Rysunku 2.6 przedstawiony jest przykład szlaku tego typu, z zaznaczoną poziomą osią symetrii i kilkoma osiami pionowymi.



Rys. 2.6. Szlak typu IV

Typ V obejmuje szlaki, których symetriami są translacje (jak w typie I) i półobroty, których środki leżą w odległości co ½ długości wektora podstawowego szlaku. Wszystkie te środki, jak już wcześniej ustaliliśmy, leżą na prostej przebiegającej w połowie odległości między prostymi brzegowymi szlaku. Niektóre z nich są zaznaczone na Rysunku 2.7, który przedstawia przykład szlaku typu V.

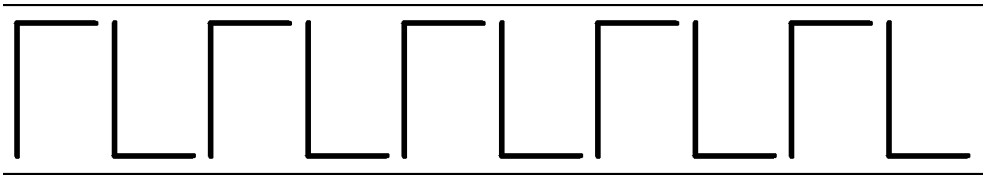
Rys. 2.7. Szlak typu V

Typ VI charakteryzuje szlaki, których symetriami oprócz translacji (jak w typie I) są odbicia względem pionowych osi symetrii oraz półobroty, przy czym pionowe osie symetrii i

środki półobrotów występują na przemian, w odległości co ¼ długości wektora podstawowego szlaku. Ponadto symetrie z poślizgiem o poziomej osi i wektorze będącym nieparzystą wielokrotnością ½ wektora podstawowego także przekształcają szlak typu VI na siebie. Przykład szlaku tego typu przedstawiono na Rysunku 2.8, na którym zaznaczonych jest także kilka środków półobrotów oraz kilka pionowych osi symetrii.

Rys. 2.8. Szlak typu VI

Typ VII opisuje szlaki, których symetriami są translacje (jak w typie I) oraz symetrie z poślizgiem o poziomej osi i wektorze równym nieparzystej wielokrotności ½ wektora podstawowego szlaku. Przykład szlaku tego typu jest przedstawiony na Rysunku 2.9.



Rys. 2.9. Szlak typu VII

Celem tej pracy jest dowód następującego Głównego Twierdzenia:

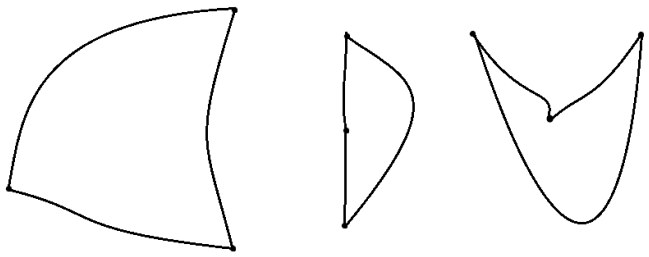
GŁÓWNE TWIERDZENIE
Istnieje dokładnie 7 typów szlaków ze względu na posiadane symetrie i są to typy szlaków od I do VII opisane powyżej.

3. Charakterystyka Eulera i klasyfikacja powierzchni

Aby przeprowadzić dowód Głównego Twierdzenia, potrzebujemy wprowadzić kolejne pojęcia, fakty i twierdzenia pomocnicze.

3.1. Charakterystyka Eulera powierzchni

Aby obliczyć charakterystykę Eulera powierzchni najpierw dzielimy daną powierzchnię na obszary, które będziemy nazywać *trójbokami*. *Trójbok* jest figurą izomorficzną z trójkątem, która ma 3 wierzchołki i 3 boki, które nie muszą być odcinkami, mogą być dowolnymi ciągłymi krzywymi, pod warunkiem, że przecinają się jedynie w wierzchołkach (przykłady trójboków, które nie są trójkątami przedstawiono na Rysunku 3.1.1).



Rys. 3.1.1. Trójboki, które nie są trójkątami

Podział powierzchni na trójboki będziemy nazywać *triangulacją*. Dla danej triangulacji wyliczamy charakterystykę Eulera odejmując liczbę krawędzi od sumy liczby trójboków i liczby wierzchołków.

Charakterystykę Eulera powierzchni Σ będziemy oznaczać przez $\chi(\Sigma)$. Dla powierzchni Σ, która po triangulacji zawiera t trójboków, w wierzchołków i k krawędzi mamy, że

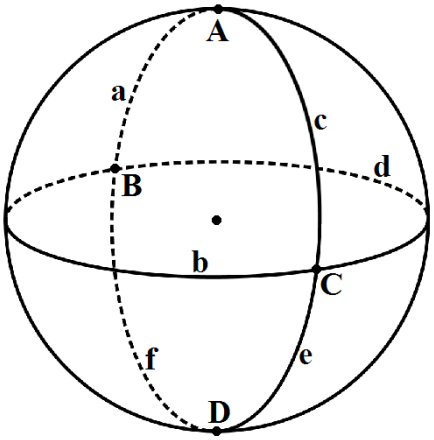
$$\chi(\Sigma) = t + w - k.$$

Fakt 3.1.1
Charakterystyka Eulera nie zależy od triangulacji, to znaczy jest stała, niezależnie od tego, w jaki sposób będziemy dzielić powierzchnię na trójboki.

Powyższy fakt przyjmujemy bez dowodu, a dociekliwych odsyłamy na przykład do Rozdziału 6 książki *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie* [4] albo do rozdziału 20.4 książki *Wstęp do geometrii dawnej i nowej* [5].

Przedstawimy teraz wyliczenie charakterystyki Eulera (bezpośrednio z definicji) dla kilku wybranych powierzchni.

Przykład 1: sfera



Rys. 3.1.2. Triangulacja sfery

W przedstawionej na Rysunku 3.1.2 triangulacji sfery S występują 4 wierzchołki: A, B, C, D. Ponadto mamy 6 krawędzi: a, b, c, d, e, f.

Dzielą one sferę na 4 trójboki:

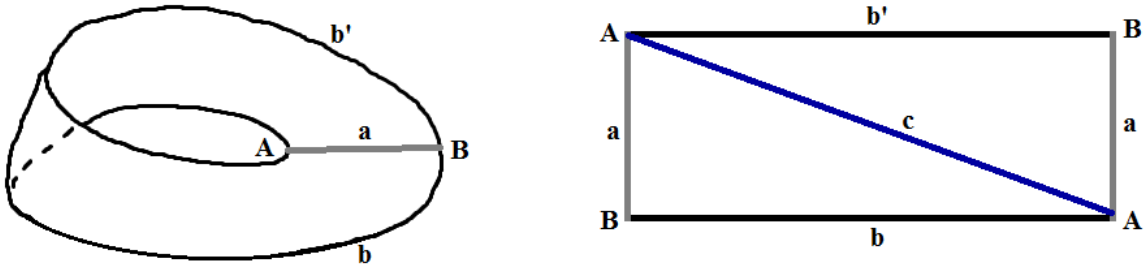
1. ABC o krawędziach: a, b, c;
2. ABC o krawędziach: a, d, c;
3. BCD o krawędziach: b, e, f;
4. BCD o krawędziach: d, e, f.

Stąd mamy, że charakterystyka Eulera sfery wynosi $\chi(S) = 4 + 4 – 6 = 2$.

Przykład 2: wstęga Möbiusa

W przedstawionej na Rysunku 3.1.3 triangulacji wstęgi Möbiusa W występują 2 wierzchołki: A i B. Ponadto mamy 4 krawędzie: a, b, c, b'. Dzielą one wstęgę na 2 trójboki.

Stąd mamy, że charakterystyka Eulera wstęgi Möbiusa wynosi $\chi(W) = 2 + 2 – 4 = 0$.



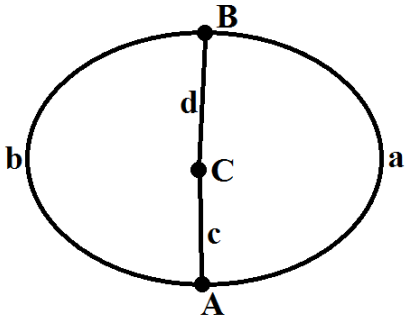
Rys. 3.1.3. Triangulacja wstęgi Möbiusa

Przykład 3: dysk

W przedstawionej na Rysunku 3.1.4 triangulacji dysku D występują 3 wierzchołki: A, B, C. Ponadto mamy 4 krawędzie: a, b, c, d. Dzielą one dysk na 2 trójboki:

1. ABC o krawędziach: a, d, c;
2. ABC o krawędziach: b, d, c.

Stąd mamy, że charakterystyka Eulera dysku wynosi $\chi(D) = 2 + 3 - 4 = 1$.



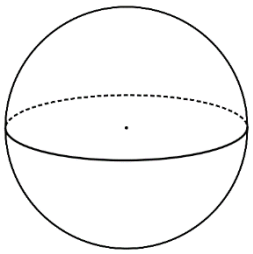
Rys. 3.1.4. Triangulacja dysku

3.2. Klasyfikacja powierzchni z brzegiem i ich charakterystyki Eulera

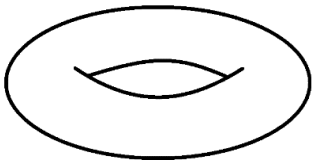
Powierzchnie dzielimy na zamknięte (bez brzegu) i te z brzegiem. Powierzchnię będziemy nazywać *nieorientowalną* wtedy, gdy zawiera jako podzbiór wstęgę Möbiusa, a *orientowalną* wtedy, gdy jej nie zawiera.

Poniżej przedstawiamy twierdzenie klasyfikujące powierzchnie z brzegiem i bez brzegu. Można je znaleźć na przykład w Rozdziale 6 książki *Geometria poglądowa* [6], ale przedstawiamy je w nieco przyjaźniejszej formie, zaczerpniętej z pracy magisterskiej K. Kijewskiej *O symetriach wzorów płaskich* [2], korzystając z tego, że zawiera ono równocześnie wyliczenia charakterystyk Eulera.

Twierdzenie 3.2.1
Każda zamknięta powierzchnia orientowalna jest, z dokładnością do ciągłej deformacji, jedną z następujących powierzchni: sferą (Rysunek 3.2.1), torusem (Rysunek 3.2.2), „powierzchnią precla z dwoma dziurami” (Rysunek 3.2.3) lub „powierzchnią precla z g dziurami” dla pewnego $g > 2$ (Rysunek 3.2.4). Powierzchnie te oznaczamy symbolem Σ_g, gdzie g oznacza liczbę dziur (oznaczenie Σ_0 to sfera). Charakterystyka Eulera powierzchni Σ_g wynosi $\chi(\Sigma_g) = 2(1 - g)$.

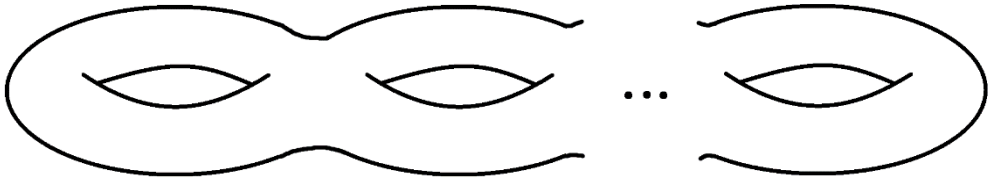


Rys. 3.2.1. Sfera



Rys. 3.2.2. Torus

Rys. 3.2.3. „Precel z 2 dziurami”



Rys. 3.2.4. „Precel z g dziurami”

Każda powierzchnia zamknięta nieorientowalna jest, z dokładnością do ciągłej deformacji, jedną z powierzchni $\mathbf{P_n}$ *otrzymywanych w taki sposób, że ze sfery wycinamy wnętrza n parami rozłącznych dysków i do każdego brzegu po wyciętym dysku doklejamy wstęgę Möbiusa. Charakterystyka Eulera takich powierzchni* $\mathbf{P_n}$ *wynosi* $\chi(\mathbf{P_n}) = 2 - n$.

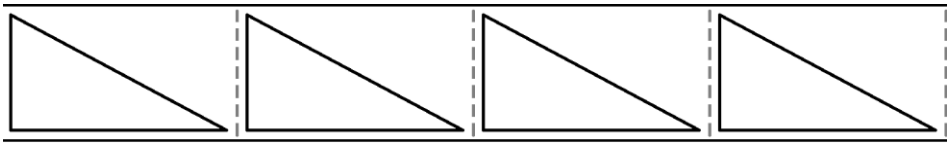
Powierzchnia G z brzegiem jest, z dokładnością do ciągłej deformacji, jedną z powierzchni zamkniętych z wyciętymi wnętrzami m parami rozłącznych dysków. Jeżeli wyżej wspomnianą powierzchnię zamkniętą oznaczymy przez $\hat{G}$*, to zachodzi następujący wzór na charakterystykę Eulera powierzchni G:* $\chi(G) = \chi(\hat{G}) - m$.

4. Orbifold szlaku

Ponieważ szlaki są z definicji obiektami nieskończonymi, więc wprowadzamy pojęcie orbifoldu, które umożliwi nam analizę ograniczonych powierzchni „reprezentujących” szlaki. Wykorzystanie orbifoldów do analizy symetrii obiektów jest zasadniczym składnikiem metody Conwaya, którą stosujemy w niniejszej pracy.

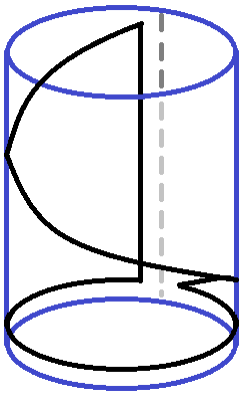
Definicja 4.1
Orbifoldem szlaku nazywamy obiekt, który powstaje przez nałożenie (utożsamienie ze sobą) wszystkich tych fragmentów pasa zawierającego szlak, które są na siebie przeprowadzane przez symetrie tego szlaku.

Zastanówmy się jak zatem wygląda orbifold szlaku typu I, którego symetriami są tylko translacje, a którego fragment przedstawiono na Rysunku 4.1.



Rys. 4.1. Szlak typu I

W orbifoldzie powinien się znaleźć fragment zawierający trójkąt i obejmujący obszar od wybranej linii przerywanej do kolejnej linii przerywanej. Co się stanie z liniami przerywanymi w orbifoldzie? Utożsamiamy je ze sobą, bo translacja o wektor podstawowy przeprowadza każdą linię przerywaną na sąsiednią. Zatem orbifoldem szlaku przedstawionego na Rysunku 4.1 będzie powierzchnia boczna walca, przedstawiona poglądowo na Rysunku 4.2.

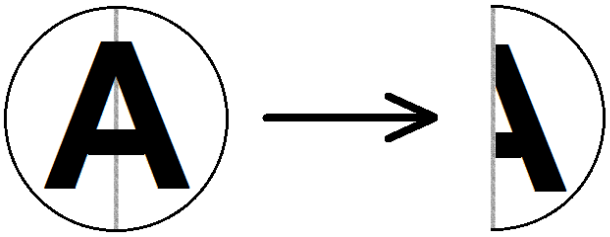


Rys. 4.2. Orbifold szlaku typu I

Spróbujmy teraz ogólnie przeanalizować, jakie elementy może zawierać orbifold. Na początek zastanówmy się, jak może on wyglądać w pobliżu swojego brzegu.

Każdy orbifold zawiera fragment, który pochodzi od brzegu szlaku. To znaczy, że punkty, które należą do prostych brzegowych szlaku, w orbifoldzie również będą reprezentowane punktami leżącymi na brzegu. Fragmenty brzegu orbifoldu, które pochodzą od prostych brzegowych szlaku będziemy nazywali *zwykłymi fragmentami brzegu*.

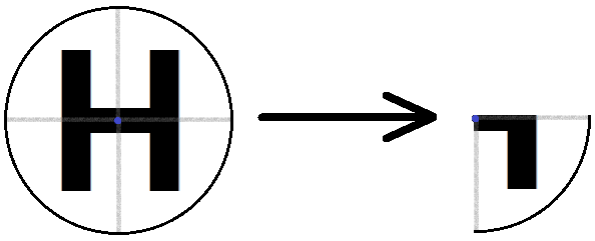
Jeśli dany szlak ma symetrię odbiciową, to jakąś część brzegu jego orbifoldu będzie stanowić fragment osi symetrii szlaku. To znaczy, że punkt, który w szlaku leżał na osi symetrii (ale nie na przecięciu osi symetrii), w orbifoldzie będzie punktem leżącym na brzegu. Wynika to z tego, że fragment szlaku po jednej stronie osi symetrii będzie utożsamiony z fragmentem po drugiej stronie tej osi. Opisane wyżej części brzegu orbifoldu będziemy nazywać *lustrzanymi fragmentami brzegu*. Fragment orbifoldu zawierający lustrzany fragment brzegu pokazany jest na Rysunku 4.3.



Rys. 4.3. Powstawanie lustrzanych fragmentów brzegu orbifoldu

Punkty, które leżą w orbifoldzie na „połączeniu” zwykłej części brzegu z lustrzaną będziemy nazywać *punktami lustrzanymi końcowymi*. Pochodzą one od punktów leżących na przecięciu prostej brzegowej szlaku z pionową osią symetrii szlaku.

Jeśli dany szlak ma i poziomą, i pionowe osie symetrii, to punkty, które w szlaku leżały na ich przecięciu, w orbifoldzie będą reprezentowane punktami „narożnymi”, to znaczy że będą leżeć na brzegu, łącząc dwie niewspółliniowe krawędzie. Punkty takie w orbifoldzie będziemy nazywać *punktami kalejdoskopowymi*. Fragment orbifoldu zawierający taki punkt przedstawiono na Rysunku 4.4.

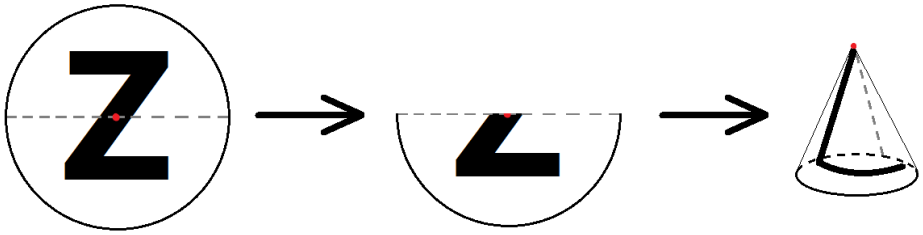


Rys. 4.4. Powstawanie punktów kalejdoskopowych w orbifoldzie

Podsumowując, brzeg orbifoldu składa się ze zwykłych fragmentów brzegu (pochodzących od brzegów szlaku) oraz lustrzanych fragmentów brzegu (pochodzących od osi symetrii szlaku). Jeśli fragmenty te łączą się, to na ich połączeniu znajdują się punkty lustrzane końcowe, w których orbifold ma naroże o mierze kąta 90°. Ponadto wewnątrz fragmentów lustrzanych mogą znajdować się narożne wierzchołki kalejdoskopowe, oddzielające od siebie „podfragmenty" lustrzane brzegu.

Zastanówmy się teraz, jakie punkty mogą należeć do wnętrza orbifoldu.

Jeśli szlak ma symetrię obrotową, to znaczy, że w jego pasie występują środki półobrotów. Jeżeli przez środek półobrotu przechodzi oś symetrii szlaku, to odpowiadający mu punkt orbifoldu leży na lustrzanym fragmencie brzegu orbifoldu, a więc nie należy do jego wnętrza. Natomiast te, które do niego należą, w orbifoldzie będą reprezentowane przez punkty „stożkowe", to znaczy ich małe otoczenie będzie przypominało stożek, którego środek półobrotu jest wierzchołkiem. Wynika to z tego, że gdy utożsamimy punkty, które są swoimi obrazami w półobrocie względem danego środka, pozostanie „połowa", jak na Rysunku 4.5, której „brzegi" też utożsamiamy ze sobą i powstaje stożek. Opisane wyżej punkty „stożkowe" będziemy nazywać *punktami półobrotowymi*.



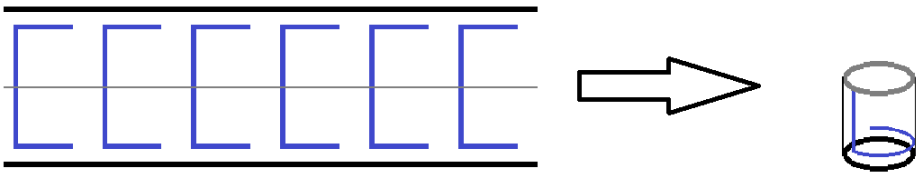
Rys. 4.5. Powstawanie punktów półobrotowych orbifoldu

Wewnątrz szlaku leżą także punkty, wokół których w małym otoczeniu nie ma ich obrazów przez symetrie szlaku. W orbifoldzie będą one reprezentowane przez punkty o tej samej własności, które będziemy nazywać *zwykłymi punktami*.

Przedstawimy teraz orbifoldy dla typów szlaków opisanych w Rozdziale 2 wraz z poglądowymi rysunkami.

Typ I został już dość szczegółowo omówiony w przykładzie na początku tego rozdziału (Rysunki 4.1 i 4.2). Przypomnijmy więc tylko, że orbifoldem szlaku tego typu będzie powierzchnia boczna walca, którą w tej pracy będziemy nazywali *pierścieniem* (gdyż jest nim z dokładnością do ciągłej deformacji). Brzeg takiego orbifoldu nie zawiera lustrzanych fragmentów, a tylko zwykłe fragmenty. Brak więc w nim także punktów lustrzanych końcowych i kalejdoskopowych, nie ma też punktów półobrotowych.

Typ II charakteryzuje szlaki, wśród symetrii których oprócz symetrii translacyjnych jest odbicie względem poziomej osi. Orbifold szlaku tego typu będzie wyglądał trochę podobnie do orbifoldu szlaku typu I. Można myśleć, że najpierw nakładamy elementy przekształcane na siebie przez symetrię translacyjną, a potem całość „składamy na pół" wzdłuż poziomej osi symetrii. Na Rysunku 4.6 przedstawiony jest przykładowy szlak wraz z jego orbifoldem – pierścieniem z jednym spójnym lustrzanym fragmentem brzegu oraz jednym spójnym zwykłym fragmentem brzegu. W orbifoldzie tym nie występują ani punkty lustrzane końcowe, ani kalejdoskopowe, ani punkty półobrotowe.

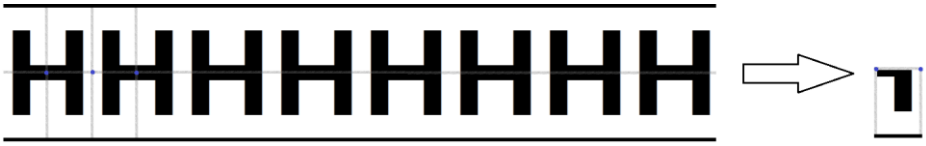


Rys. 4.6. Powstawanie orbifoldu szlaku typu II

Typ III opisuje szlaki, które mają symetrie translacyjne oraz odbiciowe względem pionowych osi symetrii. Gdy już nałożymy fragmenty przekształcane przez translacje na siebie, to pozostaje „złożyć" wzdłuż osi symetrii fragment, który zostanie. Orbifoldem szlaku typu III będzie prostokąt o dwóch naprzeciwległych krawędziach lustrzanych oraz dwóch zwykłych, którego przykład jest przedstawiony na Rysunku 4.7. Na połączeniu fragmentu zwykłego i lustrzanego brzegu występują punkty lustrzane końcowe (stanowiące wierzchołki prostokąta), brak natomiast punktów kalejdoskopowych i półobrotowych.

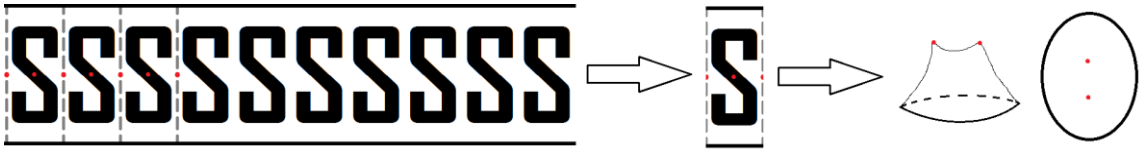
Rys. 4.7. Powstawanie orbifoldu szlaku typu III

Do typu IV zaliczamy szlaki, których symetriami są translacje, odbicie względem poziomej osi symetrii oraz odbicia względem pionowych osi symetrii. Po nałożeniu fragmentów przekształcanych przez translacje na siebie, pozostaje nałożyć na siebie fragmenty po obu stronach osi symetrii. Ostatecznie orbifoldem szlaku tego typu jest prostokąt o trzech kolejnych krawędziach lustrzanych, połączonych między sobą punktami kalejdoskopowymi, oraz jednej krawędzi zwykłej. Na połączeniu fragmentu lustrzanego brzegu ze zwykłym znajdują się punkty lustrzane końcowe. W tym orbifoldzie nie występują punkty półobrotowe. Na Rysunku 4.8 znajduje się przykładowy szlak tego typu wraz z jego orbifoldem.



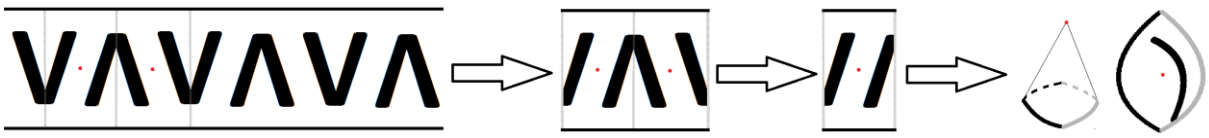
Rys. 4.8. Powstawanie orbifoldu szlaku typu IV

Typ V obejmuje szlaki, których symetriami są translacje i półobroty. Gdy już nałożymy fragmenty przekształcane przez translacje na siebie, to pozostaje fragment z środkami obrotu (na Rysunku 4.9 obiekt po pierwszej strzałce). Po utożsamieniu punktów, które przechodzą na siebie w symetrii obrotowej otrzymamy orbifold szlaku. Zawiera on dwa punkty półobrotowe („stożkowe") i cały jego brzeg jest zwykły. W związku z tym, że nie zawiera lustrzanego fragmentu brzegu, nie występują w nim punkty lustrzane końcowe ani kalejdoskopowe. Na Rysunku 4.9 przedstawiony jest przykład szlaku z jego orbifoldem („z przodu" i „z góry").



Rys. 4.9. Powstawanie orbifoldu szlaku typu V

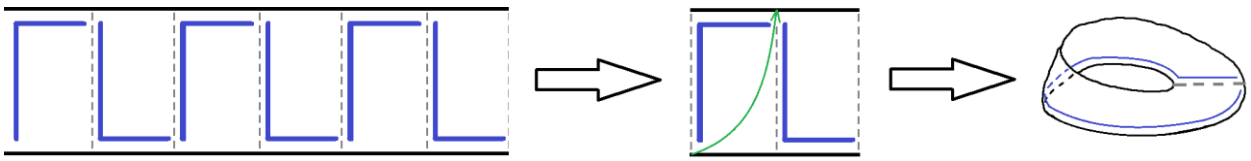
Typ VI charakteryzuje szlaki, których symetriami oprócz translacji są odbicia względem pionowych osi symetrii oraz półobroty, występujące na przemian. Po nałożeniu fragmentów przekształcanych przez translacje na siebie, pozostaje złożyć pozostałą część wzdłuż osi symetrii, a na koniec utożsamić ze sobą punkty przekształcane na siebie przez półobrót. Na Rysunku 4.10 pokazano przykładowy szlak tego typu z opisanymi wyżej etapami powstawania jego orbifoldu – czegoś na kształt stożka, ale z dwukątną podstawą. Zawiera on jeden punkt półobrotowy („stożkowy") oraz dwa punkty lustrzane końcowe, łączące fragment lustrzanego brzegu ze zwykłym. W orbifoldzie tym nie ma punktów kalejdoskopowych.



Rys. 4.10. Powstawanie orbifoldu szlaku typu VI

Typ VII opisuje szlaki, których symetriami są translacje oraz symetrie z poślizgiem. Gdy już nałożymy fragmenty przekształcane przez translacje na siebie, to pozostaje fragment, w którym są jeszcze punkty przekształcane na siebie przez symetrię z poślizgiem. Zauważmy, że jest tam element, który się powtarza, ale występuje raz „zwyczajnie", a raz jest obrócony.

Sklejenie jak na Rysunku 4.11 wzdłuż „środkowej” linii przerywanej, ale z odwróceniem, da nam orbifold takiego szlaku, którym jest wstęga Möbiusa.



Rys. 4.11. Powstawanie orbifoldu szlaku typu VII

5. Orbifoldowa charakterystyka Eulera

Orbifoldy to pewne powierzchnie, ale ze względu na występowanie wymienionych powyżej szczególnych elementów orbifoldu, aby je opisywać wprowadzimy modyfikację charakterystyki Eulera powierzchni, uwzględniającą właśnie te specjalne punkty i krawędzie. Tę zmodyfikowaną charakterystykę będziemy nazywać *orbifoldową charakterystyką Eulera orbifoldu*.

Aby obliczyć orbifoldową charakterystykę Eulera orbifoldu najpierw dzielimy dany orbifold na trójboki, analogicznie jak dla zwykłej charakterystyki Eulera, traktując wszystkie szczególne punkty (kalejdoskopowe, półobrotowe i lustrzane końcowe) jak wierzchołki podziału, natomiast fragmenty brzegu jak krawędzie podziału, z tym zastrzeżeniem, że krawędzie zawarte w brzegu orbifoldu nie mogą zawierać wewnątrz żadnych punktów specjalnych, czyli każda krawędź podziału leży w całości albo na lustrzanym fragmencie brzegu, albo na zwykłym. Spełniający powyższe warunki podział orbifoldu na trójboki również będziemy nazywać triangulacją.

Po dokonaniu triangulacji w orbifoldzie pojawią się dodatkowe krawędzie i wierzchołki. Wszystkie krawędzie, które nie należą do lustrzanych fragmentów brzegu, będziemy nazywać zwykłymi krawędziami. Wierzchołki podziału, które leżą na krawędziach lustrzanych i nie są punktami kalejdoskopowymi (w tym punkty lustrzane końcowe), będziemy nazywać wierzchołkami lustrzanymi. Ponadto wszystkie wierzchołki podziału, które nie leżą na krawędziach lustrzanych i nie są punktami półobrotowymi będziemy nazywać zwykłymi wierzchołkami.

Dla danej triangulacji wyliczamy orbifoldową charakterystykę Eulera odejmując połowę liczby krawędzi lustrzanych oraz liczbę zwykłych krawędzi od sumy: liczby trójboków, liczby wierzchołków zwykłych, połowy liczby wierzchołków lustrzanych, ¼ liczby wierzchołków kalejdoskopowych i połowy liczby wierzchołków półobrotowych.

Orbifoldową charakterystykę Eulera orbifoldu F będziemy oznaczać przez $\chi_{orb}(F)$.

Dla orbifoldu F, który po triangulacji zawiera t trójboków, w_z zwykłych wierzchołków, w_l lustrzanych wierzchołków, w_k kalejdoskopowych wierzchołków, w_o wierzchołków półobrotowych, k_z zwykłych krawędzi i k_l lustrzanych krawędzi mamy, że

$$\chi_{orb}(F) = t + w_z + \tfrac{1}{2}\, w_l + \tfrac{1}{4}\, w_k + \tfrac{1}{2}\, w_o - (k_z + \tfrac{1}{2}\, k_l).$$

Fakt 5.1
Orbifoldowa charakterystyka Eulera nie zależy od triangulacji.

Powyższy fakt przyjmujemy również bez dowodu, gdyż jego dowód jest analogiczny jak dowód faktu, że charakterystyka Eulera powierzchni nie zależy od triangulacji.

Wprowadzimy teraz jeszcze pojęcie pierścienia podstawowego – innej ograniczonej powierzchni stowarzyszonej ze szlakiem.

Definicja 5.2
Pierścieniem podstawowym szlaku nazywamy obiekt, który powstaje przez nałożenie (utożsamienie ze sobą) wszystkich tych fragmentów pasa zawierającego szlak, które są na siebie przeprowadzane przez translacje o całkowite wielokrotności wektora podstawowego tego szlaku.

O pierścieniu podstawowym można myśleć, że to wycięty ustalony powtarzający się fragment szlaku. Stąd jednemu punktowi pierścienia odpowiada jeden punkt w ustalonym fragmencie szlaku. Wyjątek stanowią punkty leżące w miejscu „sklejenia", którym odpowiadają po dwa punkty z danego fragmentu szlaku – leżące na jego brzegu. Dość dobrą analogią do pierścienia podstawowego, pochodzącą z życia codziennego, jest malarski wałek dekoracyjny. Przykładowe zdjęcia takich wałków można znaleźć na stronie internetowej `http://projektcacko.pl/stare-walki-sa-i-stemple/`.

Niech σ będzie przekształceniem z pierścienia podstawowego pewnego szlaku w jego orbifold, takim że punkty z pierścienia podstawowego są ze sobą utożsamione (sklejone), gdy są swoimi obrazami przez symetrie szlaku. Zauważmy, że dowolna triangulacja orbifoldu danego szlaku ma swój odpowiednik – *triangulację stowarzyszoną* pierścienia podstawowego tego szlaku. Triangulacja ta powstaje w ten sposób, że:

- jej wierzchołkami są przeciwobrazy przez σ wszystkich wierzchołków triangulacji orbifoldu,
- jej krawędziami są przeciwobrazy przez σ wszystkich krawędzi triangulacji orbifoldu,
- jej trójbokami są przeciwobrazy przez σ wszystkich trójboków triangulacji orbifoldu.

Fakt 5.3
Dla danej triangulacji orbifoldu liczba trójboków w przeciwobrazie przez σ dowolnego trójboku z orbifoldu jest stała.

Dowód
Pokażemy najpierw, że w przeciwobrazach przez σ dowolnych dwóch sąsiednich trójboków Δ_1 i Δ_2 jest tyle samo trójboków (przez sąsiednie rozumiemy trójboki o wspólnej krawędzi).

Zauważmy, że skoro krawędź a należy do dwóch trójboków, to znaczy że nie leży na brzegu orbifoldu. Stąd wynika, że jest zwykłą krawędzią (gdyż krawędzie lustrzane występują jedynie na brzegu orbifoldu). Zatem powstała przez utożsamienie ze sobą zwykłych krawędzi, które nie leżały na brzegu pierścienia

podstawowego. Zatem krawędzie należące do przeciwobrazu a przez σ też są krawędziami wspólnymi dla pewnych dwóch trójboków, przy czym z jednej strony do krawędzi należącej do $\sigma^{-1}(a)$ „przylega" trójbok należący do przeciwobrazu przez σ trójboku Δ_1, a z drugiej – trójbok należący do przeciwobrazu przez σ trójboku Δ_2. Oznacza to, że w przeciwobrazie przez σ sąsiednich trójboków z orbifoldu jest po tyle samo trójboków (trójboki należące do przeciwobrazów sąsiednich trójboków leżą po przeciwnych stronach przeciwobrazów wspólnej krawędzi).

Ponieważ od jednego trójboku do drugiego da się przejść przez wspólne krawędzie sąsiednich trójboków, zatem mamy tezę.

Skoro wiemy już, że liczba trójboków w przeciwobrazie dowolnego trójboku jest stała, nazwijmy tę charakterystyczną liczbę krotnością odwzorowania. Ścisłe sformułowanie zawiera poniższa definicja.

Definicja 5.4
Niech *krotność odwzorowania* σ będzie liczbą trójboków w pierścieniu podstawowym danego szlaku w przeciwobrazie przez σ dowolnego trójboku z orbifoldu tego szlaku.

Teraz przedstawimy Fakt pomocniczy oraz Obserwacje, które później będą nam potrzebne w dowodzie Twierdzenia 5.7.

Fakt pomocniczy 5.5
Dla dowolnej triangulacji pierścienia P jego charakterystyka Eulera wynosi 0.

Dowód
Pierścień powstaje z kuli przez wycięcie 2 parami rozłącznych dysków, zatem z Twierdzenia 3.2.1 jego charakterystyka wynosi $\chi(P) = 2 - 2 = 0$.

Obserwacje 5.6
Rozważmy triangulację T orbifoldu F oraz stowarzyszoną z nią triangulację pierścienia P, wyznaczoną przez przeciwobrazy przez funkcję σ, gdzie σ: $P \to F$.
(a) Jeśli w orbifoldzie F jest t trójboków, to w pierścieniu podstawowym P jest $k \cdot t$ trójboków.
(b) Jeśli e jest zwykłą krawędzią w F, to $\sigma^{-1}(e)$ składa się z k krawędzi.
(c) Jeśli e jest lustrzaną krawędzią w F, to $\sigma^{-1}(e)$ składa się z ½ k krawędzi.
(d) Jeśli v jest zwykłym wierzchołkiem w F, to $\sigma^{-1}(v)$ składa się z k wierzchołków.
(e) Jeśli v jest lustrzanym wierzchołkiem w F, to $\sigma^{-1}(v)$ składa się z ½ k wierzchołków.
(f) Jeśli v jest kalejdoskopowym wierzchołkiem w F, to $\sigma^{-1}(v)$ składa się z ¼ k wierzchołków.
(g) Jeśli v jest półobrotowym wierzchołkiem w F, to $\sigma^{-1}(v)$ składa się z ½ k wierzchołków.

Dowód
(a) Wynika to wprost z definicji krotności odwzorowania.
(b) Rozpatrzmy dwa przypadki:

Przypadek 1: *e* jest krawędzią zawartą w brzegu orbifoldu *F*
Skoro *e* jest zwykłą krawędzią zawartą w brzegu, to znaczy, że jest krawędzią dokładnie jednego trójboku w orbifoldzie. Ponadto jej przeciwobraz przez σ składa się z krawędzi zawartych w brzegu pierścienia podstawowego. Czyli każda krawędź należąca do przeciwobrazu *e* przez σ jest krawędzią dokładnie jednego trójboku w pierścieniu. Stąd w przeciwobrazie *e* przez σ jest dokładnie tyle krawędzi, ile jest trójboków w przeciwobrazie trójboku, którego *e* jest krawędzią, czyli *k*.
Przypadek 2: *e* jest krawędzią zawartą we wnętrzu orbifoldu *F*
Skoro *e* jest zwykłą krawędzią zawartą we wnętrzu *F*, to znaczy, że jest krawędzią wspólną dokładnie dwóch trójboków w orbifoldzie. Ponadto jej przeciwobraz przez σ składa się z krawędzi zawartych we wnętrzu pierścienia podstawowego. Czyli każda krawędź należąca do przeciwobrazu *e* przez σ jest krawędzią dokładnie dwóch trójboków w pierścieniu. Stąd w przeciwobrazie *e* przez σ jest dwa razy mniej krawędzi niż łącznie trójboków w przeciwobrazach trójboków, których *e* jest krawędzią, czyli *k*.

(c) Jeśli e jest lustrzaną krawędzią w F, to znaczy, że powstała przy utożsamieniu ze sobą powierzchni leżących po dwóch stronach osi symetrii. Z definicji w przeciwobrazie trójboku, którego jest krawędzią, będzie k trójboków, ale będą one miały parami wspólne krawędzie zawarte we fragmencie osi symetrii. Stąd w przeciwobrazie e będzie ½ k krawędzi.

(d) Skoro *v* jest zwykłym wierzchołkiem w *F*, to znaczy, że spotyka się w nim *n* zwykłych krawędzi (dla pewnego $n > 1$). Zatem w tym punkcie spotyka się *n* trójboków, które mają parami wspólne zwykłe krawędzie. Prowadząc rozumowanie analogiczne jak w (b) dojdziemy zatem do wniosku, że w przeciwobrazie wierzchołka *v* jest *k* wierzchołków.

(e) Jeśli *v* jest lustrzanym wierzchołkiem w *F*, to znaczy, że powstał przy utożsamieniu ze sobą powierzchni leżących po dwóch stronach osi symetrii. Z definicji w przeciwobrazie trójboku, którego jest wierzchołkiem, będzie *k* trójboków, ale będą one miały parami wspólny wierzchołek zawarty we fragmencie osi symetrii. Stąd w przeciwobrazie *v* będzie ½ *k* wierzchołków.

(f) Jeśli *v* jest kalejdoskopowym wierzchołkiem w *F*, to znaczy, że powstał przy utożsamieniu ze sobą powierzchni leżących po czterech stronach przecinających się (pionowej i poziomej) osi symetrii. Z definicji w przeciwobrazie trójboku, którego jest wierzchołkiem, będzie *k* trójboków, ale będą one miały czwórkami wspólny wierzchołek leżący na przecięciu pionowej i poziomej osi symetrii. Stąd w przeciwobrazie *v* będzie ¼ *k* wierzchołków.

(g) Jeśli *v* jest półobrotowym wierzchołkiem w *F*, to znaczy, że powstał przy utożsamieniu ze sobą powierzchni leżących po dwóch stronach środka symetrii. Z definicji w przeciwobrazie trójboku, którego jest wierzchołkiem, będzie *k* trójboków, ale będą one miały parami wspólny wierzchołek będący środkiem symetrii. Stąd w przeciwobrazie *v* będzie ½ *k* wierzchołków.

Mając uzasadnione powyższe Obserwacje oraz Fakt pomocniczy możemy przejść do sformułowania i uzasadnienia poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 5.7
Orbifoldowa charakterystyka Eulera orbifoldu dowolnego szlaku wynosi 0.

Dowód

Rozważmy orbifold O pewnego szlaku. Załóżmy, że dla pewnej triangulacji T tego orbifoldu zawiera ona:

- t trójboków,
- k_z zwykłych krawędzi,
- k_l lustrzanych krawędzi,
- w_z zwykłych wierzchołków,
- w_l lustrzanych wierzchołków,
- w_k kalejdoskopowych wierzchołków,
- w_o półobrotowych wierzchołków.

Niech σ będzie odwzorowaniem z pierścienia podstawowego P w orbifold O. Wtedy przeciwobrazy przez funkcję σ wyznaczają stowarzyszoną triangulację pierścienia. Załóżmy, że krotność odwzorowania wynosi k.

Z wymienionych wcześniej Obserwacji wynika, że w pierścieniu P (w triangulacji stowarzyszonej) znajduje się:

- $k \cdot t$ trójboków,
- $k \cdot k_z$ krawędzi przeprowadzanych przez σ na zwykłe krawędzie w orbifoldzie,
- $\frac{1}{2} k \cdot k_l$ krawędzi przeprowadzanych przez σ na lustrzane krawędzie w orbifoldzie,
- $k \cdot w_z$ wierzchołków przeprowadzanych przez σ na zwykłe wierzchołki w orbifoldzie,
- $\frac{1}{2} k \cdot w_l$ wierzchołków przeprowadzanych przez σ na lustrzane wierzchołki w orbifoldzie,
- $\frac{1}{4} k \cdot w_k$ wierzchołków przeprowadzanych przez σ na kalejdoskopowe wierzchołki w orbifoldzie,
- $\frac{1}{2} k \cdot w_o$ wierzchołków przeprowadzanych przez σ na półobrotowe wierzchołki w orbifoldzie.

Z Faktu pomocniczego 5.5 wiemy, że

$$k \cdot w_z + \tfrac{1}{2} k \cdot w_l + \tfrac{1}{4} k \cdot w_k + \tfrac{1}{2} k \cdot w_o - (k \cdot k_z + \tfrac{1}{2} k \cdot k_l) + k \cdot t = 0.$$

Wyłączając wspólny czynnik przed nawias dostajemy, że

$$k \cdot [w_z + \tfrac{1}{2} w_l + \tfrac{1}{4} w_k + \tfrac{1}{2} w_o - k_z - \tfrac{1}{2} k_l + t] = 0.$$

Ponieważ $k \neq 0$, więc równoważnie możemy zapisać, że

$$w_z + \tfrac{1}{2} w_l + \tfrac{1}{4} w_k + \tfrac{1}{2} w_o - k_z - \tfrac{1}{2} k_l + t = 0. \qquad (*)$$

Wyliczmy teraz orbifoldową charakterystykę Eulera dla triangulacji T. Wynosi ona

$$\chi_{orb}(O) = 1 \cdot w_z + \tfrac{1}{2} \cdot w_l + \tfrac{1}{4} \cdot w_k + \tfrac{1}{2} \cdot w_o - (1 \cdot k_z + \tfrac{1}{2} \cdot k_l) + t.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\chi_{orb}(O) = w_z + \tfrac{1}{2} w_l + \tfrac{1}{4} w_k + \tfrac{1}{2} w_o - k_z - \tfrac{1}{2} k_l + t.$$

Z równości (*) wynika, że $\chi_{orb}(O) = 0$, co należało dowieść.

Do tej pory mówiąc o orbifoldach, skupialiśmy się na ich szczególnych elementach, ale możemy popatrzeć na nie także jako na pewne ograniczone powierzchnie.

Definicja 5.8
Niech O będzie orbifoldem pewnego szlaku. Wtedy *powierzchnią orbifoldu* O będziemy nazywali orbifold O bez wyróżniania charakterystycznych dla niego elementów. Powierzchnię orbifoldu O będziemy oznaczać $|O|$.

Twierdzenie 5.9
Dla orbifoldu O dowolnego szlaku zachodzi nierówność $\chi_{orb}(O) \leq \chi(|O|)$.

Dowód

Niech O będzie orbifoldem pewnego szlaku. Rozważmy triangulację T orbifoldu O, taką że zawiera ona:

- t trójboków,
- k_z zwykłych krawędzi,
- k_l lustrzanych krawędzi,
- w_z zwykłych wierzchołków,
- w_l lustrzanych wierzchołków,
- w_k kalejdoskopowych wierzchołków,
- w_o półobrotowych wierzchołków.

Wiemy, że $\chi_{orb}(O) = 0$, zatem mamy, że

$$w_z + \tfrac{1}{2} w_l + \tfrac{1}{4} w_k + \tfrac{1}{2} w_o - k_z - \tfrac{1}{2} k_l + t = 0. \qquad (**)$$

Rozważmy powierzchnię orbifoldu $|O|$ i jej triangulację T', odpowiadającą triangulacji T orbifoldu (tę samą, ale nieuwzględniającą szczególnych elementów orbifoldu).

Zauważmy, że każda krawędź orbifoldu w triangulacji T na powierzchni $|O|$ będzie również krawędzią w triangulacji T'. Stąd mamy, że liczba krawędzi w triangulacji T' będzie równa

$$K = k_z + k_l.$$

Podobnie będzie dla wierzchołków, to znaczy liczba wierzchołków na powierzchni $|O|$ w triangulacji T' będzie równa

$$W = w_z + w_l + w_k + w_o.$$

Trójboków natomiast będzie na powierzchni $|O|$ w triangulacji T' tyle samo co w orbifoldzie w triangulacji T, czyli t.

Zatem charakterystyka Eulera powierzchni $|O|$ wynosi

$$\chi(|O|) = W - K + t = w_z + w_l + w_k + w_o - (k_z + k_l) + t.$$

Dążymy do sprawdzenia, która z wartości – charakterystyka Eulera powierzchni orbifoldu czy jego orbifoldowa charakterystyka Eulera jest większa, rozpatrzmy zatem ich różnicę.

Mamy, że

$$\chi(|O|) - \chi_{orb}(O) =$$

$$= w_z + w_l + w_k + w_o - (k_z + k_l) + t - [w_z + \tfrac{1}{2} w_l + \tfrac{1}{4} w_k + \tfrac{1}{2} w_o - k_z - \tfrac{1}{2} k_l + t].$$

Po uproszczeniu dostajemy, że

$$\chi(|O|) - \chi_{orb}(O) =$$

$$= w_z + w_l + w_k + w_o - k_z - k_l + t - w_z - \tfrac{1}{2} w_l - \tfrac{1}{4} w_k - \tfrac{1}{2} w_o + k_z + \tfrac{1}{2} k_l - t.$$

Redukując wyrazy podobne otrzymujemy, że

$$\chi(|O|) - \chi_{orb}(O) = \tfrac{1}{2}\, w_l + \tfrac{3}{4}\, w_k + \tfrac{1}{2}\, w_o - \tfrac{1}{2}\, k_l.$$

Wyłączając wspólny czynnik przed nawias dostajemy, że

$$\chi(|O|) - \chi_{orb}(O) = \tfrac{1}{2}\cdot[w_l + \tfrac{3}{2}\, w_k + w_o - k_l].$$

Fakt pomocniczy
W dowolnej triangulacji orbifoldu dowolnego szlaku liczba krawędzi lustrzanych jest nie większa niż suma liczby wierzchołków lustrzanych i kalejdoskopowych.

Dowód

Gdy popatrzymy na fragmenty brzegu zawierające krawędzie lustrzane, to okaże się, że są dwa rodzaje – zamknięte i otwarte (porównaj Rysunek 5.2). We fragmencie „zamkniętym" krawędzi jest tyle samo co wierzchołków, natomiast we fragmencie „otwartym" krawędzi jest o 1 mniej niż wierzchołków. Skoro w każdym fragmencie zawierającym krawędzie lustrzane liczba krawędzi lustrzanych z tego fragmentu jest nie większa niż suma liczby wierzchołków lustrzanych i kalejdoskopowych zawartych w tym fragmencie, to łączną liczbę krawędzi lustrzanych znajdujących się w orbifoldzie można oszacować następująco: $k_l \le w_l + w_k$, co było do udowodnienia.

Rys. 5.2. Zamknięty (po lewej) i otwarty (po prawej) fragment brzegu

Kontynuując poprzednie obliczenia, prowadzimy kolejne przekształcenia

$$\chi(|O|) - \chi_{orb}(O) = \tfrac{1}{2}\cdot[w_l + \tfrac{3}{2}\, w_k + w_o - k_l] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot[w_l + w_k - k_l + w_o + \tfrac{1}{2}\, w_k] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot[(w_l + w_k - k_l) + (w_o + \tfrac{1}{2}\, w_k)].$$

Korzystając z faktu pomocniczego, zauważamy, że ostatnia suma w nawiasie kwadratowym jest sumą dwóch nieujemnych składników. Widzimy zatem, że $\chi(|O|) - \chi_{orb}(O) \ge 0$, czyli równoważnie $\chi(|O|) \ge \chi_{orb}(O)$, co należało dowieść.

Wniosek 5.10
Dla powierzchni $|O|$ orbifoldu O dowolnego szlaku zachodzi nierówność $\chi(|O|) \ge 0$.

Dowód

Ponieważ $\chi(|O|) \ge \chi_{orb}(O)$, a ponadto $\chi_{orb}(O) = 0$, więc z przechodniości mamy, że $\chi(|O|) \ge 0$.

6. Potencjalne formy orbifoldów szlaków oraz dowód Głównego Twierdzenia

Kolejnym krokiem w naszym dążeniu do przeprowadzenia klasyfikacji szlaków będzie określenie na podstawie Twierdzenia 3.2.1 (klasyfikującego powierzchnie) oraz nierówności wyprowadzonych w poprzednim rozdziale, jakie powierzchnie mogłyby być orbifoldami szlaków.

Przypomnijmy zatem, że powierzchnie zamknięte orientowalne oznaczaliśmy przez Σ_g, gdzie g oznacza liczbę dziur. Charakterystyka Eulera powierzchni Σ_g wynosi $\chi(\Sigma_g) = 2(1 - g)$.

Powierzchnie zamknięte nieorientowalne oznaczaliśmy przez $\boldsymbol{P_n}$. Charakterystyka Eulera powierzchni $\boldsymbol{P_n}$ wynosi $\chi(\boldsymbol{P_n}) = 2 - n$.

Natomiast każda powierzchnia G z brzegiem jest jedną z wyżej opisanych powierzchni zamkniętych z wyciętymi wnętrzami m parami rozłącznych dysków (oznaczmy ją przez $\hat{G}$). Charakterystyka Eulera powierzchni G wynosi: $\chi(G) = \chi(\hat{G}) - m$.

Zauważmy, że orbifold nie może być powierzchnią zamkniętą, musi zawierać elementy brzegu, które pochodzą od prostych brzegowych szlaku.

Przeanalizujmy zatem, jakie są możliwe powierzchnie orbifoldów szlaków.

Przypadek 1: powierzchnia orientowalna

Z Twierdzenia 3.2.1 mamy, że

$$\chi(G) = 2(1 - g) - m.$$

Wiedząc, że charakterystyka Eulera ma być nieujemna, możemy zapisać, że

$$2(1 - g) - m \geq 0.$$

Po uproszczeniu dostajemy, że

$$1 - g - \tfrac{1}{2} m \geq 0.$$

Ostatecznie uzyskujemy

$$1 - \tfrac{1}{2} m \geq g.$$

Ale wiemy, że $g \geq 0$ (bo to liczba „dziur”), zatem mamy, że

$$1 - \tfrac{1}{2} m \geq 0.$$

Po przekształceniach otrzymujemy, że

$$2 \geq m.$$

Zatem możliwe wartości m to 1 lub 2.

Dla $m = 1$ rozważana wyżej nierówność przyjmuje postać

$$1 - g - \tfrac{1}{2} \geq 0.$$

Stąd mamy, że $\tfrac{1}{2} \geq g$. A ponieważ $g \geq 0$, zatem otrzymujemy, że $g = 0$.

Powierzchnia, która pochodzi od kuli, nie ma dziur i wycięto z niej 1 dysk, jest dyskiem.

Dla $m = 2$ rozważana wyżej nierówność przyjmuje postać

$$1 - g - \tfrac{1}{2} \cdot 2 \geq 0.$$

Stąd mamy, że $0 \geq g$. A ponieważ $g \geq 0$, zatem otrzymujemy, że $g = 0$.

Powierzchnia, która pochodzi od kuli, nie ma dziur i wycięto z niej 2 rozłączne dyski, to pierścień.

Przypadek 2: powierzchnia nieorientowalna

Z Twierdzenia 3.2.1 mamy, że

$$\chi(G) = 2 - n - m.$$

Wiedząc, że charakterystyka Eulera ma być nieujemna, możemy zapisać, że

$$2 - n - m \geq 0.$$

Stąd dostajemy, że

$$2 - n \geq m.$$

Ale wiemy, że $m \geq 1$, więc

$$2 - n \geq 1.$$

A stąd wynika, że $n \leq 1$. Ale ponieważ $n \geq 1$, więc jedyną możliwą wartością n jest 1.

Gdy $n = 1$ powyższa nierówność przyjmuje postać

$$2 - 1 \geq m.$$

Stąd mamy, że $m \leq 1$. Ponieważ wiemy, że $m \geq 1$, więc ostatecznie $m = 1$.

Powierzchnia o otrzymanych parametrach to wstęga Möbiusa.

Otrzymaliśmy zatem 3 powierzchnie, które potencjalnie mogą być powierzchniami orbifoldów szlaków. Popatrzmy na ich charakterystyki Eulera:

- dysk ma charakterystykę Eulera równą 1 (obliczaliśmy to w Przykładzie 3 w Rozdziale 3);
- pierścień ma charakterystykę Eulera równą 0 (obliczaliśmy to w uzasadnieniu Faktu pomocniczego w Rozdziale 4);
- wstęga Möbiusa ma charakterystykę Eulera równą 0 (obliczaliśmy to w Przykładzie 2 w Rozdziale 3).

Z Twierdzenia 5.1 wiemy, że orbifoldowa charakterystyka Eulera orbifoldu dowolnego szlaku wynosi zero. Ponadto z Twierdzenia 5.2 wiemy, że dla dowolnego orbifoldu jego orbifoldowa charakterystyka jest nie większa niż charakterystyka Eulera jego powierzchni. Zastanówmy się zatem, jak „umieszczenie” na powierzchniach, które potencjalnie mogłyby być

orbifoldami, szczególnych elementów orbifoldu wpłynie na ich orbifoldową charakterystykę Eulera.

Zastanówmy się najpierw, co się stanie, gdy zamienimy zwykły wierzchołek triangulacji na wierzchołek półobrotowy (oczywiście trzeba tak dobrać triangulację, by był taki wierzchołek poza brzegiem powierzchni). W wyniku tej drobnej modyfikacji nie zmieni się liczba wierzchołków, liczba krawędzi ani trójboków, jedyną różnicą będzie zmniejszenie „wagi" jednego wierzchołka o ½ (zwykły wierzchołek miał „wagę" 1, natomiast półobrotowy ma „wagę" ½). Zatem orbifoldowa charakterystyka Eulera zmniejszy się o ½ na skutek zastąpienia zwykłego wierzchołka wierzchołkiem półobrotowym.

Kolejną opcją do przeanalizowania jest pojawienie się na powierzchni krawędzi lustrzanej. Rozpatrzmy najpierw, co się stanie, gdy zwykły fragment brzegu zastąpimy lustrzanym bez punktów kalejdoskopowych. W tym celu przypomnijmy, że w dowodzie Faktu pomocniczego wprowadziliśmy rozróżnienie na otwarte i zamknięte fragmenty brzegu (porównaj Rysunek 5.2).

Gdy zamknięty fragment zwykłego brzegu zamienimy na zamknięty fragment lustrzanego brzegu (bez wierzchołków kalejdoskopowych), to wszystkie wierzchołki triangulacji, które leżały na tym modyfikowanym brzegu, ze zwykłych wierzchołków zamienią się na lustrzane. To znaczy, że jeśli na zamkniętym kawałku brzegu było n zwykłych krawędzi i n zwykłych wierzchołków, to po zmianie jest na nim n lustrzanych krawędzi i n lustrzanych wierzchołków. Jak zmieni się orbifoldowa charakterystyka Eulera? Dokładnie n wierzchołków zmniejszy „wagę" z 1 do ½ oraz n krawędzi zmniejszy „wagę" z 1 do ½. Ale ponieważ do orbifoldowej charakterystyki Eulera wchodzą one z przeciwnymi znakami, nie ma znaczenia czy ich „waga" to 1 czy ½, bo i tak się „znoszą". Zatem wartość orbifoldowej charakterystyki Eulera nie zmieni się, gdy zastąpimy zamknięty fragment zwykłego brzegu na zamknięty fragment lustrzanego brzegu (bez wierzchołków kalejdoskopowych).

Gdy otwarty fragment zwykłego brzegu zamienimy na fragment lustrzanego brzegu (bez wierzchołków kalejdoskopowych), to wszystkie wierzchołki triangulacji, które leżały na tym modyfikowanym brzegu, ze zwykłych wierzchołków zamienią się na lustrzane (są co najmniej dwa takie, gdyż jest to krawędź otwarta). To znaczy, że jeśli na modyfikowanym kawałku brzegu było (w danej triangulacji) n zwykłych wierzchołków i $(n-1)$ zwykłych krawędzi, to po zmianie jest na nim $(n-1)$ lustrzanych krawędzi i n lustrzanych wierzchołków. Jak zmieni się orbifoldowa charakterystyka Eulera? Dokładnie n wierzchołków zmniejszy „wagę" z 1 do ½ oraz $(n-1)$ krawędzi zmniejszy „wagę" z 1 do ½. Poza tym żadna wartość cząstkowa orbifoldowej charakterystyki Eulera nie ulegnie zmianie. Jeśli zatem przed modyfikacją „waga" danego otwartego fragmentu brzegu wynosiła $1\cdot n - 1\cdot(n-1) = 1$, to po zastąpieniu „waga"

będzie wynosiła $\frac{1}{2}\cdot n - \frac{1}{2}\cdot(n - 1) = \frac{1}{2}$. Zatem wartość orbifoldowej charakterystyki Eulera zmniejszy się o ½, gdy zastąpimy jeden otwarty fragment zwykłego brzegu na otwarty fragment lustrzanego brzegu (bez wierzchołków kalejdoskopowych).

Teraz zastanówmy się, jak na orbifoldową charakterystykę Eulera wpłynie dodanie wierzchołka kalejdoskopowego. Zauważmy, że aby taki wierzchołek mógł się w orbifoldzie pojawić, musi już na nim występować krawędź lustrzana. Popatrzymy zatem w ten sposób: we fragmencie brzegu już zmienionym na lustrzany zamieńmy k wierzchołków lustrzanych na kalejdoskopowe (gdy jest to otwarty fragment brzegu, to muszą wystąpić co najmniej $(k + 2)$ wierzchołki lustrzane, aby było to możliwe). Jeśli przed zamianą w tym fragmencie było n lustrzanych krawędzi oraz m wierzchołków lustrzanych, to po zastąpieniu będzie tam n lustrzanych krawędzi oraz $(m - k)$ wierzchołków lustrzanych i k wierzchołków kalejdoskopowych. Zatem „waga" fragmentu przed modyfikacją wynosiła $\frac{1}{2}\cdot m - \frac{1}{2}\cdot n$, a po niej było to $[\frac{1}{4}\cdot k + \frac{1}{2}\cdot(m - k)] - \frac{1}{2}\cdot n = \frac{1}{4}\cdot k + \frac{1}{2}\cdot m - \frac{1}{2}\cdot k - \frac{1}{2}\cdot n = \frac{1}{2}\cdot m - \frac{1}{2}\cdot n - \frac{1}{4}\cdot k$. Widzimy więc, że każdy dodany na krawędzi lustrzanej wierzchołek kalejdoskopowy obniża orbifoldową charakterystykę Eulera o ¼.

Ostatecznie okazuje się, że dodanie szczególnych elementów orbifoldu może zmniejszyć charakterystykę Eulera bądź jej nie zmienia. Zatem przeanalizujmy, do której z potencjalnych powierzchni orbifoldu można coś „dodać".

Wstęga Möbiusa ma charakterystykę Eulera równą zero, więc jedyne, co potencjalnie można byłoby zrobić (nie zmniejszając charakterystyki), to zamienić jej brzeg na zamknięty fragment lustrzany. Ale nie można tego zrobić, bo wtedy nie zawierałaby żadnego fragmentu zwykłego brzegu, a wiemy już, że musi taki w orbifoldzie wystąpić. Ale nic nie stoi na przeszkodzie temu, żeby wstęga Möbiusa bez żadnych dodatkowych elementów szczególnych była orbifoldem szlaku.

Również charakterystyka Eulera pierścienia wynosi zero, zatem (podobnie jak dla wstęgi Möbiusa) potencjalnie można zamienić zamknięty fragment brzegu na fragment lustrzany. Obu zamkniętych fragmentów brzegu nie można zamienić na lustrzane, bo wtedy orbifold nie będzie miał fragmentu zwykłego brzegu, ale jeden tak, pod warunkiem, że nie będzie na nim punktów kalejdoskopowych. Czyli możemy z powierzchni pierścienia uzyskać dwa różne orbifoldy – pierścień „bez dodatków" oraz pierścień z jednym zamkniętym fragmentem lustrzanego brzegu bez punktów kalejdoskopowych.

Najwięcej możliwości jest dla dysku, bo jego charakterystyka Eulera wynosi jeden, więc trzeba ją obniżyć do zera.

Po pierwsze, można na dysku umieścić dwa wierzchołki półobrotowe. Każdy z nich obniży charakterystykę Eulera o ½, więc łącznie zmniejszy się ona o 1, czyli będzie równa zero, a o to nam chodziło.

Po drugie, można dodać jeden wierzchołek półobrotowy i otwarty fragment zwykłego brzegu zastąpić lustrzanym bez wierzchołków kalejdoskopowych. Obecność wierzchołka półobrotowego zmniejszy charakterystykę Eulera o ½, także zamiana otwartego fragmentu brzegu na lustrzany obniży charakterystykę o ½, więc ostatecznie charakterystyka Eulera zmniejszy się o 1, czyli będzie równa zero.

Po trzecie, można zamienić dwa rozłączne otwarte fragmenty brzegu na lustrzane (bez wierzchołków kalejdoskopowych). Wtedy każdy z nich obniży charakterystykę Eulera o ½, więc łącznie obniżą ją o 1 i będzie równa zero.

I wreszcie po czwarte, można zamienić otwarty fragment brzegu na lustrzany, ale zawierający dwa punkty kalejdoskopowe. Obecność fragmentu lustrzanego brzegu obniża wartość charakterystyki Eulera o ½, natomiast dodatkowo każdy wierzchołek kalejdoskopowy obniża charakterystykę Eulera o ¼, więc łącznie obniżą ją o 1, czyli będzie równa zero.

Żadna inna opcja dla powierzchni dysku nie jest możliwa. Zamiana całego brzegu dysku na krawędź lustrzaną spowodowałaby, że (jako potencjalny orbifold) nie będzie on zawierał zwykłego brzegu, a tak być nie może. Wystąpienie wierzchołka półobrotowego powoduje, że charakterystyka Eulera obniża się o ½, pozostaje zatem jeszcze ½ na inne elementy. Może to być drugi środek półobrotu (jak pokazaliśmy wyżej) lub otwarty fragment lustrzanego brzegu bez wierzchołków kalejdoskopowych (co już również przeanalizowaliśmy). Ponieważ punkty kalejdoskopowe mogą występować tylko wtedy, gdy pojawi się krawędź lustrzana, więc łącznie z nią obniżają charakterystykę Eulera o co najmniej ¾, więc nie mogą one współistnieć (w orbifoldzie o powierzchni dysku) z punktem półobrotowym. Pozostaje sprawdzić ile punktów kalejdoskopowych może występować na powierzchni dysku. Skoro każdy z nich musi leżeć na krawędzi lustrzanej, więc charakterystyka Eulera w związku z jej obecnością zostaje obniżona o ½. Pozostała ½ może zostać wykorzystana jedynie na dwa wierzchołki lustrzane, bo tylko wtedy charakterystyka Eulera będzie równa zero.

Podsumowując, z potencjalnych powierzchni uzyskaliśmy siedem orbifoldów:

- wstęga Möbiusa,
- pierścień,
- pierścień z jedną krawędzią lustrzaną,
- dysk z dwoma punktami półobrotowymi,

- dysk z jednym punktem półobrotowym i jedną krawędzią lustrzaną (bez wierzchołków kalejdoskopowych),
- dysk z dwoma rozłącznymi krawędziami lustrzanymi (bez wierzchołków kalejdoskopowych),
- dysk z krawędzią lustrzaną i dwoma punktami kalejdoskopowymi.

Dowód Głównego Twierdzenia

Na skutek analizy przeprowadzonej w tym i poprzednich rozdziałach dowiedliśmy, że jest dokładnie siedem możliwych orbifoldów. Zauważmy, że orbifoldy te są dokładnie tymi samymi, co orbifoldy, które reprezentowały siedem, wymienionych w Rozdziale 3, typów szlaków. Zatem dowolny szlak musi należeć do jednego z siedmiu typów opisanych wcześniej w tej pracy, co należało dowieść.

Bibliografia

[1] Conway J. H., Burgiel H., Goodman-Strauss C., *The Symmetries of Things*, A K Peters, Ltd., Wallesley 2008.

[2] Kijewska K., *O symetriach wzorów płaskich*, praca magisterska napisana pod kierunkiem prof. dra hab. Jacka Świątkowskiego, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 2014.

[3] Doman R., *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1998.

[4] *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie*, pod red. W. Jędrychowskiego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1993.

[5] Coxeter H. S. M., *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967.

[6] Hilbert D., Cohn-Vossen S., *Geometria poglądowa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1956.