

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyczny  
*specjalność: bez specjalności*

*Paulina Górska*

**Odbiciowe parkietaże przestrzeni  
o czworościennych klepkach**

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2020



# Spis treści

<b>0</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>O parkietażach słów kilka</b>	<b>7</b>
1.1	Parkietaże . . . . .	7
	Płaszczyzna . . . . .	7
	Sfera . . . . .	8
	Przestrzeń . . . . .	8
1.2	Parkietaże odbiciowe . . . . .	9
	Płaszczyzna . . . . .	9
	Sfera . . . . .	10
	Przestrzeń . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Odbiciowe parkietaże sferyczne</b>	<b>13</b>
2.1	Odbiciowe trójkąty sferyczne . . . . .	13
2.2	Pokrycia sfery przystającymi trójkątami – obliczenia . . . . .	14
2.3	Konstrukcja odbiciowych parkietaży sferycznych . . . . .	18
	O południkach i równoleżnikach . . . . .	18
	O bryłach platońskich . . . . .	20
2.4	Klasyfikacja odbiciowych parkietaży sferycznych . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Czworościenne parkietaże odbiciowe</b>	<b>34</b>
3.1	Twierdzenie o czworościennych odbiciowych parkietażach przestrzeni . . . . .	34
3.2	Od trójkątów sferycznych do czworościanów euklidesowych . . . . .	34
3.3	Weryfikacja kątów dwuściennych potencjalnych czworościanów euklidesowych . . . . .	55
3.4	Konstrukcja potencjalnych klepek czworościennych odbiciowych parkietaży przestrzeni . . . . .	60
3.5	Konstrukcja czworościennych odbiciowych parkietaży przestrzeni . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Literatura</b>	<b>69</b>



## 0 Wprowadzenie

Głównym celem niniejszej pracy jest znalezienie wszystkich odbiciowych parkietaży przestrzeni, których klepkami są czworościany euklidesowe.

W rozdziale pierwszym przedstawiamy podstawowe pojęcia dotyczące parkietaży i parkietaży odbiciowych płaszczyzny, sfery i przestrzeni. Zadaniem pomocniczym przy realizacji celu pracy jest znalezienie wszystkich odbiciowych parkietaży sferycznych, których klepkami są trójkąty. Zadanie to realizujemy w rozdziale drugim.

Główny cel pracy zostanie zrealizowany w kilku etapach w rozdziale trzecim. Najpierw znajdziemy wszystkie potencjalne szóstki kątów dwuściennych w czworościanach, następnie skonstruujemy istniejące czworościany oraz odbiciowe parkietaże przestrzeni, których klepkami będą owe czworościany. Okazuje się, że są tylko cztery czworościany, z których można zbudować odbiciowe parkietaże przestrzeni. Mówi o nich Twierdzenie 3.1. będące głównym rezultatem niniejszej pracy.

Praca została napisana w sposób elementarny, co sprawia, że jest ona dostępna nawet dla zainteresowanych geometrią uczniów liceum. Najbardziej zaawansowane pojęcia, które pojawiły się w tej pracy pewne własności trójkątów sferycznych (Fakt 2.1 i Fakt 2.2) oraz wyznacznikowy warunek na kąty dwuścienne w czworościanie (Lemat 3.8).



# 1 O parkietażach słów kilka

Z całą pewnością z parkietażami zetknął się każdy z nas – mniej lub bardziej świadomie. Parkietaże płaszczyzny można spostrzec na przykład w układach kostek brukowych czy płytek podłogowych. W tej pracy skupimy się na odbiciowych parkietażach sfery i przestrzeni. Żeby móc te zagadnienia w pełni zrozumieć, należy zapoznać się z podstawowymi pojęciami dotyczącymi parkietażu. Ale czym tak naprawdę one są?

## 1.1 Parkietaże

W tym podrozdziale dowiemy się, czym są parkietaże płaszczyzny, sfery i przestrzeni.

### Płaszczyzna

Poniższe definicje dotyczące parkietażu płaszczyzny zostały zaczerpnięte z [1].

**Definicja 1.1.** *Parkietaż płaszczyzny to pokrycie płaszczyzny płytkami (klepkami) ściśle do siebie przylegającymi i niezachodzącymi na siebie.*

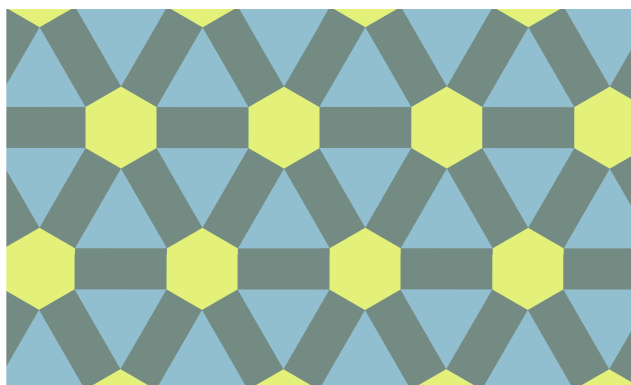
**Definicja 1.2.** *Parkietaż wielokątowy to taki parkietaż, który utworzony jest z płytek wielokątowych, przylegających do siebie ściśle całymi bokami.*

**Definicja 1.3.** *Płytką (klepką) parkietażu to pojedynczy element tworzący parkietaż.*

**Definicja 1.4.** *Przystawanie płytek parkietażu oznacza, że każda płytka w parkietażu jest tej samej wielkości i tego samego kształtu.*

**Definicja 1.5.** *Parkietaż  $n$ -płytkowy to parkietaż, który utworzony jest z  $n$  typów różnych płytek.*

**Definicja 1.6.** *Wierzchołek parkietażu to punkt styku wierzchołków płytek wielokątowych tworzących dany parkietaż.*

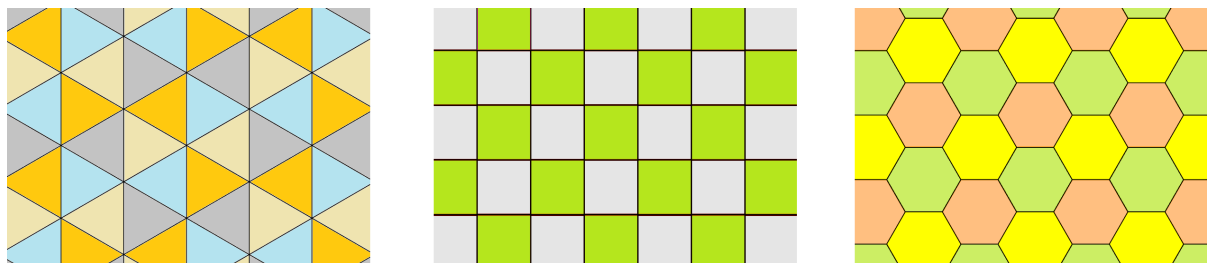


Rysunek 1.1: Wielokątowy trójpłytkowy parkietaż płaszczyzny, którego klepkami są: trójkąt równoboczny, prostokąt i sześciokąt foremny. W każdym z wierzchołków tego parkietażu stykają się: sześciokąt foremny, trójkąt równoboczny i dwa prostokąty.

**Definicja 1.7.** *Parkietaż foremny (platoński) to parkietaż wielokątowy składający się z przystających wielokątów foremnych, których jednakowa liczba schodzi się w każdym wierzchołku parkietażu.*

**Fakt 1.8.** [2] *Istnieją dokładnie trzy parkietaże foremne płaszczyzny. Ich klepkami są: trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny.*

Parkietaże te możemy zobaczyć na rysunku poniżej:



Rysunek 1.2: Parkietaże foremne płaszczyzny.

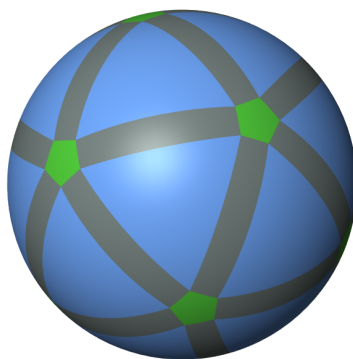
Poznaliśmy już podstawowe pojęcia dotyczące parkietaży płaszczyzny. Pojęcia takie jak klepka czy wierzchołek parkietażu możemy też przenieść na parkietaże sfery i przestrzeni. Najpierw przyjrzymy się parkietażom sfery.

## Sfera

Parkietaż sfery możemy zdefiniować następująco:

**Definicja 1.9.** *Parkietaż sfery to pokrycie sfery płytkami ściśle do siebie przylegającymi i niezachodzącymi na siebie.*

W naszym przypadku płytkami takiego parkietażu będą wielokąty sferyczne. Jeden z takich podziałów sfery możemy zobaczyć na rysunku poniżej:



Rysunek 1.3: Trójpłytkowy wielokątowy parkietaż sferyczny.

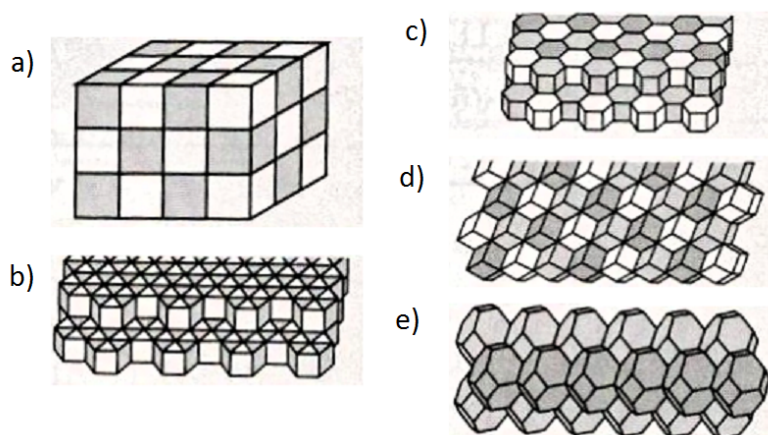
Przypatrzmy się teraz parkietażom przestrzeni.

## Przestrzeń

**Definicja 1.10.** *Parkietaż przestrzeni to pokrycie przestrzeni wielościenneymi płytkami ściśle do siebie przylegającymi i niezachodzącymi na siebie.*



Oczywistym przykładem parkietażu przestrzeni jest parkietaż złożony z sześcianów. Poniżej możemy zobaczyć ten i cztery inne parkietaże przestrzeni, które są zbudowane z jednakowych płytek:



Rysunek 1.4: [2] Parkietaże przestrzeni uzyskane z równoległego przesuwania jednej klepki. Klepkami tymi są: a) sześcian, b) graniastosłup prawidłowy trójkątny, c) graniastosłup prawidłowy sześciokątny, d) dwunastościan rombowy, e) ośmiościan ścięty.

Widzimy, że trzy pierwsze parkietaże z powyższego rysunku są blisko związane z poszczególnymi parkietażami platońskimi płaszczyzny.

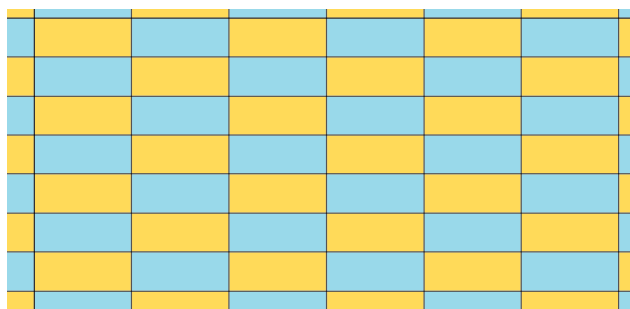
## 1.2 Parkietaże odbiciowe

Parkietaże odbiciowe są szczególnym podzbiorem rodziny parkietaży. To właśnie odbiciowym parkietażom poświęcona jest niniejsza praca. W tym podrozdziale poznamy odbiciowe parkietaże płaszczyzny, sfery i przestrzeni.

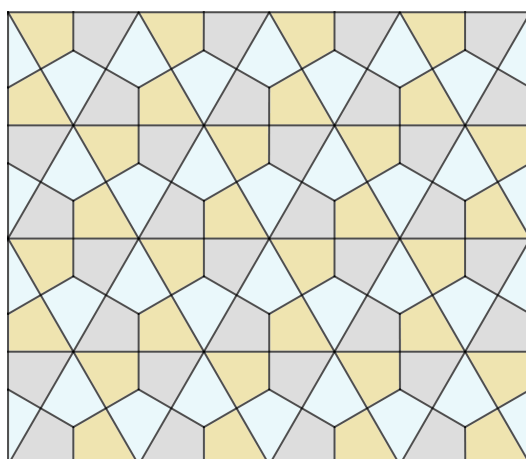
### Płaszczyzna

**Definicja 1.11.** *Parkietaż odbiciowy to parkietaż wielokątny, w którym każde dwie płytki mające wspólny bok są do siebie symetryczne względem prostej zawierającej ten bok.*

Innymi słowy – możemy odbijać jedną płytkę względem prostych przechodzących przez jej boki tak długo, aż zapełnimy tymi klepkami całą płaszczyznę.



Rysunek 1.5: Fragment odbiciowego parkietażu płaszczyzny, którego klepkami są przystające prostokąty.



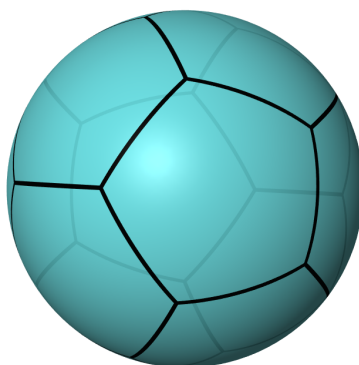
Rysunek 1.6: Fragment odbiciowego parkietażu płaszczyzny, którego klepkami są przystające deltoidy z kątami o mierze  $60^\circ$ ,  $120^\circ$  i dwoma kątami prostymi.

**Obserwacja 1.12.** *Wszystkie płytki parkietażu odbiciowego są przystające.*

**Przykład 1.13.** *Kolejnymi przykładami odbiciowych parkietaży płaszczyzny są parkietaże platońskie.*

## Sfera

**Definicja 1.14.** *Odbiciowy parkietaż sferyczny to parkietaż wielokątowy sfery, w którym każde dwie płytki mające wspólny bok są do siebie symetryczne względem okręgu wielkiego zawierającego ten bok.*



Rysunek 1.7: Odbiciowy parkietaż sfery, którego klepką jest sferyczny pięciokąt foremny.

Odbiciowym parkietażom sferycznym, których klepkami są trójkąty sferyczne, poświęcony jest w całości rozdział drugi.

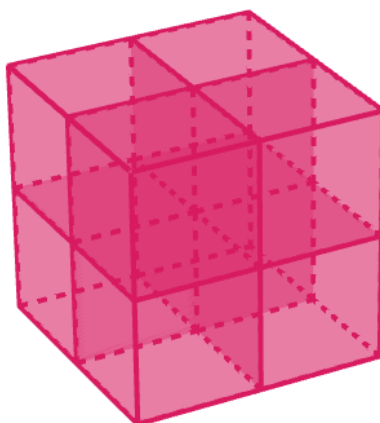
## Przestrzeń

**Definicja 1.15.** *Odbiciowy parkietaż przestrzeni to parkietaż, którego płytkami są wielościany, w których każde dwie płytki mające wspólną ścianę są do siebie symetryczne względem płaszczyzny przechodzącej przez tę ścianę.*

**Fakt 1.16.** *Sześcian jest klepką odbiciowego parkietażu przestrzeni.*

**Dowód:** Aby wyparkietować sześciانami całą przestrzeń, wystarczy odbić sześcian względem płaszczyzn zawierających jego ściany, a następnie doklejać kolejne sześciany tak, by jego ściany pokrywały się z kwadratowymi ścianami poprzednio uzyskanej figury. W jednym narożu tego parkietażu schodzi się osiem sześcianów.

□



Rysunek 1.8: Osiem sześcianów, które schodzą się w narożu sześciennego parkietażu przestrzeni. Parkietaż uzyskany z sześcianów jest parkietażem odbiciowym.

Do odbiciowych parkietaży przestrzeni wrócimy w rozdziale trzecim, gdzie będziemy rozważać odbiciowe parkietaże przestrzeni, których klepkami są czworościany. Znalezienie wszystkich takich parkietaży jest głównym celem niniejszej pracy. Zadaniem pomocniczym do realizacji tego celu będzie znalezienie wszystkich odbiciowych parkietaży sfery, których klepkami są trójkąty. Zadanie to zostanie zrealizowane w rozdziale drugim.

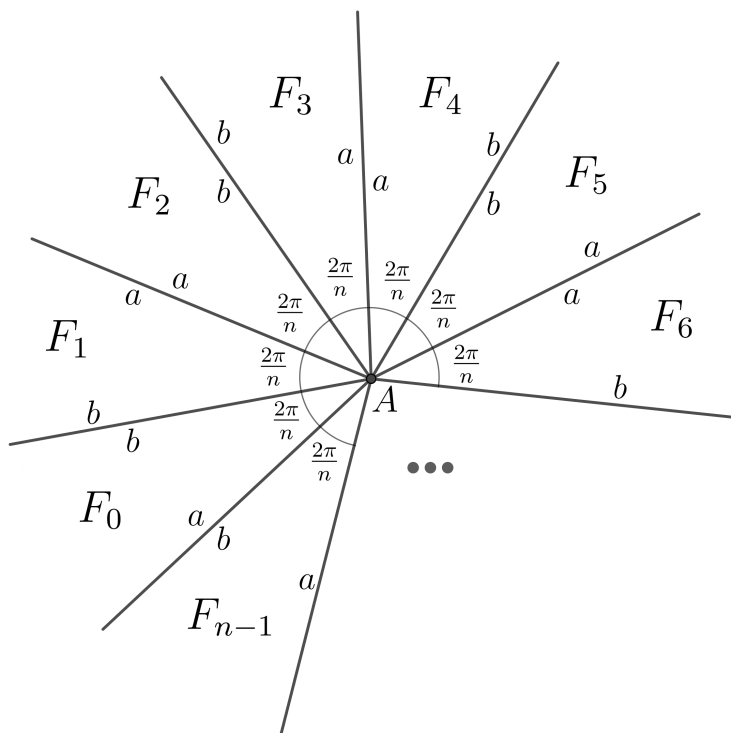
Na zakończenie tego rozdziału przytoczymy pewien przydatny fakt dotyczący trójkątów odbiciowych.

**Fakt 1.17.** *W parkietażu odbiciowym płaszczyzny lub sfery, w którym występuje wierzchołek, wokół którego schodzi się nieparzysta liczba płytek, dwusieczna kąta przy tym wierzchołku jest osią symetrii płytki przylegającej do tego wierzchołka.*

**Dowód:** Ten dowód zostanie przeprowadzony z wykorzystaniem Rysunku 1.9, który znajduje się na następnej stronie.

Niech  $F_0$  będzie płytką odbiciowego parkietażu płaszczyzny lub sfery i niech  $A$  będzie wierzchołkiem parkietażu, w którym schodzi się nieparzyste wiele płytek. Chcemy odbijać figurę  $F_0$  tak długo, aż zapełnimy całe miejsce wokół wierzchołka  $A$ . Miara kąta figury  $F_0$ , który jest przy wierzchołku  $A$ , jest równa  $\frac{2\pi}{n}$ , gdzie  $n$  jest liczbą nieparzystą większą lub równą 3. Długości boków figury  $F_0$ , które stykają się w wierzchołku  $A$ , mają miary  $a$  oraz  $b$ . Po odbiciu figury  $F_0$  względem prostej zawierającej bok długości  $b$ , otrzymaliśmy figurę  $F_1$  przystającą do wyjściowej. Po odbiciu  $F_1$  względem prostej zawierającej bok długości  $a$ , otrzymaliśmy figurę  $F_2$ . Postępując analogicznie jeszcze  $n - 3$  razy, otrzymamy figurę  $F_{n-1}$ . Zgodnie z regułą odbiciowości, boki powstałego wielokąta powinny

stykać się z bokami tej samej długości. Widzimy jednak, że figury  $F_0$  i  $F_{n-1}$  stykają się bokiem długości  $a$  i bokiem długości  $b$ . Aby tak uzyskany parkietaż był odbiciowy, taka sytuacja może mieć miejsce tylko w wypadku, gdy  $a = b$ . Zauważmy też, że figurę  $F_{n-1}$  możemy również otrzymać poprzez odbicie figury  $F_0$  względem prostej zawierającej bok długości  $a$ . Aby tak odbita figura  $F_0$  pokryła się z figurą  $F_{n-1}$ , ta ostatnia musi być osiowo symetryczna względem dwusiecznej kąta  $\frac{2\pi}{n}$  znajdującego się przy wierzchołku  $A$ . To samo dotyczy pozostałych figur  $F_i$ .



Rysunek 1.9

□

## 2 Odbiciowe parkietaże sferyczne

W poprzednim rozdziale przybliżyliśmy podstawowe intuicje oraz definicje związane z parkietażami płaszczyzny oraz sfery. Celem niniejszego rozdziału jest zaś klasyfikacja takich trójkątów sferycznych, którymi można wyparkietować odbiciowo całą sferę.

### 2.1 Odbiciowe trójkąty sferyczne

Aby móc rozważać parkietaże sferyczne, musimy najpierw przytoczyć kilka faktów o trójkątach sferycznych oraz odbiciowych trójkątach sferycznych.

**Fakt 2.1.** [3] *Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie sferycznym jest liczbą z przedziału  $(\pi, 3\pi)$ .*

Te warunki są podyktowane tym, że dla krańcowych wartości przedziału mielibyśmy do czynienia ze zdegenerowanym trójkątem sferycznym. Gdyby suma miar kątów wewnętrznych była równa  $3\pi$ , taki trójkąt byłby wówczas *półsfery*. Natomiast trójkąt sferyczny o mierze kątów wewnętrznych równej  $\pi$  zdegenerowałby się do figury, której pole jest zerowe. Wynika to bezpośrednio ze wzoru na pole powierzchni trójkąta sferycznego:

$$S = \varepsilon R^2,$$

gdzie  $R$  jest promieniem sfery, zaś  $\varepsilon$  jest *nadwyżką sferyczną*, czyli różnicą sumy miar kątów wewnętrznych trójkąta oraz  $\pi$ . W tym wypadku nadwyżka sferyczna jest równa zero, więc trójkąt sferyczny o sumie kątów wewnętrznych równej  $\pi$  nie istnieje.

**Fakt 2.2.** [3] *Jeżeli w dwóch trójkątach sferycznych miary kątów przy odpowiadających sobie wierzchołkach są równe, to odpowiadające sobie boki mają równe długości i trójkąty te są przystające.*

**Uwaga 2.3.** *Powyzsza własność nie zachodzi dla trójkątów na płaszczyźnie.*

**Obserwacja 2.4.** *Aby trójkąt sferyczny był odbiciowy, każdy z jego kątów wewnętrznych musi być postaci  $\alpha = \frac{2\pi}{m_\alpha}$ , gdzie  $m_\alpha$  jest liczbą naturalną większą od dwóch.*

Wynika to z faktu, że wokół wierzchołka parkietażu muszą znajdować się co najmniej trzy trójkątne płytki. Gdyby znajdowały się dwie, mielibyśmy do czynienia z kątem przy wierzchołku równym co najmniej  $\pi$ , co jest niemożliwe. Ponadto, reguła odbiciowości powoduje, że płytki tego wierzchołka przylegają do niego kątami o tej samej mierze.

Z Faktu 2.1. widzimy, że

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Dzięki Obserwacji 2.4. możemy zapisać miary kątów wewnętrznych w następującej postaci:

$$\alpha = \frac{2\pi}{m_\alpha}, \quad \beta = \frac{2\pi}{m_\beta}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{m_\gamma},$$

co prowadzi nas do nierówności opisującej miary kątów wewnętrznych odbiciowych trójkątów sferycznych:

$$\pi < \frac{2\pi}{m_\alpha} + \frac{2\pi}{m_\beta} + \frac{2\pi}{m_\gamma} < 3\pi.$$

Skracając obie nierówności przez  $\pi$  otrzymujemy nierówność, która będzie narzędziem do dokonania klasyfikacji odbiciowych trójkątów sferycznych:

$$1 < \frac{2}{m_\alpha} + \frac{2}{m_\beta} + \frac{2}{m_\gamma} < 3 \quad (2.1)$$

**Obserwacja 2.5.** *Zgodnie z Faktem 1.17. dla odbiciowego trójkąta sferycznego w przypadku, gdy pewne  $m_i$  jest liczbą nieparzystą, dwusieczna wspomnianego kąta jest osią symetrii tego trójkąta. To oznacza, że dwa pozostałe kąty mają takie same miary.*

## 2.2 Pokrycia sfery przystającymi trójkątami – obliczenia

Teraz, korzystając z przytoczonych informacji oraz wyznaczonej wyżej nierówności (2.1), chcemy dokonać klasyfikacji wszystkich trójkątów sferycznych, którymi można odbiciowo wyparkietować całą sferę.

Po uwzględnieniu Obserwacji 2.5. mamy pięć przypadków w zależności od parzystości liczb  $m_i$ :

- i)  $m_\alpha = m_\beta = m_\gamma$ , wszystkie parzyste,
- ii)  $m_\alpha = m_\beta = m_\gamma$ , wszystkie nieparzyste,
- iii)  $m_\alpha$  nieparzyste,  $m_\beta = m_\gamma$  – parzyste,
- iv)  $m_\alpha = m_\beta$  oraz  $m_\gamma \neq (m_\alpha = m_\beta)$ , wszystkie parzyste,
- v)  $m_\alpha, m_\beta, m_\gamma$ , parami różne, wszystkie parzyste.

*Ad i)* W tym wypadku  $m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = 2k$ ,  $k > 1$ . Korzystając z nierówności (2.1) wiemy, że

$$1 < \frac{2}{m_\alpha} + \frac{2}{m_\beta} + \frac{2}{m_\gamma} < 3$$

$$1 < \frac{2}{2k} + \frac{2}{2k} + \frac{2}{2k} < 3$$

$$1 < \frac{3}{k} < 3$$

Po podzieleniu powyższych nierówności stronami przez 3 otrzymujemy

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{k} < 1$$

i natychmiast widzimy, że nierówności te spełnia jedynie  $k = 2$ . Wobec tego  $2k = 4$  oraz  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ . W ten sposób znaleźliśmy pierwszy trójkąt, który jest kandydatem na płytkę odbiciowego parkietażu sfery. Trójkąt ten możemy opisać trójką  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma) = (4, 4, 4)$ .

Ad ii) Tutaj  $m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}_+$ . Ponownie widzimy, że

$$1 < \frac{2}{m_\alpha} + \frac{2}{m_\beta} + \frac{2}{m_\gamma} < 3,$$

$$1 < \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+1} < 3.$$

Po obustronnym podzieleniu tych nierówności przez 6 mamy

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2}$$

oraz widzimy, że  $2k + 1$  może przyjąć wartość 3, 4 lub 5. Pozostaje nam jednak 3 lub 5, ponieważ szukamy liczby nieparzystej. Wobec tego udało nam się znaleźć kolejne dwa równoboczne trójkąty sferyczne, które są możliwymi płytkami, którymi można odbiciowo wyparkietować sferę: jeden o wszystkich kątach równych  $\frac{2\pi}{3}$ , a drugi o wszystkich kątach równych  $\frac{2\pi}{5}$ . Tym dwóm trójkątom odpowiadają trójki  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma) = (3, 3, 3)$  oraz  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma) = (5, 5, 5)$ .

Ad iii) W tym przypadku  $m_\alpha$  nieparzyste oraz  $m_\beta = m_\gamma$  – parzyste. Możemy zapisać, że  $m_\alpha = 2k + 1$ ,  $k \geq 1$  oraz  $m_\beta = m_\gamma = 2l$ ,  $l > 1$ . Wtedy nierówność (2.1) wygląda następująco:

$$1 < \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2l} + \frac{2}{2l} < 3,$$

a po podzieleniu nierówności przez 2 otrzymujemy

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{l} < \frac{3}{2}.$$

Widzimy, że mamy do rozważenia kilka przypadków w zależności od wartości  $k$  oraz  $l$ .

a) Niech  $k = 1$ . Wtedy

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{l} < \frac{3}{2},$$

a więc

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{l} < \frac{7}{6}.$$

Z tego wynika, że  $l \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Zatem możliwe trójki liczb  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$  to  $(3, 4, 4)$ ,  $(3, 6, 6)$ ,  $(3, 8, 8)$ ,  $(3, 10, 10)$ .

b) Niech  $k = 2$ . Wtedy

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{5} + \frac{1}{l} < \frac{3}{2},$$

a więc

$$\frac{3}{10} < \frac{1}{l} < \frac{13}{10}.$$

Wiemy, że  $\frac{1}{l} > \frac{3}{10}$ , zatem mamy tylko dwie możliwości:  $l = 2$  lub  $l = 3$ . Tym samym znaleźliśmy kolejne dwa potencjalne trójkąty odbiciowe – jeden o kątach  $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}$ , a drugi o kątach  $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ . Tym trójkątom odpowiadają trójki  $(5, 4, 4)$  oraz  $(5, 6, 6)$ .

c) Zobaczymy, jak będzie wyglądała nierówność (2.1) dla  $k \geq 3$ .

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{l} < \frac{3}{2}$$

Na początek niech  $k = 3$ . Zatem

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{7} + \frac{1}{l} < \frac{3}{2},$$

a po odjęciu  $\frac{1}{7}$  stronami dostajemy

$$\frac{5}{14} < \frac{1}{l} < \frac{19}{14}.$$

Widzimy stąd, że  $l \leq \frac{14}{5}$  oraz  $l \geq \frac{14}{19}$ . Jediną liczbą spełniającą zarówno założenia, jak i owe nierówności, jest  $l = 2$ , więc kolejny potencjalny odbiciowy trójkąt sferyczny będzie miał kąty równe  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{7}$ , a odpowiadać mu będzie trójka  $(4, 4, 7)$ .

Rozważmy następnie  $k > 3$ . Po wykonaniu uproszczeń nierówność (2.1) ma następującą postać:

$$\frac{2k-1}{4k+2} < \frac{1}{l} < \frac{6k+1}{4k+2}.$$

Zauważmy, że

$$l < \frac{4k+2}{2k-1} = 2 + \frac{4}{2k-1} < 2 + \frac{4}{5}$$

ze względu na to, że  $k > 3$  oraz

$$l > \frac{4k+2}{6k+1} = 1 - \frac{2k-1}{6k+1},$$

widzimy, że jedynym  $l$  spełniającym założenia oraz powyższe nierówności, jest  $l = 2$ . Zatem udało nam się odkryć nieskończoną serię kandydatów na trójkąty odbiciowe, których kąty wewnętrzne byłyby równe  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{2k+1}$ , a odpowiadałyby im trójka  $(4, 4, 2k+1)$  dla  $k > 3$ .

*Ad iv)*  $m_\alpha = m_\beta$  oraz  $m_\gamma \neq (m_\alpha = m_\beta)$ , wszystkie parzyste.

Dla  $k \neq l$  oraz  $k, l > 1$  można zapisać, że  $m_\alpha = m_\beta = 2k$  oraz  $m_\gamma = 2l$ .

Wtedy nierówność (2.1) ma taką postać:

$$1 < \frac{2}{2k} + \frac{2}{2k} + \frac{2}{2l} < 3,$$

co po dokonaniu uproszczeń i odjęciu stronami  $\frac{1}{l}$  daje nam

$$\frac{l-1}{l} < \frac{2}{k} < \frac{3l-1}{l}.$$

W tym przypadku będziemy dobierać  $k$  dla uprzednio dobranego  $l$ .



a) Niech  $l = 2$ . Wtedy

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{k} < \frac{5}{2}.$$

Natychmiast zauważamy, że  $k \in \{2, 3\}$ , ale bierzemy tylko  $k = 3$ , ponieważ  $2k \neq 2l$ . W ten sposób znaleźliśmy trójkę  $(4, 6, 6)$ , której odpowiada kandydat na trójkąt sferyczny o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ .

b) Niech  $l \geq 3$ . Wtedy nasza *nierówność-klucz* ma następującą postać:

$$\frac{l-1}{l} < \frac{2}{k} < \frac{3l-1}{l}.$$

Po wymnożeniu tej nierówności widzimy, że

$$\frac{2l}{3l-1} < k < \frac{2l}{l-1}.$$

Dla  $l = 3$  mamy

$$\frac{3}{4} < k < 3.$$

Widzimy, że jedynym  $k$  spełniającym podany warunek jest  $k = 2$ , ponieważ  $k = 1$  zostało wykluczone przy formułowaniu założeń do tego podpunktu. Tym samym odkryliśmy kolejnego kandydata na odbiciowy trójkąt sferyczny – trójkąt o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}$ , któremu odpowiada trójka  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma) = (4, 4, 6)$ .

c) Rozważmy teraz  $l > 3$ . Z nierówności

$$\frac{2l}{3l-1} < k < \frac{2l}{l-1}$$

wnioskujemy, że podobnie jak wyżej, jedynym pasującym  $k$  jest  $k = 2$ . W ten sposób poznaliśmy drugą możliwą nieskończoną serię kandydatów na odbiciowe trójkąty sferyczne o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{2l}$ , którą można opisać trójką  $(4, 4, 2l)$  dla  $l > 3$ .

*Ad v)* W ostatnim przypadku  $m_\alpha, m_\beta, m_\gamma$  są parami różne, wszystkie parzyste. Niech  $m_\alpha = 2k, m_\beta = 2l, m_\gamma = 2m$ , przy czym  $1 < k < l < m$ . Nasza nierówność ma wówczas taką postać:

$$1 < \frac{2}{2k} + \frac{2}{2l} + \frac{2}{2m} < 3,$$

czyli po uproszczeniach

$$1 < \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 3.$$

Zauważmy, że  $\frac{1}{k}$  jest największe dla  $k = 2$ . Następnie  $l$  może mieć wartość 3, zaś  $m$  – wartość 4. Sprawdźmy, czy powyższa nierówność jest prawdziwa dla tak dobranych parametrów:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} \in (1, 3),$$

czyli udało nam się znaleźć kolejną potencjalną trójkę kątów –  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{8}$ , której odpowiada trójka  $(4, 6, 8)$ .

Zobaczmy, co się stanie, gdy  $m = 5$ .

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15+10+6}{30} = \frac{31}{30} \in (1, 3),$$

więc mamy następną potencjalną trójkę  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma) = (4, 6, 10)$ , której odpowiada kandydat na odbiciowy trójkąt sferyczny o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{10}$ . Zauważmy jednak, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{15 + 10 + 5}{30} = 1$$

oraz

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10 + 5 + 4}{20} = \frac{19}{20} < 1,$$

więc widzimy, że w tym przypadku możemy uzyskać tylko te dwie potencjalne trójki – gdybyśmy jeszcze zwiększyli którąś z wartości  $k, l, m$ , otrzymalibyśmy liczbę tym bardziej mniejszą lub równą jedności, a więc nierówność (2.1) nie byłaby dla nich spełniona.

Po wyznaczeniu wszystkich potencjalnych odbiciowych trójkątów sferycznych, możemy dokonać próby ich skatalogowania.

### 2.3 Konstrukcja odbiciowych parkietaży sferycznych

Zbierzmy wszystkie potencjalne trójki kątów odbiciowych trójkątów sferycznych, które zostały odkryte w powyższych pięciu krokach. Dla przejrzystości zostaną one uporządkowane leksykograficznie względem odpowiadających im trójek  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$ , które wcześniej zostały uporządkowane w sposób niemalejący.

- |   |  |
|---|--|
| a) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$           | g) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$  |
| b) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}$           | h) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{8}$  |
| c) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$           | i) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{10}$ |
| d) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}$           | j) $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$  |
| e) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{10}, \frac{2\pi}{10}$         | k) $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$  |
| f) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{n}, n \geq 4$ |  |

Jak możemy zweryfikować, czy odbiciowe parkietaże na sferze o takich trójkątach naprawdę istnieją? Możemy spróbować je skonstruować na dwa sposoby:

- przy pomocy południków i równoleżników na sferze,
- korzystając z wielościanów platońskich.

#### O południkach i równoleżnikach

Rozważmy sferę, w której mamy równik i dwa bieguny – północny i południowy. *Równik* jest tym okręgiem wielkim sfery, który leży na płaszczyźnie prostopadłej do jej osi obrotu. *Biegunami* nazywamy punkty, które są punktami wspólnymi sfery i jej osi obrotu.

Następnie wyobraźmy sobie trójkąt równoboczny wpisany w równik. Wierzchołki tego trójkąta wyznaczają podział okręgu wielkiego na trzy równe części. Gdy połączymy każdy wierzchołek trójkąta z każdym z dwóch biegunów – północnym i południowym, otrzymamy trzy *południki* będące połówkami okręgów wielkich sfery. W ten sposób uzyskaliśmy podział sfery na sześć trójkątów.

**Obserwacja 2.6.** *Trójkąty wyznaczone w ten sposób na sferze są przystające.*

**Dowód:** Zauważmy, że każdy z tych trójkątów ma wierzchołek, który jest biegunem sfery. Miara kąta przy tym wierzchołku wynosi  $\frac{2\pi}{3}$ , ponieważ zbiegają się tam trzy południki, które są od siebie odległe o trzecią część długości okręgu wielkiego sfery. Pozostałe dwa wierzchołki tych trójkątów należą do równika. Ponieważ punkty wyznaczone przez trójkąt równoboczny na równiku pozostają w tej samej odległości od siebie, kąty wyznaczone przez równik i południki są przystające. Każdy z tych trójkątów ma więc dwa kąty o mierze  $\frac{2\pi}{4}$  oraz jeden o mierze  $\frac{2\pi}{3}$ . Zgodnie z Faktem 2.2 trójkąty sferyczne o takich samych kątach są przystające. □

Zobaczmy, że uzyskany w ten sposób układ trójkątów to odbiciowy parkietaż sferyczny.

Rozważmy pojedynczy trójkąt sferyczny o kątach  $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}$ . Odbijając go najpierw względem okręgu wielkiego zawierającego jego lewy bok, a następnie względem okręgu wielkiego zawierającego jego prawy bok, zapełnimy półsferę trójkątami. Teraz możemy odbić tę półsferę względem płaszczyzny przechodzącej przez równik i uzyskać całą sferę pokrytą przystającymi trójkątami. Otrzymaliśmy w ten sposób odbiciowy parkietaż sferyczny.

Poniższe twierdzenie pokaże nam, że niezależnie od tego, który wielokąt foremny wpisaliśmy w równik, uzyskamy odbiciowy parkietaż sferyczny.

**Twierdzenie 2.7 (O konstrukcji odbiciowych parkietaży sferycznych za pomocą równika i południków).** *Podział sfery uzyskany przez poprowadzenie południków przechodzących przez wierzchołki  $n$ -kąta foremnego wpisanego w równik jest odbiciowym parkietażem sferycznym.*

**Dowód:** Rozważmy podział sfery na  $2n$  trójkątów powstały poprzez poprowadzenie południków przez punkty wyznaczone przez  $n$ -kąta foremnego wpisanego w równik. Każdy z tych trójkątów ma jeden wierzchołek będący biegunem sfery. Kąt przy tym wierzchołku ma miarę  $\frac{2\pi}{n}$ , ponieważ w tym miejscu zbiega się  $n$  południków, a każde dwa sąsiednie południki pozostają w równej odległości od siebie.

Zwróćmy uwagę na to, że kąty przy wierzchołkach niebędących biegunami mają miarę  $\frac{2\pi}{4}$ , ponieważ równik przecina się z południkiem pod kątem prostym. Widzimy też, że wszystkie trójkąty tego podziału mają takie same kąty: dwa kąty proste oraz jeden kąt o mierze  $\frac{2\pi}{n}$ . Zatem, na mocy Faktu 2.2, trójkąty w takim podziale są przystające.

Rozważmy teraz pojedynczą płytkę takiego parkietażu. Skoro jej kąt przy biegunie ma miarę  $\frac{2\pi}{n}$ , to oznacza, że odbijając ją względem okręgu wielkiego zawierającego jej lewy bok, następnie odbijając nową płytkę względem okręgu wielkiego zawierającego jej lewy bok i tak dalej, uda nam się ściśle zapełnić powierzchnię wokół bieguna. Aby tego dokonać, potrzeba  $n - 1$  odbić.

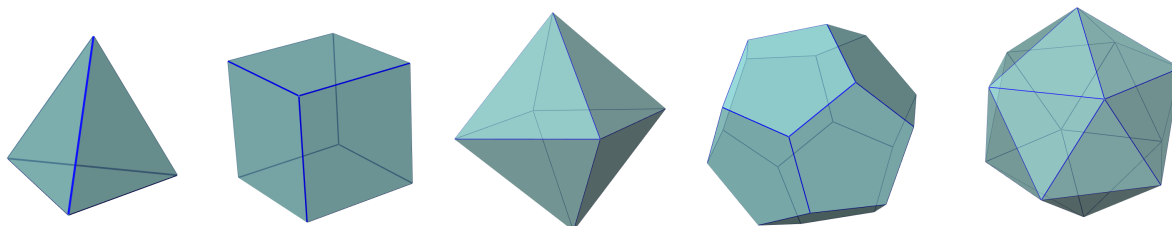
W ten sposób ściśle zapełniliśmy jedną półsferę. Żeby otrzymać odbiciowy parkietaż sferyczny z wykorzystaniem trójkąta o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{n}$ , należy jedynie dokonać lustrzanego odbicia półsfery względem płaszczyzny przechodzącej przez równik. □

Widzimy, że w stosunkowo prosty sposób możemy otrzymać odbiciowy parkietaż sferyczny dla trójkątów o kątach postaci  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{n}$  dla  $n \geq 3$ , czyli dla trójkątów znajdujących się na pozycjach b) oraz f) z listy potencjalnych trójkątów odbiciowych znajdującej się na początku tego podrozdziału. W kolejnej części rozumowania zobaczymy, na czym polega konstrukcja odbiciowych parkietaży sferycznych za pomocą brył platońskich.

## O bryłach platońskich

Przypomnijmy, że istnieje pięć brył platońskich czyli takich, których ścianami są przystające wielokąty foremne tego samego rodzaju i których wszystkie naroża są jednakowymi kątami bryłowymi. Są to:

- czworościan foremny,
- sześciian,
- ośmiościan foremny,
- dwunastościan foremny,
- dwudziestościan foremny.



Rysunek 2.1: Bryły platońskie

Trzy z nich składają się z trójkątów równobocznych (czworościan, ośmiościan, dwudziestościan), jedna z kwadratów (sześciian) oraz jedna z pięciokątów foremnych (dwunastościan). W dalszej części rozumowania przydadzą się nam dwa spostrzeżenia dotyczące brył foremnych:

**Spostrzeżenie 2.8.** *Na każdej z brył platońskich da się opisać sferę.*

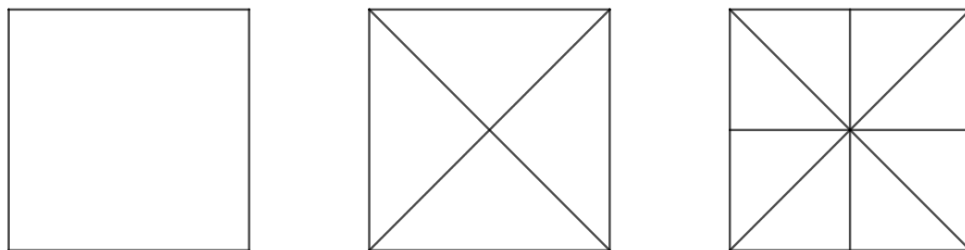
**Spostrzeżenie 2.9.** *W każdym z naroży bryły platońskiej styka się tyle samo ścian oraz tyle samo krawędzi.*

Naszym zadaniem jest skonstruowanie odbiciowych parkietaży sferycznych korzystając z brył platońskich. Będziemy do tego potrzebować pewnego przekształcenia.

**Definicja 2.10.** *Rzutem odśrodkowym bryły na sferę opisaną na tej bryle nazywamy przekształcenie polegające na „wypchnięciu” od środka bryły jej ścian na powierzchnię tej sfery. Dokładniej, dla każdego punktu  $X$  na brzegu bryły, jego obrazem jest taki punkt  $X'$  na sferze opisanaj, który leży na przecięciu tej sfery z półprostą  $OX$ , gdzie  $O$  jest wspólnym środkiem bryły i sfery na niej opisanaj. Produktem tego przekształcenia jest sfera opisanaj na bryle, która jest podzielona na kawałki odpowiadające poszczególnym ścianom bryły.*

Chcemy uzyskać odbiciowy parkietaż sferyczny (czyli sferę podzieloną na pewną liczbę przystających trójkątów) korzystając z opisanego powyżej przekształcenia. Spróbujemy to zrobić na trzy sposoby w zależności od podziału ścian brył platońskich na mniejsze trójkąty:

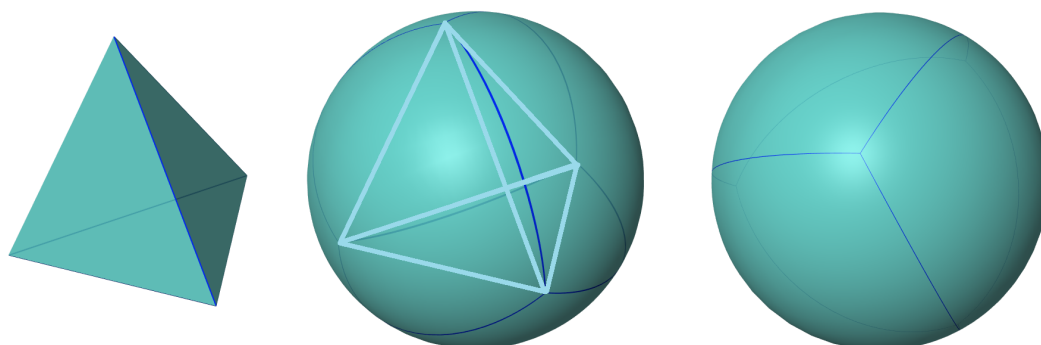
- *Bez podziału* – rzutujemy odśrodkowo bryły platońskie, które mają trójkątne ściany,
- *Podział I typu* – dzielimy ściany brył platońskich na trójkąty od środka ścian do ich wierzchołków, a następnie je rzutujemy odśrodkowo,
- *Podział II typu* – dzielimy ściany brył platońskich tak jak w I podziale, a następnie od środka ściany do środków boków ścian i tak podzieloną bryłę przekształcamy.



Rysunek 2.2: Kwadrat bez podziału, z podziałem I typu oraz z podziałem II typu

Spróbujmy więc przyjrzeć się bliżej bryłom foremny o trójkątnych ścianach (czworościanowi, ośmiościanowi i dwudziestościanowi) oraz sferom na nich opisanym.

Rozważmy najpierw **czworościan foremny** wpisany w sferę. Chcemy zobaczyć, jaki ślad pozostawią jego krawędzie na sferze. W tym celu dokonamy rzutu odśrodkowego jego ścian na sferę.

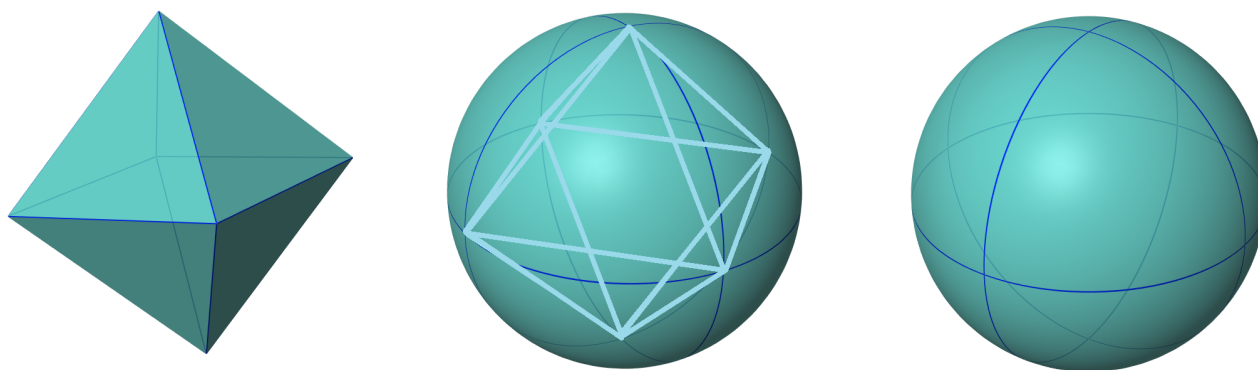


Rysunek 2.3: Czworościan foremny – bryła, szkielet bryły wpisany w sferę, ślad, jaki zakreśliły krawędzie bryły na sferze

Skoro ściany czworościanu foremnego to cztery przystające trójkąty równoboczne, to spodziewamy się, że części otrzymane po odśrodkowym zrzutowaniu tych ścian na sferę są

przystającymi równobocznymi trójkątami sferycznymi. Istotnie, korzystając ze Spostrzeżenia 2.8 widzimy, że uzyskane w ten sposób trójkąty są równoboczne – miara ich kątów wewnętrznych to  $\frac{2\pi}{3}$ , ponieważ, zgodnie ze Spostrzeżeniem 2.9, w każdym z czterech przystających naroży czworościanu spotykają się trzy ściany oddzielone trzema krawędziami. Uzyskaliśmy więc podział sfery na cztery przystające trójkąty równoboczne, zatem jest to parkietaż sferyczny oparty na trójkącie równobocznym o kącie  $\frac{2\pi}{3}$  z pozycji a) z listy na początku tego podrozdziału. Nietrudno zauważyć, że dowolne dwie sąsiadujące płytki stykające się wspólnym bokiem są do siebie symetryczne względem okręgu wielkiego przechodzącego przez ten bok. Z tego wynika, że uzyskany parkietaż jest odbiciowy.

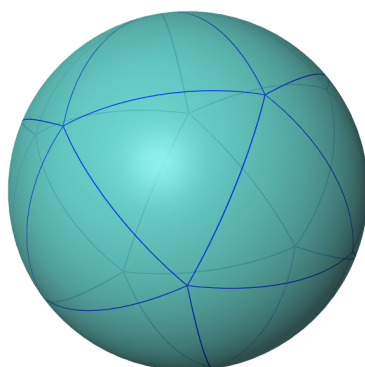
Bardzo podobnie wygląda rzutowanie odśrodkowe **ośmiościanu foremego**. Zauważmy, że w każdym z naroży tej bryły spotykają się cztery ściany, które są oddzielone od siebie czterema krawędziami. Po wykonaniu rzutu odśrodkowego ścian bryły na sferę na niej opisaną widzimy, że otrzymujemy osiem trójkątów równobocznych. Każdy z nich ma trzy kąty proste, bowiem obszar wokół każdego z sześciu przystających wierzchołków na sferze jest podzielony na cztery równe części. Skonstruowaliśmy w ten sposób odbiciowy parkietaż sferyczny, którego płytkami są trójkąty równoboczne o prostym kącie wewnętrznym. Taki trójkąt znajduje się na pozycji f) na liście z początku tego podrozdziału dla  $n = 4$ .



Rysunek 2.4: Ośmiościan foremny: bryła, szkielet bryły wpisany w sferę oraz odbiciowy parkietaż sferyczny dla trójkąta o trzech kątach prostych

**Uwaga 2.11.** *Taki sam parkietaż sfery można również uzyskać stosując metodę równikowo-południkową. Wystarczy poprowadzić południki przez wierzchołki kwadratu wyznaczone na równiku.*

Zobaczmy, jaki parkietaż sferyczny uzyskamy po zrzutowaniu odśrodkowym ścian **dwudziestościanu foremego** na opisaną nań sferę. Zgodnie ze Spostrzeżeniem 2.9 wszystkie naroża dwudziestościanu foremego są jednakowe. W każdym z takich naroży styka się pięć ścian i pięć krawędzi. Po zrzutowaniu ich odśrodkowo na sferę widzimy, że otrzymaliśmy podział sfery na dwadzieścia przystających trójkątów równobocznych. Wokół każdego z wierzchołków uzyskanego podziału styka się pięć ścian, więc miara kąta wewnętrznego trójkąta równobocznego na sferze jest równa  $\frac{2\pi}{5}$ . Jest to trójkąt z pozycji j) z listy znajdującej się na początku tego podrozdziału.



Rysunek 2.5: Odbiciowy parkietaż sferyczny otrzymany z odśrodkowego zrzutowania dwudziestościanu foremego na sferę na nim opisaną.

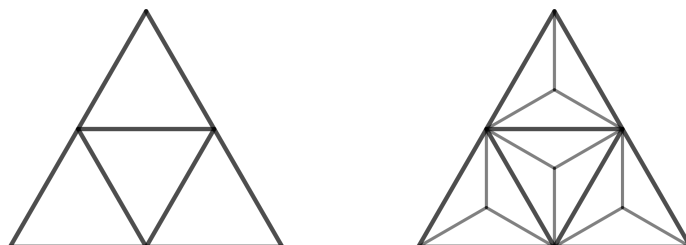
W tej części rozumowania znaleźliśmy trzy odbiciowe parkietaże sferyczne dla brył platońskich o trójkątnych ścianach. Spróbujmy teraz dokonać podziału ścian brył foremnych według pierwszego sposobu, a następnie dokonajmy rzutu odśrodkowego tak podzielonych brył na sfery na nich opisane.

**Obserwacja 2.12.** *Trójkąty powstałe przy podziale brył platońskich podziałem I typu są równoramienne.*

**Uzasadnienie:** W wielokącie foremnym odcinek łączący wierzchołek wielokąta z jego środkiem jest dwusieczną kąta wewnętrznego wielokąta znajdującego się przy tym wierzchołku. W trójkącie powstałym z podziału bryły platońskiej podziałem I typu kąt przy wierzchołku niebędącym środkiem ściany bryły jest połową kąta wewnętrznego wspomnianej ściany. Z tego wynika, że taki trójkąt uzyskany po podziale I typu ma dwa jednakowe kąty i dlatego jest równoramienny.

#### a) czworościan foremny

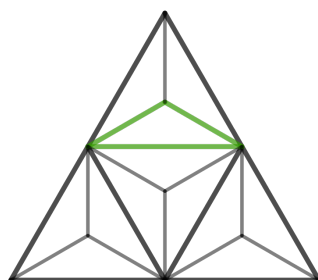
Poniżej znajdują się dwie siatki czworościanu foremnego. Pierwsza jest zwykłą siatką, a druga jest podzielona na przystające trójkąty odcinkami biegnącymi od środków ścian do ich wierzchołków.



Rysunek 2.6: Po lewej – zwykła siatka czworościanu foremnego, po prawej – po dokonaniu podziału I typu.

Po złożeniu takiej siatki i zrzutowaniu odśrodkowo bryły na sferę na niej opisaną otrzymujemy pokrycie sfery przystającymi trójkątami. Zauważmy, że każde dwa przylegające

do siebie kąty są jednakowe, zatem są one do siebie symetryczne względem fragmentu okręgu wielkiego, który je oddziela. Z tego wynika, że każde dwie sąsiadujące płytki, czyli takie, które mają wspólny bok, są do siebie symetryczne względem tego boku. Jest to warunek odbiciowości, a więc otrzymany przez nas parkietaż jest odbiciowy. Jakiemu trójkątowi on odpowiada? Aby się tego dowiedzieć, należy wybrać dowolną płytkę i zobaczyć, ile płytek schodzi się w jej wierzchołkach.

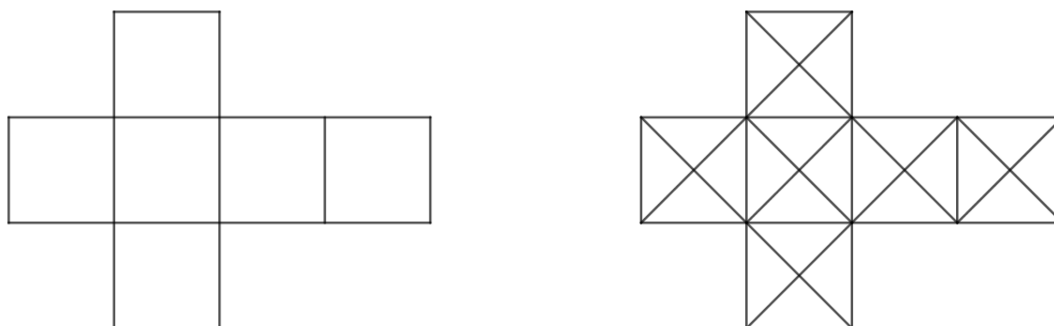


Rysunek 2.7: Siatka czworościanu z zaznaczoną płytką

Na rysunku powyżej widzimy, że w górnym wierzchołku płytki schodzą się *trzy* klepki, bo ściana czworościanu foremnego została podzielona na trzy przystające trójkąty. Z kolei w prawym wierzchołku styka się *sześć* płytek (w narożu czworościanu foremnego stykają się trzy ściany, a w każdej z nich obszar przy wierzchołku został podzielony na dwie części). Tyle samo, czyli *sześć* płytek styka się w lewym wierzchołku ze względu na to, że ściany czworościanu zostały podzielone na trójkąty równoramienne. Otrzymany parkietaż odpowiada więc trójkątowi o kątach  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{2\pi}{6}$ ,  $\frac{2\pi}{6}$ , a więc trójkątowi z pozycji c) z listy na początku tego podrozdziału.

### b) sześcián

Podzielmy teraz sześcián według podziału I typu. Zostało to wykonane na rysunku poniżej. Po lewej stronie znajduje się zwykła siatka sześciánu, a po prawej – ta sama siatka z podziałem I typu.

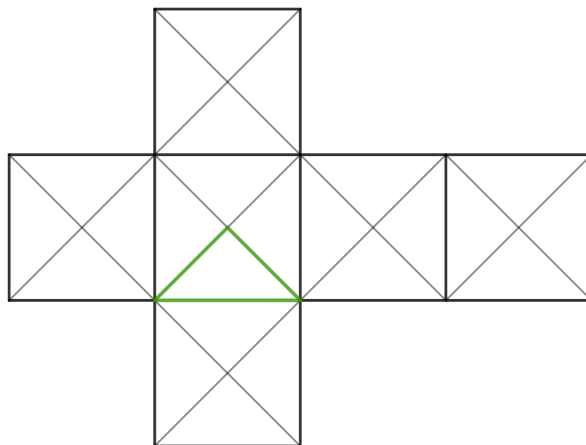


Rysunek 2.8: Siatka sześciánu ze ścianami bez podziału oraz ze ścianami z podziałem I typu.

Aby dowiedzieć się, jakiemu trójkątowi sferycznemu odpowiada taki parkietaż, należy policzyć, ile płytek schodzi się w poszczególnych wierzchołkach małej trójkątnej płytki.

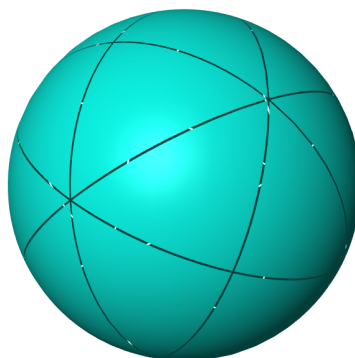


Możemy to zrobić przed zrzutowaniem bryły na sferę, bowiem siatka została podzielona na przystające trójkąty, a po rzutowaniu otrzymamy podział sfery na trójkąty odpowiadające trójkątom na sześcianie.



Rysunek 2.9: Siatka sześcianu z zaznaczoną płytką

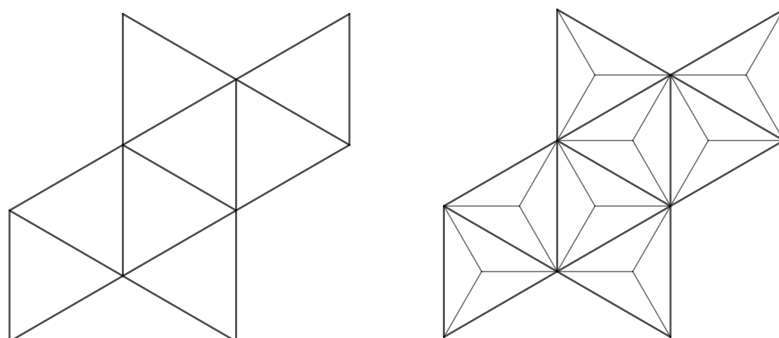
Widzimy, że w górnym wierzchołku zaznaczonej płytki stykają się cztery trójkąty. Z kolei w prawym wierzchołku schodzi się sześć płytek – po dwie na każdą z trzech schodzących się w narożu ścian bryły. Trójkąty z tego podziału są równoramienne, więc w lewym wierzchołku także spotyka się sześć płytek. Zatem, po złożeniu siatki i odśrodkowym zrzutowaniu jej na sferę, otrzymaliśmy parkietaż sferyczny, którego płytkami są trójkąty o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ . Jest to pozycja g) z listy kandydatów na odbiciowe trójkąty sferyczne. Uzyskany parkietaż jest odbiciowy ponieważ, podobnie jak poprzednio, każde dwie sąsiednie płytki mające wspólny bok są do siebie symetryczne względem tego boku.



Rysunek 2.10: Podział sfery na trójkąty o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$

### c) ośmiościan foremny

Spróbujmy dokonać podziału trójkątnych ścian ośmiościanu foremnego korzystając z podziału I typu. Poniżej znajduje się siatka ośmiościanu foremnego ilustrująca ten podział.

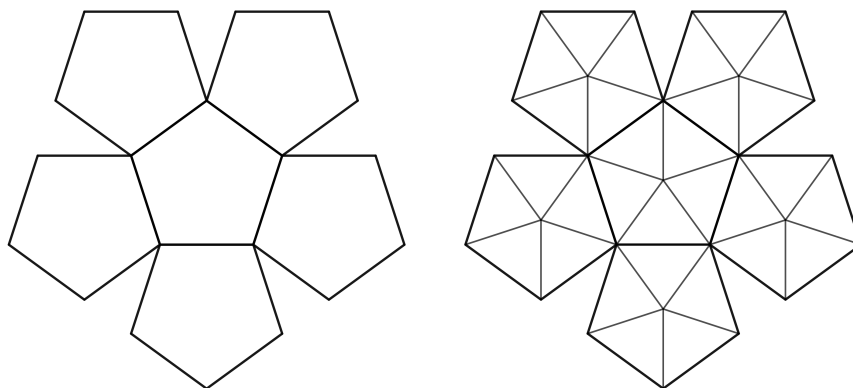


Rysunek 2.11: Siatka ośmiościanu foremnego bez podziału oraz z podziałem I typu

Spójrzmy na mały trójkąt podzielonej siatki. Wokół wierzchołka będącego środkiem ściany ośmiościanu foremnego schodzą się trzy trójkątne płytki. Z kolei wokół każdego z pozostałych wierzchołków schodzi się osiem płytek – po dwie na każdą z czterech ścian ośmiościanu stykających się w tym wierzchołku. Widzimy więc, że po zrzutowaniu ośmiościanu foremnego na sferę otrzymamy parkietaż złożony z trójkątów o kątach wewnętrznych  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\frac{2\pi}{8}$ ,  $\frac{2\pi}{8}$ , który znajduje się na pozycji d) na liście z początku podrozdziału. Nie trudno zauważyć, że – podobnie jak w poprzednich przypadkach – otrzymany parkietaż jest odbiciowy.

#### d) dwunastościan foremny

Zobaczmy, jaki parkietaż otrzymamy po podzieleniu ścian dwunastościanu foremnego według podziału I typu. Na rysunku poniżej znajdują się dwie połowy siatek dwunastościanu foremnego. Pierwsza z nich jest zwykłą siatką, a druga - siatką podzieloną podziałem I typu.



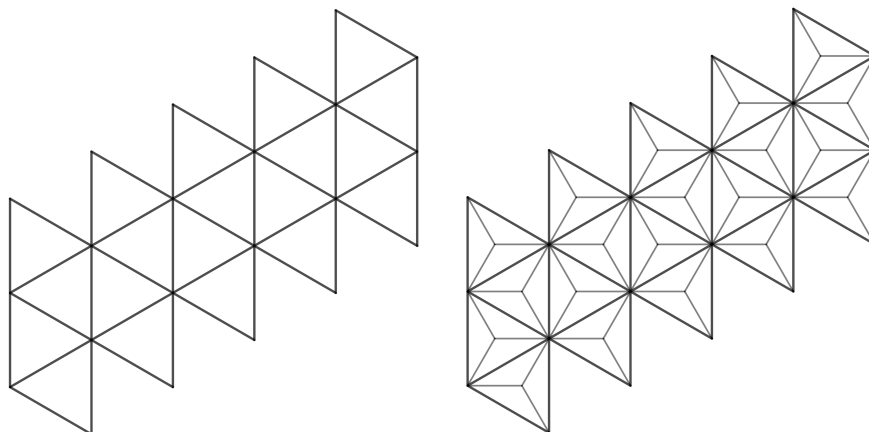
Rysunek 2.12: Dwie połówki siatek dwunastościanu foremnego

Weźmy dowolny mały trójkąt ze środkowego pięciokąta. Jeden z jego wierzchołków jest środkiem pięciokąta. Wokół tego wierzchołka styka się pięć takich trójkątów. Popatrzmy teraz na pozostałe dwa wierzchołki małego trójkąta. Wokół każdego z nich schodzi się sześć małych trójkątów – po dwa na każdą z trzech ścian znajdujących się w pobliżu małego trójkąta. Widzimy więc, że tak samo będzie dla każdego innego małego trójkąta, bo wszystkie naroża w bryle platońskiej są jednakowe. Wobec tego, po zrzutowaniu tej

bryły na sferę otrzymamy  $12 \cdot 5 = 60$  przystających trójkątów sferycznych o kątach wewnętrznych  $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ . Łatwo widzimy, że otrzymany parkietaż jest odbiciowy i bazuje na trójkącie o kątach  $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ , który widzimy w podpunkcie k) na liście potencjalnych odbiciowych trójkątów sferycznych.

### e) dwudziestościan foremny

Na rysunku poniżej widzimy dwie siatki dwudziestościanu foremnego – zwykłą siatkę oraz siatkę ze ścianami podzielonymi podziałem I typu.



Rysunek 2.13: Dwie siatki dwudziestościanu platońskiego

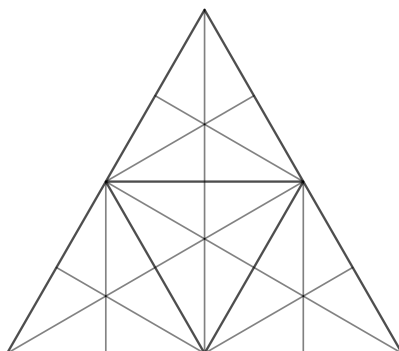
Rozważmy pojedynczą małą trójkątną płytkę podzielonej bryły. Jeden z jej wierzchołków jest środkiem trójkątnej ściany dwudziestościanu foremnego. W tym wierzchołku stykają się trzy małe płytki. Ze względu na to, że wszystkie naroża w bryle platońskiej są takie same, w każdym z naroży styka się pięć ścian, a każda ściana w obrębie jednego wierzchołka jest podzielona na dwie części, w kolejnym wierzchołku małej płytki schodzi się 10 płytek. W kolejnym wierzchołku małej płytki również styka się 10 płytek, ponieważ bryła została podzielona na trójkąty równoramienne.

Po odśrodkowym zrzutowaniu dwudziestościanu platońskiego na sferę widzimy, że jest ona podzielona na przystające trójkąty sferyczne o kątach wewnętrznych równych  $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{10}, \frac{2\pi}{10}$ . Taki trójkąt znajduje się na pozycji e) z listy. Widzimy też, że z powodów analogicznych jak poprzednio uzyskany parkietaż jest odbiciowy.

Zobaczmy teraz, jakie parkietaże sferyczne uda nam się uzyskać korzystając z II typu podziału brył platońskich. Podział ten będzie bazował na bryle podzielonej poprzednim sposobem – każdą z małych płytek podzielimy na dwie przystające płytki poprzez poprowadzenie wysokości małej płytki padającej na bok ściany bryły platońskiej. Tak podzieloną bryłę odśrodkowo zrzutujemy na sferę.

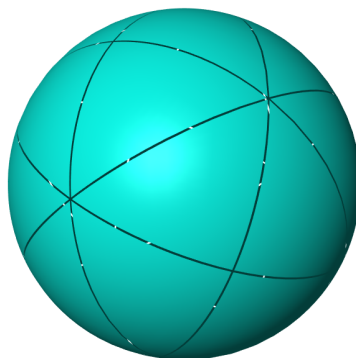
### a) czworościan foremny

Na poniższym rysunku znajduje się siatka czworościanu foremnego ze ścianami podzielonymi według podziału II typu.



Rysunek 2.14: Siatka czworościanu foremnego – każda ściana jest podzielona na sześć przystających trójkątów

Popatrzmy na mały trójkąt prostokątny. Wokół wierzchołka kąta prostego małego trójkąta stykają się cztery płytki. Z kolei wokół wierzchołka będącego środkiem ściany czworościanu schodzi się sześć płytek. Wokół ostatniego wierzchołka będącego wierzchołkiem ściany bryły schodzi się sześć płytek – po dwie na każdą z trzech ścian spotykających się w tym narożu bryły. Łatwo więc widzimy, że po odśrodkowym zrzutowaniu czworościanu foremnego na sferę otrzymamy podział sfery na przystające trójkąty o kątach wewnętrznych  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ . Taki trójkąt widzimy na liście potencjalnych odbiciowych trójkątów sferycznych na pozycji g).

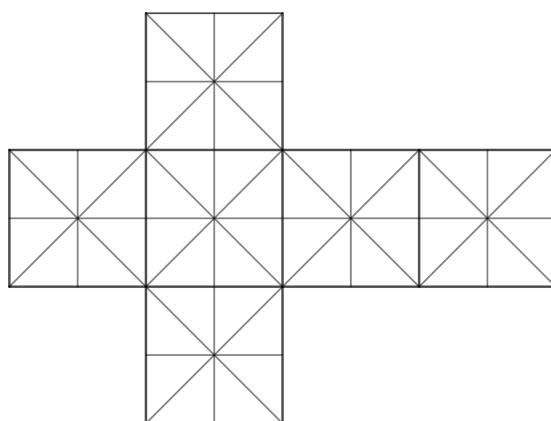


Rysunek 2.15: Odbiciowy parkietaż sferyczny dla trójkąta o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$

Tym samym znaleźliśmy kolejny sposób na konstrukcję tego parkietażu. W poprzedniej części rozumowania skonstruowaliśmy go korzystając z podziału ścian sześciianu podziałem I typu.

### b) sześciian

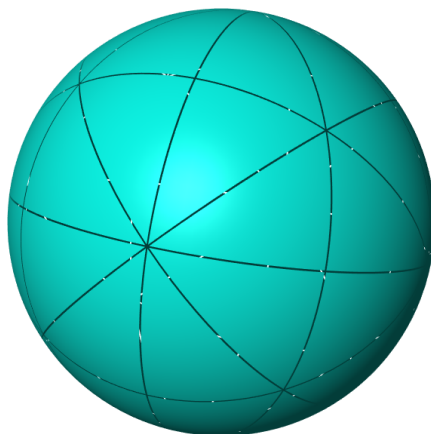
Podzielmy ściany sześciianu na mniejsze płytki prowadząc te wysokości małych płytek powstałych w podziale bryły podziałem I typu, które padają na boki ścian sześciianu. Taki podział został przedstawiony na rysunku poniżej.



Rysunek 2.16: Siatka sześcianu podzielona na mniejsze trójkąty podziałem II typu

Popatrzmy na małą trójkątną płytkę z tej ściany sześcianu, która z czterech stron jest otoczona kwadratami na powyższym rysunku siatki. Wokół jej wierzchołka będącego środkiem kwadratowej ściany styka się osiem płytek. Z kolei wokół wierzchołka dzielącego bok kwadraty na połowy schodzą się cztery płytki. Wokół ostatniego, trzeciego wierzchołka płytki schodzi się sześć płytek – po dwie na każdą z trzech ścian stykających się w jednym narożu sześcianu.

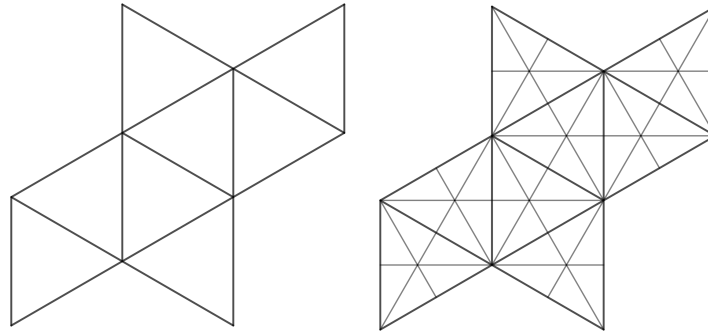
Po zrzutowaniu tak podzielonej bryły na sferę otrzymamy podział sfery na przystające płytki odpowiadające małym trójkątom z siatki. Każda z tych płytek będzie trójkątem sferycznym o miarach kątów wewnętrznych  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{8}$ . Bez problemu widzimy, że spełniony jest warunek odbiciowości - każde dwie płytki sąsiadujące przez wspólny bok są do siebie symetryczne względem tego boku. Zatem otrzymaliśmy kolejny odbiciowy parkietaż sferyczny.



Rysunek 2.17: Odbiciowy parkietaż sferyczny dla trójkąta sferycznego o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{8}$ . Przestrzeń wokół wierzchołków każdej z klepek tego parkietażu jest podzielona na cztery, sześć lub osiem takich samych części.

### c) ośmiościan foremny

Poniżej znajduje się siatka ośmiościanu foremnego podzielona na mniejsze trójkąty podziałem II typu.



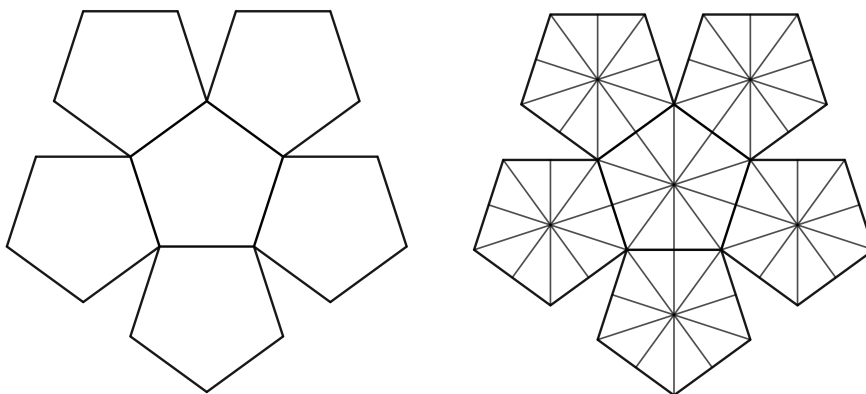
Rysunek 2.18: Siatka ośmiościanu foremnego bez podziału oraz z podziałem II typu

Spójrzmy na małą płytkę i policzmy, ile płytek styka się wokół jej wierzchołków. Widzimy, że wokół wierzchołka będącego środkiem trójkątnej ściany ośmiościanu schodzi się sześć płytek. Cztery płytki schodzą się wokół wierzchołka kąta prostego rozważanej płytki. Wreszcie w ostatnim wierzchołku płytki schodzi się osiem płytek – po dwie na każdą z czterech ścian stanowiących naroże ośmiościanu platońskiego.

Widzimy już, że po odśrodkowym zrzutowaniu ośmiościanu foremnego na sferę otrzymamy dokładnie ten sam odbiciowy parkietaż sferyczny, który otrzymaliśmy przed chwilą po przekształceniu sześciangu podzielonego podziałem II typu. Jest to odbiciowy parkietaż sferyczny dla trójkąta sferycznego o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{8}$ .

#### d) dwunastościan foremny

Na rysunku poniżej znajduje się fragment siatki dwunastościanu foremnego, którego ściany są podzielone na małe trójkąty prostokątne zgodnie z II typem podziału brył platońskich.

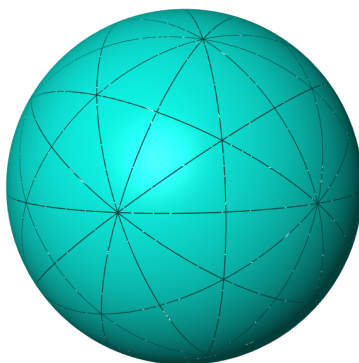


Rysunek 2.19: Siatka dwunastościanu foremnego bez podziału oraz z podziałem II typu

Zobaczmy, ile płytek styka się w poszczególnych wierzchołkach małej płytki. Każda pięciokątna ściana bryły została podzielona na dziesięć przystających trójkątów prostokątnych. Zatem w wierzchołku będącym środkiem ściany bryły schodzi się dziesięć płytek. W kolejnym wierzchołku będącym środkiem boku pięciokątnej ściany dwunastościanu stykają się cztery płytki. W ostatnim wierzchołku małej płytki spotyka się sześć małych

płytek – po dwie na każdą z trzech ścian budujących naroże bryły.

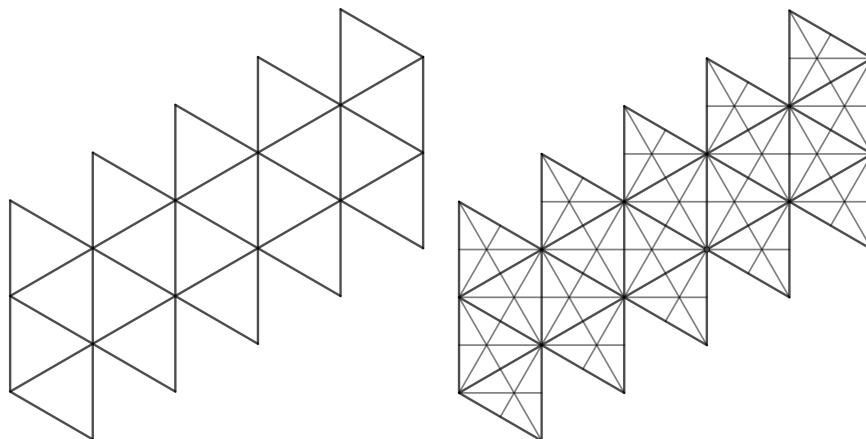
Zrzutujemy więc odśrodkowo tę bryłę na sferę na niej opisaną. Otrzymaliśmy podział sfery na przystające trójkąty o kątach wewnętrznych z miarami  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{10}$ . Ten trójkąt widzimy na pozycji i) na liście potencjalnych odbiciowych trójkątów sferycznych z początku tego podrozdziału. Nietrudno też zauważyć, że otrzymany parkietaż jest odbiciowy.



Rysunek 2.20: Odbiciowy parkietaż sferyczny dla trójkąta sferycznego o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{10}$

#### e) dwudziestościan foremny

Poniżej widzimy rysunek przedstawiający siatkę dwudziestościanu foremnego podzieloną na mniejsze trójkąty podziałem II typu.



Rysunek 2.21: Siatka dwudziestościanu foremnego bez podziału oraz z podziałem II typu

Popatrzmy na małą płytkę i jej wierzchołki. Wokół wierzchołka płytki będącego środkiem ściany dwudziestościanu schodzi się sześć płytek. Widzimy, że wokół wierzchołka kąta prostego tej płytki stykają się cztery klepki. Naroże dwudziestościanu foremnego składa się z pięciu ścian. W każdej z nich obszar przy jej wierzchołku jest podzielony na dwie części. Zatem wokół ostatniego wierzchołka małej płytki schodzi się dziesięć klepek.

Natychmiast zauważamy, że po odśrodkowym zrzutowaniu dwudziestościanu foremnego na sferę otrzymamy ten sam parkietaż, co w poprzednim podpunkcie, czyli odbiciowy parkietaż sferyczny dla trójkąta o kątach  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{10}$ .

W następnym podrozdziale dowiemy się, czy w ten sposób udało nam się skonstruować odbiciowe parkietaże sferyczne dla wszystkich trójek kątów trójkątów sferycznych, które są wypisane na początku tego podrozdziału.

## 2.4 Klasyfikacja odbiciowych parkietaży sferycznych

W tym podrozdziale podsumujemy wyniki trzech poprzednich podrozdziałów oraz uzyskamy pełną listę odbiciowych trójkątów na sferze. Przypomnijmy listę trójek kątów wewnętrznych potencjalnych odbiciowych trójkątów sferycznych z początku poprzedniego podrozdziału:

- |   |  |
|---|--|
| a) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ ,           | g) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ ,  |
| b) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}$ ,           | h) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{8}$ ,  |
| c) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ ,           | i) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{10}$ , |
| d) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}$ ,           | j) $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$ ,  |
| e) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{10}, \frac{2\pi}{10}$ ,         | k) $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$ .  |
| f) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{n}, n \geq 4$ , |  |

Zbierzmy teraz informacje z poprzedniego podrozdziału i spróbujmy do każdej z tych trójek dopisać metodę konstrukcji odbiciowego parkietażu sferycznego dla poszczególnych trójkątów. W ten sposób potwierdzimy, że wszystkie te trójkąty rzeczywiście są odbiciowymi trójkątami sferycznymi oraz że ta lista jest kompletna. Mamy do wyboru dwie metody: równoleżnikowo-południkową oraz metodę podziału odpowiedniej bryły platońskiej według jednego z dwóch sposobów albo niedzielenie jej wcale.

- $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$  – rzutowanie odśrodkowe czworościanu foremnego bez podziału,
- $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}$  – poprowadzenie południków przez wierzchołki trójkąta równobocznego wpisanego w równik,
- $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$  – rzutowanie odśrodkowe czworościanu foremnego z podziałem I typu,
- $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}$  – rzutowanie odśrodkowe ośmiościanu foremnego z podziałem I typu,
- $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{10}, \frac{2\pi}{10}$  – rzutowanie odśrodkowe dwudziestościanu foremnego z podziałem I typu,
- $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}$ , – poprowadzenie południków przez wierzchołki kwadratu wpisanego w równik lub rzutowanie ośmiościanu foremnego bez podziału,
- $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{n}, n > 4$  – poprowadzenie południków przez wierzchołki  $n$ -kąta foremnego wpisanego w równik,
- $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$  – rzutowanie odśrodkowe czworościanu foremnego z podziałem II typu lub sześciastianu z podziałem I typu,
- $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{8}$  – rzutowanie odśrodkowe sześciastianu z podziałem II typu lub ośmiościanu foremnego z podziałem II typu,



- j)  $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{10}$  – rzutowanie odśrodkowe dwunastościanu foremnego z podziałem II typu lub dwudziestościanu foremnego z podziałem II typu,
- k)  $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$  – rzutowanie odśrodkowe dwudziestościanu foremnego bez podziału,
- l)  $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}$  – rzutowanie odśrodkowe dwunastościanu foremnego z podziałem I typu.

Tym samym widzimy, że znaleźliśmy odbiciowe parkietaże sferyczne dla wszystkich rodzajów potencjalnych odbiciowych trójkątów sferycznych znalezionych w poprzednim podrozdziale. Nasze rozważania podsumowuje poniższe twierdzenie:

**Twierdzenie 2.13 (O odbiciowych trójkątach sferycznych).** *Poniżej znajduje się kompletna lista odbiciowych trójkątów sferycznych, dla których można utworzyć odbiciowy parkietaż sferyczny:*

- |  |   |
|--|---|
| a) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3},$           | g) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6},$  |
| b) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4},$           | h) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{8},$  |
| c) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6},$           | i) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{10},$ |
| d) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{8}, \frac{2\pi}{8},$           | j) $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5},$  |
| e) $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{10}, \frac{2\pi}{10},$         | k) $\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}.$  |
| f) $\frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{2\pi}{n}, n \geq 4,$ |   |

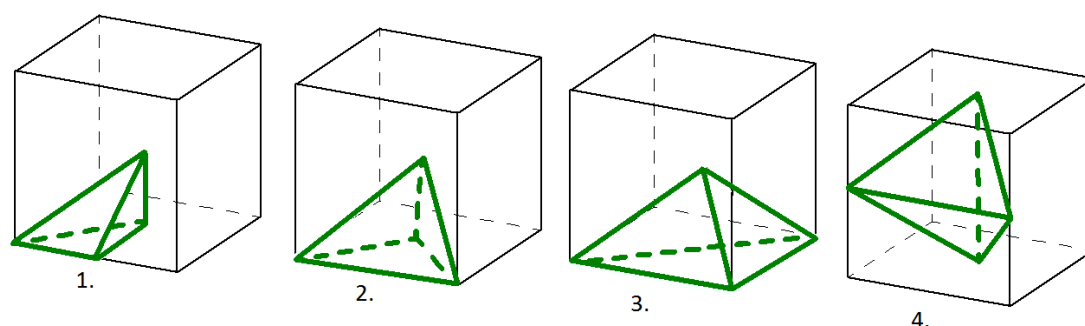
### 3 Czworoscienne parkietaze odbiciowe

W poprzednim rozdziale udało nam się odkryć wszystkie odbiciowe trójkąty sferyczne, za pomocą których można uzyskać odbiciowe parkietaże sfery. W niniejszym rozdziale zastosujemy wyniki poprzedniej części pracy, aby odkryć wszystkie czworosciany euklidesowe, z których da się utworzyć odbiciowe parkietaże przestrzeni.

#### 3.1 Twierdzenie o czworosciennych odbiciowych parkietażach przestrzeni

Wynikiem rozumowania przedstawionego w tym rozdziale będzie następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.1 (O czworosciennych odbiciowych parkietażach przestrzeni).** *Istnieją dokładnie cztery odbiciowe parkietaże przestrzeni, którego klepkami są czworosciany euklidesowe. Płytki tych parkietaży zostały przedstawione na rysunku poniżej:*



Rysunek 3.1: Czworosciany euklidesowe, z których da się skonstruować odbiciowe parkietaże przestrzeni. Każdy z czworoscianów jest umiejscowiony w sześcianie jednostkowym. Pierwsze trzy czworosciany mają wierzchołek w środku sześcianu oraz taką samą wysokość równą  $\frac{1}{2}$ . Pozostałe wierzchołki czworoscianów są albo środkami ścian sześcianu, albo wierzchołkami sześcianu, albo środkami krawędzi sześcianu.

Zanim jednak skonstruujemy odbiciowe parkietaże przestrzeni bazując na tych czworoscianach, prześledźmy drogę dojścia do tej części powyższego twierdzenia, w której twierdzimy, że nie ma innych możliwych płytek takich parkietaży.

#### 3.2 Od trójkątów sferycznych do czworoscianów euklidesowych

Naszą podróż zaczniemy od bardzo przydatnego lematu, który stanowi swojego rodzaju most pomiędzy odbiciowymi parkietażami sfery a odbiciowymi parkietażami przestrzeni, w których płytkami są czworosciany euklidesowe.

**Lemat 3.2 (O wierzchołku klepki odbiciowego parkietażu czworosciennego).** *Trójka kątów dwuściennych przy wierzchołku klepki czworosciennego odbiciowego parkietażu przestrzeni musi być jedną z trójek kątów występujących w odbiciowych trójkątach sferycznych.*

**Dowód:** Załóżmy, że mamy odbiciowy parkietaż przestrzeni, którego klepką jest czworościan euklidesowy. Przyjrzyjmy się któremuś z naroży tej klepki. Wokół tego naroża stykają się dokładnie trzy ściany, więc mamy tutaj do czynienia z kątem trójściennym.

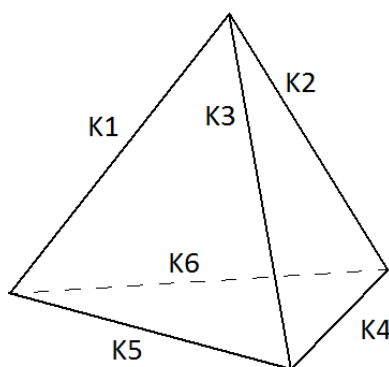
Ze względu na odbiciowość parkietażu, wokół jednego jego wierzchołka znajdują się takie same trójścienne naroża przylegających do niego czworościennych płytek. Rozważmy małą sferę, której środkiem jest wierzchołek parkietażu. Przecina się ona jednakowo ze wszystkimi płytkami znajdującymi się wokół tego wierzchołka. W ten sposób na sferze tworzy się ślad będący odbiciowym parkietażem sferycznym, ponieważ trójkąty dzielące sferę są przystające, a kąty płytek odbiciowego parkietażu sferycznego są tymi samymi kątami, co kąty dwuścienne płytek odbiciowego parkietażu przestrzeni złożonego z czworościanów.

□

Powyższy lemat pokazuje nam, że korzystając z odbiciowych trójkątów sferycznych możemy znaleźć potencjalne konfiguracje kątów dwuściennych w odbiciowych czworościanach euklidesowych, a następnie spróbować skonstruować te bryły i zbudować odpowiadające im czworościenne odbiciowe parkietaże przestrzeni. Taki właśnie jest cel niniejszego rozdziału.

Widzimy, że kąty dwuścienne w płytkach czworościennego parkietażu odbiciowego muszą być postaci  $\frac{2\pi}{K}$ , gdzie  $K \geq 3$ . Poszczególne krawędzie potencjalnej płytki czworościennego parkietażu odbiciowego możemy oznaczyć liczbami  $K_1, K_2, \dots, K_6$ , przy czym każda z liczb  $K_i$  dla  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$  jest liczbą z mianownika wyrażenia  $\frac{2\pi}{K_i}$  na miarę kąta dwuściennego, w którym zawiera się ta krawędź.

Z Lematu 3.2 wiemy, że trójki liczb przy wierzchołku czworościanu odbiciowego należą do zbioru trójek odbiciowych trójkątów sferycznych, które poznaliśmy w poprzednim rozdziale. Tę sytuację obrazuje poniższy rysunek:



Rysunek 3.2: Odbiciowy czworościan euklidesowy z liczbami przypisanymi do krawędzi.

Widzimy, że w czworościanie są cztery naroża składające się z następujących krawędzi:

- a)  $K_1, K_2, K_3$ ,
- b)  $K_1, K_5, K_6$ ,
- c)  $K_2, K_4, K_6$ ,

d) K3, K4, K5.

Wymienione wyżej trójki liczb są trójkami reprezentującymi kąty odbiciowych trójkątów sferycznych. Wyrażmy to spostrzeżenie za pomocą następującej obserwacji:

**Obserwacja 3.3.** *Trójka  $K_i, K_j, K_l$  ( $i, j, l$  parami różne,  $i, j, l$  są liczbami od 1 do 6) znajdująca się wokół wierzchołka odbiciowego czworościanu euklidesowego jest jedną z trójek liczb  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$  z listy odbiciowych trójkątów sferycznych.*

**Uwaga 3.4.** *Poniżej znajduje się lista trójek  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$  odpowiadająca kątom poszczególnych odbiciowych trójkątów sferycznych zaczerpnięta z końcówki poprzedniego rozdziału:*

- |                               |                |
|-------------------------------|----------------|
| a) (3, 3, 3),                 | g) (4, 6, 6),  |
| b) (3, 4, 4),                 | h) (4, 6, 8),  |
| c) (3, 6, 6),                 | i) (4, 6, 10), |
| d) (3, 8, 8),                 | j) (5, 5, 5),  |
| e) (3, 10, 10),               | k) (5, 6, 6).  |
| f) (4, 4, $n$ ), $n \geq 4$ , |                |

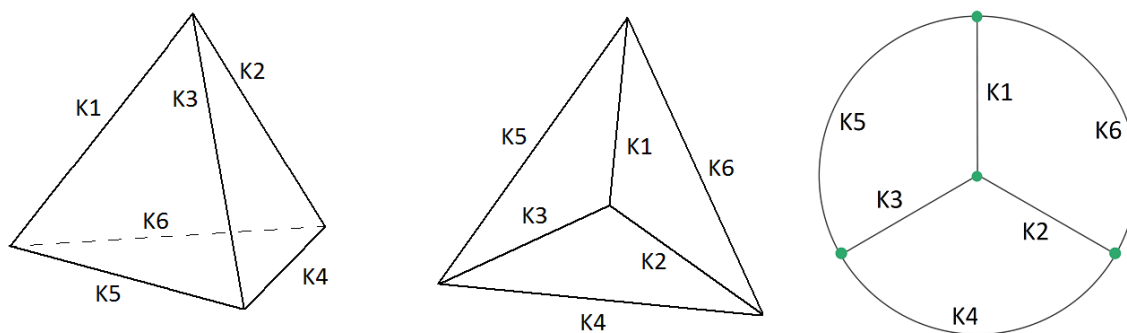
W dalszej części pracy będziemy chcieli znaleźć wszystkie możliwe szóstki liczb

K1, K2, K3, K4, K5, K6

odpowiadające poszczególnym krawędziom potencjalnych odbiciowych czworościanów euklidesowych.

**Uwaga 3.5.** *Na zasadzie skrótu myślowego będziemy pisać o szóstce kątów dwuściennych, mając na myśli sześć parametrów K1, K2, K3, K4, K5, K6 odpowiadających szóstce kątów  $(\frac{2\pi}{K_1}, \frac{2\pi}{K_2}, \frac{2\pi}{K_3}, \frac{2\pi}{K_4}, \frac{2\pi}{K_5}, \frac{2\pi}{K_6})$ .*

W celu wypisania wszystkich możliwych szóstek, będziemy chcieli zapisać dane z Rysunku 3.2 w nieco inny sposób. Skorzystamy z okręgu podzielonego promieniami na trzy równe części. Środek okręgu oraz każdy z punktów styku okrąg-promień będzie odpowiadał poszczególnym wierzchołkom czworościanu, a promienie i trzecie części okręgu będą odpowiadały poszczególnym krawędziom czworościanu, które będą miały przypisaną konkretną liczbę K1, ..., K6. Przyjmujemy, że w środku okręgu znajduje się naroże z krawędziami K1, K2, K3. Na rysunku poniżej widzimy zobrazowanie tej sytuacji.



Rysunek 3.3: Odbiciowy czworościan euklidesowy z zaznaczonymi krawędziami i jego widok: z profilu oraz z góry. Trzecie części okręgu na ostatnim obrazku zastąpiły boki trójkąta ze środkowego rysunku. Zielonym kolorem zaznaczono wierzchołki czworościanu.

**Uwaga 3.6.** *Zauważmy, że okrąg z Rysunku 3.3 jest niewrażliwy na symetrie i obroty, tzn. bez względu na to, jaki obrót czy jaka symetria zostanie względem niego wykonana, wokół wierzchołków czworościanu będą znajdować się takie same krawędzie.*

Aby mieć pewność, że wyznaczymy wszystkie potencjalne szóstki kątów dwuściennych czworościanów euklidesowych, będziemy korzystać z zasady tzw. *porządku leksykograficznego*. W tym celu będziemy rozważać sytuacje, w których poszczególne trójki, zaczynając od podpunktu a) z listy trójek  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$  z Uwagi 3.4, znajdują się w narożu potencjalnej klepki reprezentowanym przez środek okręgu. Trójki z listy z Uwagi 3.4 są uporządkowane leksykograficznie, a potencjalne szóstki K1, K2, ..., K6 będą uporządkowane leksykograficznie względem trójki K1, K2, K3. Trójka K1, K2, K3 będzie minimalna w porządku leksykograficznym względem pozostałych trójek wchodzących w skład potencjalnej szóstki. Dzięki temu nie będziemy musieli już rozważać potencjalnej szóstki, w której występuje choć jedna trójka z tych, które zostały rozważone poprzednio jako trójka K1, K2, K3 reprezentująca naroże znajdujące się w środku okręgu pomocniczego.

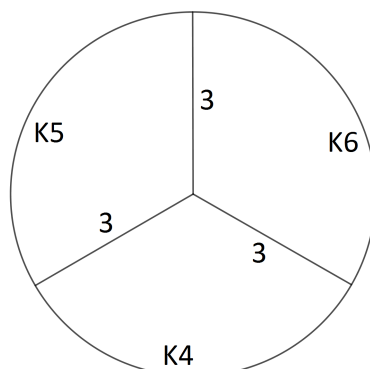
Główny wniosek z poprzedniego akapitu zawiera się w następującej Uwadze:

**Uwaga 3.7.** *Jeśli choć jedna z trójek wchodzących w skład potencjalnej szóstki, znajdujących się w wierzchołku poza środkiem okręgu pomocniczego, była rozważana wcześniej jako ta, która znajduje się w środku okręgu, wówczas taki przypadek możemy pominąć.*

Przejdźmy więc do wyznaczania potencjalnych szóstek kątów dwuściennych odbiciowych czworościanów euklidesowych. Przed nami jedenaście podpunktów, w których będziemy rozważać każdą z trójek z Uwagi 3.4. jako trójkę kątów dwuściennych potencjalnego czworościanu znajdującą się w narożu reprezentowanym przez środek okręgu pomocniczego.

**Ad a)**

W środku okręgu znajduje się trójka  $(3, 3, 3)$ .



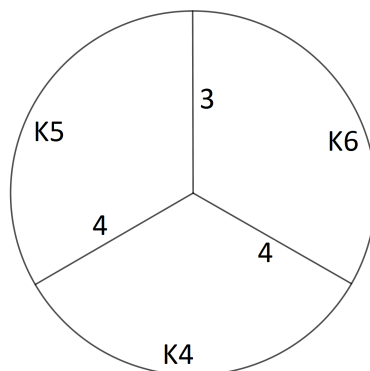
Rysunek 3.4: Okrąg reprezentujący potencjalny czworościan euklidesowy z kątami dwuściennymi odpowiadającymi szóstce  $(3, 3, 3, K4, K5, K6)$ .

Spoglądając na listę trójek zauważamy, że w przypadku, gdy w którejś z trójek  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$  znajduje się liczba 3, to pozostałe dwie liczby są takie same i należą do zbioru  $\{3, 4, 6, 8, 10\}$ . Wobec tego znaleźliśmy pięć potencjalnych szóstek K1, K2, K3, K4, K5, K6, dla których  $K1 = K2 = K3 = 3$ . Są to następujące szóstki:

- $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ ,
- $(3, 3, 3, 4, 4, 4)$ ,
- $(3, 3, 3, 6, 6, 6)$ ,
- $(3, 3, 3, 8, 8, 8)$ ,
- $(3, 3, 3, 10, 10, 10)$ .

**Ad b)**

W tym wypadku w środku okręgu mamy trójkę  $(3, 4, 4)$ .



Rysunek 3.5: Okrąg odpowiadający potencjalnemu czworościanowi euklidesowemu z kątami dwuściennymi opisanymi szóstką  $(3, 4, 4, K4, K5, K6)$ .

Rozważmy kilka przypadków w zależności od liczby K4.

**1.** Niech  $K4 = 3$ .

Gdy  $K4 = 3$ , mamy tylko jedną możliwość obsadzenia liczb  $K5$  i  $K6$ , ponieważ istnieje tylko jedna trójka  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$ , w której występuje zarówno liczba 3, jak i 4. Jest to trójka  $(3, 4, 4)$ , wobec tego jedyną nową potencjalną szóstką otrzymaną w tym punkcie to szóstka  $(3, 4, 4, 3, 4, 4)$ .

**2.** Niech  $K4 = 4$ .

Widzimy, że w trójce liczb  $K3, K4, K5$  znajdują się dwie czwórki. Musimy więc tak dobrać liczbę  $K5$ , żeby była ona częścią trójki zawierającą liczbę 3 oraz, żeby była częścią trójki liczb zawierającej dwie czwórki. Liczba  $K5$  musi być taka sama, jak  $K6$ , żeby stworzyć trójkę liczb zawierającą liczbę 3. Mamy pięć takich możliwości –  $K5 = K6$  są ze zbioru  $\{3, 4, 6, 8, 10\}$ . W podpunkcie a) rozważyliśmy przypadek, gdy  $K5 = K6 = 3$ , więc możemy go tutaj pominąć ze względu na Uwagę 3.7., bo prowadzi to do sytuacji, gdzie pojawia się trójka  $(3, 3, 3)$  rozważona wcześniej. Odkryliśmy więc cztery następne potencjalne szóstki kątów dwuściennych:

- $(3, 4, 4, 4, 4, 4)$ ,
- $(3, 4, 4, 4, 6, 6)$ ,
- $(3, 4, 4, 4, 8, 8)$ ,
- $(3, 4, 4, 4, 10, 10)$ .

**3.** Niech  $K4 = 5$ .

W tym wypadku, podobnie jak w punkcie 1. mamy tylko jedną nową potencjalną szóstką kątów dwuściennych. Jest nią szóstka  $(3, 4, 4, 5, 4, 4)$ .

**4.** Niech  $K4 = 6$ .

Gdy  $K4 = 6$ , możemy utworzyć cztery potencjalne szóstki kątów dwuściennych, ponieważ mamy cztery trójki, w których występuje zarówno liczba 4, jak i 6. Są to trójki  $(4, 4, 6)$ ,  $(4, 6, 6)$ ,  $(4, 6, 8)$ ,  $(4, 6, 10)$ . W przypadku, gdy  $K4 = 6$ , za  $K5$  oraz  $K6$  musimy przyjąć taką samą liczbę, żeby wierzchołek  $K1, K5, K6$  był trójką zawierającą liczbę 3. Wobec tego mamy cztery następne możliwości:

- $(3, 4, 4, 6, 4, 4)$ ,
- $(3, 4, 4, 6, 6, 6)$ ,
- $(3, 4, 4, 6, 8, 8)$ ,
- $(3, 4, 4, 6, 10, 10)$ .

**5.** Niech  $K4 = 7$ .

Ze względu na to, że istnieje tylko jedna trójka kątów zawierająca czwórkę i siódmkę jednocześnie, w tym wypadku mamy tylko jedną nową potencjalną szóstką kątów dwuściennych. Jest nią szóstka  $(3, 4, 4, 7, 4, 4)$ .

**6.** Niech  $K4 = 8$ .

Patrząc na listę trójek  $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$  widzimy, że są tylko dwie trójki, w których występują liczby 4 oraz 8 jednocześnie. Są to trójki  $(4, 4, 8)$  i  $(4, 6, 8)$ . Ponadto, w miejsca  $K5$  i  $K6$

musimy wpisać taką samą liczbę należącą do zbioru  $\{4, 6, 8, 10\}$ . Z tych rozważań wynika, że możliwe są tylko dwie nowe potencjalne szóstki:  $(3, 4, 4, 8, 4, 4)$  oraz  $(3, 4, 4, 8, 6, 6)$ .

**7.** Niech  $K_4 = 9$ .

W tym przypadku istnieje tylko jedna trójka kątów zawierająca czwórkę i dziewiątkę jednocześnie, zatem mamy tutaj tylko jedną nową potencjalną szóstkę kątów dwuściennych:  $(3, 4, 4, 9, 4, 4)$ .

**8.** Niech  $K_4 = 10$ .

Ze względu na to, że istnieją tylko dwie trójki, w których 4 oraz 10 występują razem, a liczby na miejscach  $K_5$  i  $K_6$  muszą być takie same, mamy dwie nowe potencjalne szóstki. Są to:  $(3, 4, 4, 10, 4, 4)$  oraz  $(3, 4, 4, 10, 6, 6)$ .

**9.** Niech  $K_4 \geq 11$ .

Zauważmy, że tutaj mamy tylko jedną możliwość obsadzenia  $K_5$  oraz  $K_6$  – możemy tam wpisać tylko czwórki, zatem jedyną nową potencjalną szóstką z tego podpunktu jest nieskończona seria szóstek  $(3, 4, 4, n, 4, 4)$ , gdzie  $n \geq 11$ .

Podsumowując, w przypadku b) odkryliśmy bardzo dużo nowych potencjalnych szóstek kątów dwuściennych odbiciowych czworościanów euklidesowych. W sposób zbiorczy możemy je zapisać następująco:

- $(3, 4, 4, n, 4, 4)$ ,  $n \geq 3$ , – zbiorcze ujęcie pierwszych szóstek z punktów 2, 4, 6, 8 oraz całych punktów 1, 3, 5, 7, 11.
- $(3, 4, 4, 4, 6, 6)$ ,
- $(3, 4, 4, 4, 8, 8)$ ,
- $(3, 4, 4, 4, 10, 10)$ ,
- $(3, 4, 4, 6, 6, 6)$ ,
- $(3, 4, 4, 6, 8, 8)$ ,
- $(3, 4, 4, 6, 10, 10)$ ,
- $(3, 4, 4, 8, 6, 6)$ ,
- $(3, 4, 4, 10, 6, 6)$ .

**Ad c)**

W środku okręgu umiejscawiamy trójkę  $(3, 6, 6)$ .

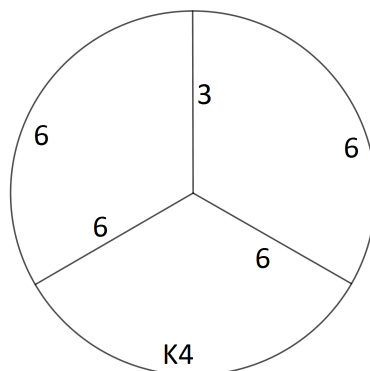
Tutaj ponownie będziemy rozważać kilka przypadków, jednak trochę inaczej, niż poprzednio. Kluczowa jest tutaj obserwacja, że w sytuacji, gdy  $K_1 = 3$ , liczby  $K_5$  oraz  $K_6$  muszą być równe oraz należeć do zbioru  $\{3, 4, 6, 8, 10\}$ .



1. Niech  $K_5 = K_6 \in \{3, 4\}$

Widzimy tutaj trójki  $(3, 3, 3)$  oraz  $(3, 4, 4)$ , które rozważyliśmy w podpunkcie b), więc zgodnie z Uwagą 3.7. możemy pominąć te przypadki.

2. Niech  $K_5 = K_6 = 6$ .

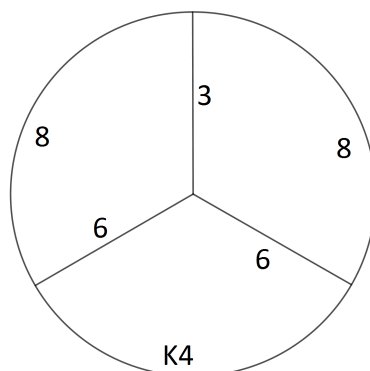


Rysunek 3.6: Okrąg reprezentujący potencjalny czworościan euklidesowy o kątach dwuściennych odpowiadających szóstce  $(3, 6, 6, K_4, 6, 6)$ .

W tej sytuacji mamy aż trzy możliwości opisu krawędzi  $K_4$ , ponieważ mamy trzy trójki, w których występują dwie szóstki jednocześnie. Zatem nowe potencjalne szóstki odkryte w tym punkcie to:

- $(3, 6, 6, 3, 6, 6)$ ,
- $(3, 6, 6, 4, 6, 6)$ ,
- $(3, 6, 6, 5, 6, 6)$ .

3. Niech  $K_5 = K_6 = 8$ .



Rysunek 3.7: Okrąg pomocniczy dla potencjalnego czworościanu euklidesowego z kątami dwuściennymi odpowiadającymi szóstce  $(3, 6, 6, K_4, 8, 8)$ .

W tym wypadku mamy tylko jedną potencjalną szóstkę ze względu na to, że istnieje tylko jedna trójka, w której liczby 6 oraz 8 występują jednocześnie. Jest to trójka  $(4, 6, 8)$ . Tak więc jedyną nową potencjalną szóstką odkrytą w tym punkcie jest szóstka  $(3, 6, 6, 4, 8, 8)$ .

4. Niech  $K_5 = K_6 = 10$ .

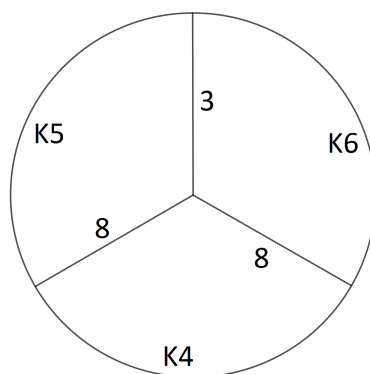
Podobnie jak w przypadku wyżej, tutaj mamy tylko jedną potencjalną szóstkę, bo istnieje tylko jedna trójka, w której liczby 6 oraz 10 występują jednocześnie. Zatem jedyną nową potencjalną szóstką odkrytą w tym punkcie jest szóstka  $(3, 6, 6, 4, 10, 10)$ .

W podpunkcie c) udało nam się znaleźć następujące nowe potencjalne szóstki kątów dwuściennych odbiciowych czworościanów euklidesowych:

- $(3, 6, 6, 3, 6, 6)$ ,
- $(3, 6, 6, 4, 6, 6)$ ,
- $(3, 6, 6, 4, 8, 8)$ ,
- $(3, 6, 6, 4, 10, 10)$ ,
- $(3, 6, 6, 5, 6, 6)$ .

**Ad d)**

W środku okręgu mamy trójkę  $(3, 8, 8)$ .



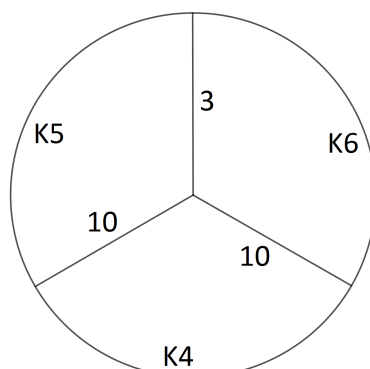
Rysunek 3.8: Okrąg odpowiadający potencjalnemu czworościanowi euklidesowemu z kątami dwuściennymi reprezentowanymi szóstką  $(3, 8, 8, K_4, K_5, K_6)$ .

Widzimy, że w miejscach  $K_5$  i  $K_6$  musi być ta sama liczba ze zbioru  $\{3, 4, 6, 8, 10\}$ , ale przypadki, gdy  $K_5 = K_6 \in \{3, 4, 6\}$  rozważyliśmy poprzednio rozważając trójki  $(3, 3, 3)$ ,  $(3, 4, 4)$  i  $(3, 6, 6)$  jako te, które znajdują się w środku okręgu. Na mocy Uwagi 3.7. te przypadki możemy tutaj pominąć.

Tak więc zostaje nam rozważenie dwóch pozostałych sytuacji. Zauważmy jednak, że nie ma takiej trójki, w której występowałyby jednocześnie liczby 8 oraz 10. Z tego powodu w tym punkcie mamy tylko jedną nową potencjalną szóstkę i jest nią  $(3, 8, 8, 3, 8, 8)$ .

**Ad e)**

W środku okręgu mamy trójkę  $(3, 10, 10)$ .



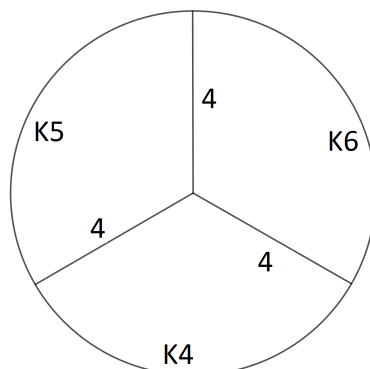
Rysunek 3.9: Ten okrąg pomocniczy reprezentuje potencjalny czworoscian euklidesowy z kątami dwuściennymi opisanymi szóstką  $(3, 10, 10, K4, K5, K6)$ .

Tutaj, podobnie jak wyżej, widzimy, że w miejscach  $K5$  i  $K6$  musi być ta sama liczba ze zbioru  $\{3, 4, 6, 8, 10\}$ , ale cztery pierwsze przypadki zostały rozważone poprzednio i możemy je tutaj pominąć zgodnie z Uwagą 3.7. Tak więc pozostaje nam sytuacja, w której  $K5 = K6 = 10$ . Widzimy zatem, że w tym punkcie mamy tylko jedną nową potencjalną szóstkę i jest nią  $(3, 10, 10, 3, 10, 10)$ .

**Ad f)**

W środku okręgu mamy trójkę  $(4, 4, m)$ ,  $m \geq 4$ . Ten przypadek rozbijemy na osiem podprzypadków – siedem, w których  $n$  będzie liczbą od 4 do 10 oraz ostatni, który będzie opisywał sytuację, w której  $n > 10$ .

1. W środku okręgu znajduje się trójka  $(4, 4, 4)$ .



Rysunek 3.10: Okrąg reprezentujący potencjalny czworoscian euklidesowy z kątami dwuściennymi odpowiadającymi szóstce  $(4, 4, 4, K4, K5, K6)$ .

**1.1.** Niech  $K4 = 3$ .

W tym wypadku  $K5$  musi być równe 4, ale trójka  $(3, 4, 4)$  została już rozważona w podpunkcie a), więc zgodnie z Uwagą 3.7. możemy pominąć ten przypadek.

### 1.2. Niech $K_4 = 4$

Ten przypadek rozbijemy na kilka podprzypadków w zależności od liczby  $K_5$ .

#### 1.2.1. Niech $K_5 = 3$ .

Ten przypadek został już rozważony w podpunkcie a), więc go tutaj pomijamy zgodnie z Uwagą 3.7.

#### 1.2.2. Niech $K_5 = 4$ .

W tej sytuacji  $K_6$  może być dowolną liczbą  $m$  większą lub równą 4. Gdyby  $K_6$  było równe 3, wrócilibyśmy do przypadku omówionego w podpunkcie a). Tak więc jedyną nową potencjalną szóstką odkrytą w punkcie 1.2.2 jest następująca nieskończona seria szóstek:  $(4, 4, 4, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 4$ .

#### 1.2.3. Niech $K_5 = 5$ .

W tej sytuacji  $K_6$  może być tylko czwórką, ale tę sytuację rozpatrzyliśmy już w podpunkcie 1.2.2, ponieważ zgodnie z Uwagą 3.6 okrąg reprezentujący klepkę odbiciowego czworościanu euklidesowego jest niewrażliwy na symetrię.

#### 1.2.4. Niech $K_5 = 6$ .

W tej sytuacji  $K_6$  może przyjąć wartość 4, 6, 8 lub 10, ale przypadek, w którym  $K_6 = 4$  pojawił się już w punkcie 1.2.2, więc możemy go pominąć zgodnie z Uwagą 3.7. W takiej sytuacji odkryliśmy trzy nowe potencjalne szóstki:

- $(4, 4, 4, 4, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 10)$ .

#### 1.2.5. Niech $K_5 = 7$ .

Tutaj  $K_6$  może być tylko czwórką, ale tę sytuację rozpatrzyliśmy już w punkcie 1.2.2. Możemy ją więc pominąć.

#### 1.2.6. Niech $K_5 = 8$ .

W tej sytuacji  $K_6$  może być równe 4 lub 6, ale obie te możliwości zostały już rozpatrzone wcześniej i możemy je pominąć dzięki Uwadze 3.7. Ze względu na Uwagę 3.6 szóstka  $(4, 4, 4, 4, 8, 6)$  jest równoważna potencjalnej szóstce  $(4, 4, 4, 4, 6, 8)$  znalezionej w punkcie 1.2.4. Z kolei szóstka  $(4, 4, 4, 4, 6, 4)$  jest równoważna potencjalnej szóstce  $(4, 4, 4, 4, 4, 6)$  uwzględnionej w punkcie 1.2.2. Widzimy więc, że w tym punkcie nie znaleźliśmy żadnych nowych potencjalnych szóstek.

#### 1.2.7. Niech $K_5 = 9$ .

W tym wypadku jedyną możliwą opcją jest  $K_6 = 4$ , ale ze względu na Uwagę 3.6 ten przypadek został już rozpatrzony w punkcie 1.2.2., więc go pomijamy.

#### 1.2.8. Niech $K_5 = 10$ .

$K_6$  może przyjąć wartość 4 lub 6, ale zgodnie z Uwagą 3.6 obie te możliwości były już rozpatrywane.

**1.2.9.** Niech  $K5 = n \geq 11$ .

Ten przypadek również został rozpatrzony w punkcie 1.2.2 ze względu na Uwagę 3.6.

Podsumowując, w sytuacji gdy w środku okręgu znajduje się trójka  $(4, 4, 4)$  oraz  $K4 = 4$ , znaleźliśmy cztery potencjalne szóstki, w tym jedną nieskończoną serię:

- $(4, 4, 4, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 4$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 10)$ .

**1.3.** Niech  $K4 \in \{5, 7, 9\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 11\}$ .

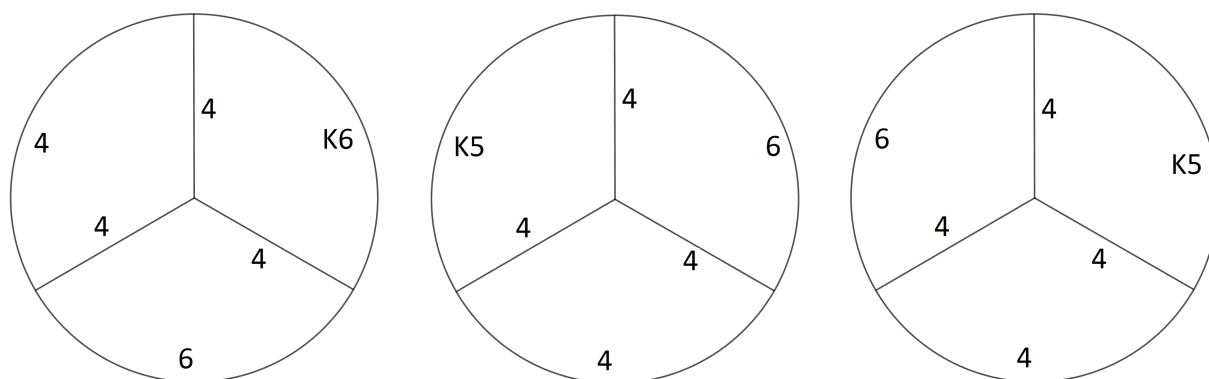
Widzimy, że w tej sytuacji  $K5$  musi być równe  $K6 = 4$ . Przypadek, w którym w szóstce znajduje się pięć czwórek został już omówiony w punkcie 1.2.2, więc możemy go pominąć na mocy Uwagi 3.7.

**1.4.** Niech  $K4 = 6$ .

W tym wypadku  $K5 \in \{4, 6, 8, 10\}$ .

**1.4.1.** Niech  $K5 = 4$ .

Ze względu na treść Uwagi 3.6 możemy obrócić okrąg o  $120^\circ$  w lewo, a następnie zamienić  $K5$  i  $K6$  miejscami. Tę sytuację pokazuje poniższy rysunek:



Rysunek 3.11: Po obróceniu pierwszego okręgu o *jeden poziom*, czyli o  $120^\circ$ , w prawo, otrzymujemy drugi okrąg dla szóstki  $(4, 4, 4, 4, K5, 6)$ . Trzeci okrąg pomocniczy jest symetrią drugiego okręgu względem jego pionowej średnicy.

Tak uzyskany okrąg jest równoważny przypadkowi rozpatrywanemu w punkcie 1.2.4, więc możemy go pominąć.

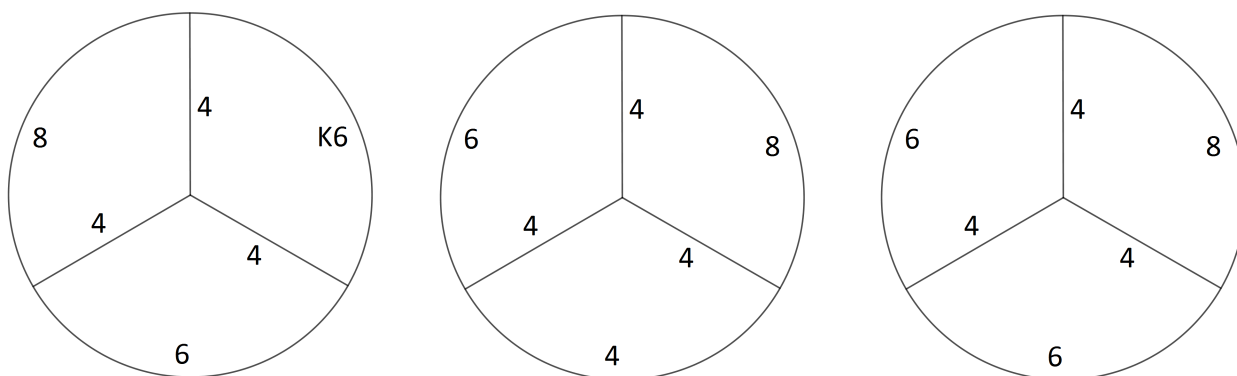
**1.4.2.** Niech  $K5 = 6$ .

Tutaj mamy aż cztery możliwości:  $K6 \in \{4, 6, 8, 10\}$ . Pierwszy przypadek, gdy  $K6 = 4$ , został już rozpatrzony w punkcie 1.2.2, więc zgodnie z Uwagą 3.7. możemy go pominąć. Natomiast pozostałe trzy sytuacje dostarczają trzech kolejnych nowych potencjalnych szóstek:

- $(4, 4, 4, 6, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 10)$ .

**1.4.3.** Niech  $K5 = 8$ .

W tej sytuacji  $K6$  może być równe 4 lub 6, ale gdy odpowiednio przekształcimy okrąg, zobaczymy, że te przypadki były już rozpatrywane wcześniej. To przekształcenie zostało opisane na poniższym rysunku:



Rysunek 3.12: Pierwszy okrąg reprezentuje potencjalny czworościan euklidesowy z kątami dwuściennymi opisanymi szóstką  $(4, 4, 4, 6, 8, K6)$ . Drugi okrąg pomocniczy przedstawia sytuację, gdy obrócono pierwszy okrąg o  $120^\circ$  zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara przy  $K6$  równym 4. Tym sposobem otrzymaliśmy szóstkę  $(4, 4, 4, 4, 6, 8)$ , którą omówiliśmy w punkcie 1.2.9. Z kolei trzeci rysunek przedstawia sytuację, gdy  $K6 = 6$  i dokonane zostało to samo przekształcenie pierwszego okręgu. Szóstkę z trzeciego okręgu omówiliśmy już w punkcie poprzednim. Oba te przypadki możemy więc pominąć.

**1.4.4.** Niech  $K5 = 10$ .

Tutaj sytuacja jest taka sama jak poprzednio –  $K6$  może być równe 4 lub 6, ale te sytuacje już rozważaliśmy we wcześniejszej części rozumowania.

**1.5.** Niech  $K4 = 8$ .

W tym przypadku  $K5$  może być równe 4 lub 6, ale wszystkie te przypadki rozważyliśmy już wcześniej.

**1.6.** Niech  $K4 = 10$ .

Tutaj  $K5$  może być równe 4 lub 6, ale wszystkie te sytuacje były już rozpatrywane poprzednio.

Reasumując, w sytuacji gdy w środku okręgu znajduje się trójka  $(4, 4, 4)$ , udało nam się znaleźć siedem nowych potencjalnych szóstek, w tym jedną nieskończoną serię. Oto one:

- $(4, 4, 4, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 4$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 8)$ ,

- $(4, 4, 4, 4, 6, 10)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 10)$ .

**2.** W środku okręgu mamy trójkę  $(4, 4, 5)$ .

Zauważmy, że ze względu na to, że  $K_3 = 5$ , liczby  $K_4$  oraz  $K_5$  muszą być sobie równe oraz należeć do zbioru  $\{4, 5, 6\}$ . Rozważmy więc te trzy przypadki.

**2.1** Niech  $K_4 = K_5 = 4$ .

W tej sytuacji  $K_6$  może przyjąć dowolną wartość  $n$  większą lub równą 5. Przypadki, gdy  $n \in \{3, 4\}$  rozpatrzyliśmy już wcześniej, więc jedyna nowa potencjalna szóstka odkryta w tym punkcie to nieskończona seria szóstek  $(4, 4, 5, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 5$ .

**2.2** Niech  $K_4 = K_5 = 5$ .

Tutaj mamy tylko jedną możliwość obsadzenia  $K_6$ , ponieważ jedyną trójką, w której znajdują się jednocześnie 4 oraz 5 jest trójka  $(4, 4, 5)$ . Wobec tego  $K_6$  musi być równe 4, a jedyna potencjalna nowa szóstka z tego punktu to  $(4, 4, 5, 5, 5, 4)$ .

**2.3** Niech  $K_4 = K_5 = 6$ .

W tej sytuacji  $K_6$  musi należeć do zbioru  $\{4, 6, 8, 10\}$ , więc nowe potencjalne szóstki odkryte w tym punkcie są następujące:

- $(4, 4, 5, 6, 6, 4)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 10)$ .

W przypadku, gdy w środku okręgu mamy trójkę  $(4, 4, 5)$ , znaleźliśmy następujących kandydatów na szóstki kątów dwuściennych odbiciowych czworościanów euklidesowych:

- $(4, 4, 5, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 5$ ,
- $(4, 4, 5, 5, 5, 4)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 4)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 10)$ .

**3.** W środku okręgu występuje trójka  $(4, 4, 6)$ .

Ze względu na to, że  $K3 = 6$ ,  $K4$  może być liczbą ze zbioru  $\{4, 5, 6, 8, 10\}$ . Przypadek, gdy  $K4 = 3$  został rozważony, gdy w środku okręgu znajdowała się trójka  $(3, 6, 6)$ . Zgodnie z Uwagą 3.7. przypadek ten możemy tutaj pominąć.

**3.1.** Niech  $K4 = 4$ .

W tej sytuacji  $K5$  może być równe 4, 6, 8, lub 10. Rozpatrzmy te przypadki.

**3.1.1.** Niech  $K5 = 4$ .

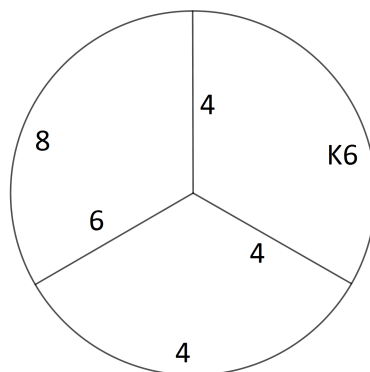
Tutaj, pomijając przypadki, które były rozpatrzone wcześniej,  $K6$  może być dowolną liczbą naturalną  $n$  większą lub równą 6. Mamy więc pierwszą nową potencjalną szóstkę odkrytą w punkcie 3. – jest to nieskończona seria szóstek  $(4, 4, 6, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 6$ .

**3.1.2.** Niech  $K5 = 6$ .

Tutaj  $K6$  może być równe 6, 8 lub 10. Przypadku, gdy  $K6 = 4$  nie rozpatrujemy, ponieważ trójkę  $(4, 4, 4)$  znajdującą się w środku okręgu rozpatrywaliśmy już wcześniej. Tak więc w punkcie 3.1.2. znaleźliśmy trzy kolejne potencjalne szóstki. Oto one:

- $(4, 4, 6, 4, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 6, 10)$ .

**3.1.3.** Niech  $K5 = 8$ .



Rysunek 3.13: Okrąg reprezentujący potencjalny czworościan euklidesowy z kątami dwuściennymi odpowiadającymi szóstce  $(4, 4, 6, 4, 8, K6)$ .

W tej sytuacji  $K6$  może być równe 4 albo 6, ale przypadek, w którym  $K6 = 4$ , był rozważony już wcześniej, zatem możemy go pominąć. Tak więc jedyna nowa potencjalna szóstka, którą znaleźliśmy w tym punkcie to  $(4, 4, 6, 4, 8, 6)$ .

**3.1.4.** Niech  $K5 = 10$ .

Mamy tylko dwie trójki, w których występuje liczba 10 – są to trójki  $(4, 4, 10)$  oraz  $(4, 6, 10)$ . Z tego powodu  $K6$  może przyjąć wartość 4 lub 6, ale pierwsza z tych opcji została już rozpatrzona wcześniej, w punkcie 1. Jedyna nowa potencjalna szóstka z punktu



3.1.4. to szóstka  $(4, 4, 6, 4, 10, 6)$ .

**3.2.** Niech  $K_4 = 5$ .

Tu mamy tylko jedną możliwość –  $K_5$  musi być równe 6, a  $K_6 = 4$ , więc odkryliśmy kolejną nową potencjalną szóstkę:  $(4, 4, 6, 5, 6, 4)$ .

**3.3.** Niech  $K_4 = 6$ .

Sytuacje, gdy  $K_5 \in \{3, 4, 5\}$  omówiliśmy już wcześniej, więc zgodnie z Uwagą 3.7. możemy je pominąć. Były to jedyne możliwości na  $K_5$  przy  $K_4$  równym 6.

**3.4.** Niech  $K_4 = 8$ .

Wszystkie możliwe konfiguracje, tzn.  $K_6 = 4$  lub  $K_6 = 6$  przy  $K_5$  równym 4, zostały już rozważone we wcześniejszej części rozumowania, więc je tutaj pomijamy.

**3.5.** Niech  $K_4 = 10$ .

Tutaj możliwości obsadzenia  $K_5$  oraz  $K_6$  są takie same jak w punkcie wyżej. Zostały one rozpatrzone wcześniej, więc ze względu na Uwagę 3.7. możemy je pominąć.

Reasumując, w punkcie 3. przy trójce  $(4, 4, 6)$  znajdującej się w środku okręgu, znaleźliśmy następujące nowe potencjalne szóstki:

- $(4, 4, 6, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 6$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 6, 10)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 8, 6)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 10, 6)$ ,
- $(4, 4, 6, 5, 6, 4)$ .

**4.** W środku okręgu mamy trójkę  $(4, 4, 7)$ .

Łatwo widzimy, że w tej sytuacji jedyną możliwością obsadzenia  $K_4$ ,  $K_5$  oraz  $K_6$  jest  $K_4 = K_5 = 4$  oraz  $K_6$  będące dowolną liczbą  $n$  nie mniejszą niż 7. Zatem w punkcie 4. odkryliśmy kolejną nieskończoną serię potencjalnych szóstek:  $(4, 4, 7, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 7$ .

**5.** W tym wypadku w środku okręgu mamy trójkę  $(4, 4, 8)$ .

$K_4$  może przyjąć dwie wartości – 4 lub 6. Przyjrzyjmy im się bliżej.

**5.1.** Niech  $K_4 = 4$ .

Ze względu na to, że są tylko dwie trójki, w których występują liczby 4 oraz 8 jednocześnie –  $(4, 4, 8)$  oraz  $(4, 6, 8)$ , mamy dwie możliwości obsadzenia  $K_5$ .

**5.1.1.** Niech  $K_5 = 4$ .

W tej sytuacji  $K_6$  może przyjąć dowolną wartość nie mniejszą niż 8, mamy więc pierwszą

nową potencjalną szóstkę z punktu piątego:  $(4, 4, 8, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 8$ .

**5.1.2.** Niech  $K5 = 6$ .

W tym wypadku  $K6$  może mieć wartość 4, 6, 8 lub 10, ale pierwsze dwa przypadki rozpatrzyliśmy już wcześniej, więc je pomijamy. Znaleźliśmy więc dwie nowe potencjalne szóstki:  $(4, 4, 8, 4, 6, 8)$  oraz  $(4, 4, 8, 4, 6, 10)$ .

**5.2.** Niech  $K4 = 6$ .

W tym przypadku  $K5$  możemy obsadzić tylko liczbą 4. Natomiast  $K6$  może być liczbą ze zbioru  $\{4, 6, 8, 10\}$ , ale wszystkie te sytuacje rozważyliśmy już poprzednio, więc na mocy Uwagi 3.7. pomijamy je.

**6.** Tutaj w środku okręgu mamy trójkę  $(4, 4, 9)$ .

Zauważmy, że mamy tylko jedną możliwość obsadzenia  $K4$  oraz  $K5$ . Jest to  $K4 = K5 = 4$ . Widzimy też, że  $K6$  może przyjąć dowolną, nie mniejszą niż 9, wartość. Mamy więc kolejną nową nieskończoną serię potencjalnych szóstek:  $(4, 4, 9, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 9$ .

**7.** W tym wypadku w środku okręgu mamy trójkę  $(4, 4, 10)$ .

Widzimy, że  $K4$  może przyjąć wartość 4 lub 6.

**7.1.** Niech  $K4 = 4$ .

W tej sytuacji  $K5$  może przyjąć wartość 4 lub 6.

**7.1.1.** Niech  $K5 = 4$ .

Widzimy, że  $K6$  może być dowolną liczbą nie mniejszą niż 10, więc mamy kolejną nową nieskończoną serię potencjalnych szóstek:  $(4, 4, 10, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 10$ .

**7.1.2.** Niech  $K5 = 6$ .

Tutaj  $K6 \in \{4, 6, 8, 10\}$ , jednak pierwsze trzy przypadki już rozważaliśmy. Wobec tego kolejną nową potencjalną szóstką jest  $(4, 4, 10, 4, 6, 10)$ .

**7.2.** Niech  $K4 = 6$ .

W tym wypadku  $K5$  musi być równe 4, a  $K6$  jest liczbą ze zbioru  $\{4, 6, 8, 10\}$ , jednak wszystkie te przypadki już rozpatrywaliśmy, więc możemy je pominąć.

W punkcie siódmym odkryliśmy następujące nowe potencjalne szóstki: nieskończoną serię potencjalnych szóstek  $(4, 4, 10, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 10$  oraz szóstkę  $(4, 4, 10, 4, 6, 10)$ .

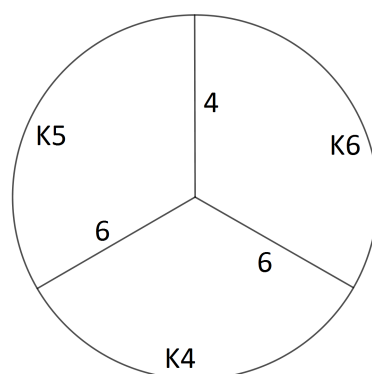
**8.** W środku okręgu znajduje się trójka  $(4, 4, n)$ ,  $n \geq 11$ .

Tutaj po raz kolejny  $K4$  musi być równe  $K5$  i wynosić 4. Z kolei  $K6$  może przyjąć dowolną wartość większą bądź równą 11. Widzimy więc kolejną nową nieskończoną serię potencjalnych szóstek:  $(4, 4, n, 4, 4, m)$  przy  $n, m \geq 11$ .

Podsumowując, w podpunkcie f) odkryliśmy bardzo wiele potencjalnych szóstek kątów dwuściennych odbiciowych czworościanów euklidesowych, w tym osiem nieskończonych serii. Oto one:

- $(4, 4, 4, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 4$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 4, 4, 6, 10)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 10)$ ,
- $(4, 4, 5, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 5$ ,
- $(4, 4, 5, 5, 5, 4)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 4)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 5, 6, 6, 10)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 6$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 6, 6)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 6, 10)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 8, 6)$ ,
- $(4, 4, 6, 4, 10, 6)$ ,
- $(4, 4, 6, 5, 6, 4)$ ,
- $(4, 4, 7, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 7$ ,
- $(4, 4, 8, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 8$ ,
- $(4, 4, 8, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 8, 4, 6, 10)$ ,
- $(4, 4, 9, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 9$ ,
- $(4, 4, 10, 4, 4, n)$ ,  $n \geq 10$ ,
- $(4, 4, 10, 4, 6, 10)$ ,
- $(4, 4, n, 4, 4, m)$ ,  $n, m \geq 11$ .

**Ad g)** W środku okręgu znajduje się trójka  $(4, 6, 6)$ .



Rysunek 3.14: Okrąg pomocniczy odpowiadający potencjalnemu czworościanowi euklidesowemu o kątach dwuściennych opisanych szóstką  $(4, 6, 6, K4, K5, K6)$ .

Zauważmy, że  $K4$  może przyjąć wartość 4 lub 5 – w innym wypadku mielibyśmy do czynienia z przypadkiem, który już wcześniej rozpatrywaliśmy.

1. Niech  $K4 = 4$ .

W tym wypadku  $K5$  może być liczbą ze zbioru  $\{4, 6, 8, 10\}$ .

1.1. Niech  $K5 = 4$ .

Widzimy, że tutaj  $K1 = K5 = 4$ , a przypadki, w których w szóstce występuje trójka

zawierająca dwie czwórki zostały wyczerpująco omówione w podpunkcie f).

**1.2.** Niech  $K5 = 6$ .

Mamy cztery możliwości obsadzenia  $K6$ : 4, 6, 8, 10. Natychmiast zauważamy, że sytuacja, w której  $K6 = 4$  została już rozpatrzona, tak więc pozostają nam trzy nowe potencjalne szóstki:

- (4, 6, 6, 4, 6, 6),
- (4, 6, 6, 4, 6, 8),
- (4, 6, 6, 4, 6, 10).

**1.3.** Niech  $K5 \in \{8, 10\}$ .

Te wszystkie przypadki zostały już rozważone wcześniej, zatem możemy je pominąć na mocy Uwagi 3.7.

**2.** Niech  $K4 = 5$ .

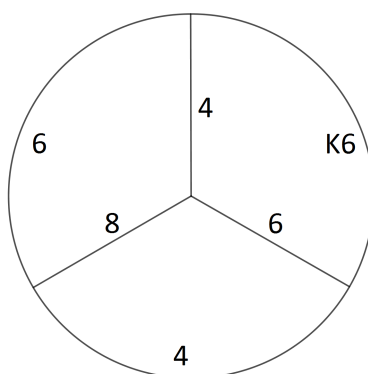
Jedyną opcją jest tutaj  $K5 = K6 = 6$ , mamy więc następną nową potencjalną szóstkę: (4, 6, 6, 5, 6, 6).

Reasumując, w podpunkcie g) odkryliśmy cztery nowe potencjalne szóstki:

- (4, 6, 6, 4, 6, 6),
- (4, 6, 6, 4, 6, 8),
- (4, 6, 6, 4, 6, 10),
- (4, 6, 6, 5, 6, 6).

**Ad h)** W środku okręgu mamy trójkę (4, 6, 8).

W sytuacji, gdy nie chcemy powtórnie rozważać przypadków, które już omówiliśmy, jedyną możliwością obsadzenia  $K4$  jest liczba 4, a  $K5$  musi być równe 6.



Rysunek 3.15: Okrąg reprezentujący potencjalny czworościan euklidesowy z kątami dwuściennymi odpowiadającymi szóstce (4, 6, 8, 4, 6,  $K6$ ).

Łatwo widzimy, że przypadki, gdy  $K6 \in \{4, 6\}$  zostały już rozważone, więc możemy je pominąć. Pozostaje nam  $K6 \in \{8, 10\}$ . W ten sposób odkryliśmy dwie nowe potencjalne szóstki:  $(4, 6, 8, 4, 6, 8)$  oraz  $(4, 6, 8, 4, 6, 10)$ .

**Ad i)** W środku okręgu jest trójka  $(4, 6, 10)$ .  
Widzimy, że  $K4$  może przyjąć wartość 4 lub 6.

**1.** Niech  $K4 = 4$ .

W tej sytuacji  $K5$  może być równe tylko 6, a  $K6$  może wynosić tylko 10 ze względu na to, że wszystkie inne przypadki już rozpatrzyliśmy wcześniej. Mamy więc kolejną nową potencjalną szóstkę –  $(4, 6, 10, 4, 6, 10)$ .

**2.** Niech  $K4 = 6$ . Tutaj  $K5$  może przyjąć wartość 4, a  $K6 = 10$ . Otrzymalibyśmy zatem tę samą potencjalną szóstkę, co w poprzednim punkcie.

Reasumując, w przypadku gdy w środku okręgu mamy trójkę  $(4, 6, 10)$ , znaleźliśmy tylko jedną nową potencjalną szóstkę. Jest nią szóstka  $(4, 6, 10, 4, 6, 10)$ .

**Ad j)** Trójka  $(5, 5, 5)$  jest w środku okręgu.

W tej sytuacji liczby  $K4$ ,  $K5$  oraz  $K6$  muszą być sobie równe i należeć do zbioru  $\{5, 6\}$ . Mamy więc kolejne dwie nowe potencjalne szóstki:  $(5, 5, 5, 5, 5, 5)$  oraz  $(5, 5, 5, 6, 6, 6)$ .

**Ad k)** W ostatnim przypadku w środku okręgu mamy trójkę  $(5, 6, 6)$ .

Tutaj  $K4$  może być równe 3, 4 lub 5, ale wszystkie te grupy przypadków rozpatrzyliśmy już wcześniej.

W ten sposób, korzystając z zasady porządku leksykograficznego, wyznaczyliśmy wszystkie potencjalne szóstki kątów dwuściennych odbiciowych czworoscianów euklidesowych. Podsumowanie tego nieco przydługiego rozumowania stanowi tabela znajdująca się poniżej, w której prezentujemy kombinacje parametrów  $K_i$  odpowiadające wszystkim poszczególnym potencjalnym szóstkom kątów dwuściennych.

K1	K2	K3	K4	K5	K6	Uwagi
3	3	3	3	3	3	
			4	4	4	
			6	6	6	
			8	8	8	
			10	10	10	
3	4	4	$n$	4	4	$n \geq 3$
			4	6	6	
			4	8	8	
			4	10	10	
			6	6	6	
			6	8	8	
			6	10	10	
			8	6	6	
			10	6	6	

3	6	6	3 4 4 4 5	6 6 8 10 6	6 6 8 10 6	
3	8	8	3	8	8	
3	10	10	3	10	10	
4	4	4	4 4 4 4 6 6 6	4 6 6 6 6 6 6	$n$ 6 8 10 6 8 10	$n \geq 4$
4	4	5	4 5 6 6 6 6	4 5 6 6 6 6	$n$ 4 4 6 6 8 10	$n \geq 5$
4	4	6	4 4 4 4 4 4 5	4 6 6 6 8 10 6 6	$n$ 6 8 10 6 6 4	$n \geq 6$
4	4	7	4	4	$n$	$n \geq 7$
4	4	8	4 4 4	4 6 6	$n$ 8 10	$n \geq 8$
4	4	9	4	4	$n$	$n \geq 9$
4	4	10	4 4	4 6	$n$ 10	$n \geq 10$
4	4	$n$	4	4	$m$	$n, m \geq 11$
4	6	6	4 4 4 5	6 6 6 6	6 8 10 6	
4	6	8	4 4	6 6	8 10	
4	6	10	4	6	10	
5	5	5	5 6	5 6	5 6	

---

Tablica 3.1: Wszystkie potencjalne szóstki kątów dwuściennych odbiciowych czworoscianów euklidesowych. Parametry  $K_i$  odpowiadają poszczególnym kątom dwuściennym potencjalnych czworoscianów euklidesowych.

W kolejnej części pracy zobaczymy, które z tych szóstek odpowiadają prawdziwym, istniejącym odbiciowym czworoscianom euklidesowym.

### 3.3 Weryfikacja kątów dwuściennych potencjalnych czworoscianów euklidesowych

W następującej części pracy chcemy zweryfikować, które szóstki kątów dwuściennych odpowiadają istniejącym odbiciowym czworoscianom euklidesowym. W tym celu posłużymy się następującym lematem pochodzącym z [4] i [5]:

**Lemat 3.8.** *Między kątami dwuściennymi czworoscianu zachodzi następujący związek:*

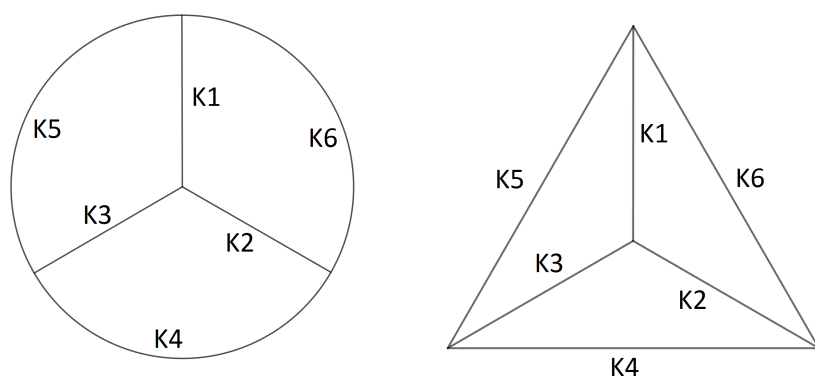
$$\det \begin{pmatrix} -1 & \cos(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{13}) & \cos(\alpha_{14}) \\ \cos(\alpha_{12}) & -1 & \cos(\alpha_{23}) & \cos(\alpha_{24}) \\ \cos(\alpha_{13}) & \cos(\alpha_{23}) & -1 & \cos(\alpha_{34}) \\ \cos(\alpha_{14}) & \cos(\alpha_{24}) & \cos(\alpha_{34}) & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

gdzie  $\alpha_{ij}$  jest kątem dwuściennym między ścianami  $i$  oraz  $j$ .

Naszym celem jest obliczenie wyznaczników z Lematu 3.8. odpowiadających poszczególnym potencjalnym szóstkom. Następnie spróbujemy skonstruować czworosciany, dla których wspomniane wyznaczniki okażą się zerowe. Aby tego dokonać, musimy najpierw przystosować wyznacznik z Lematu 3.8. do naszych szóstek.

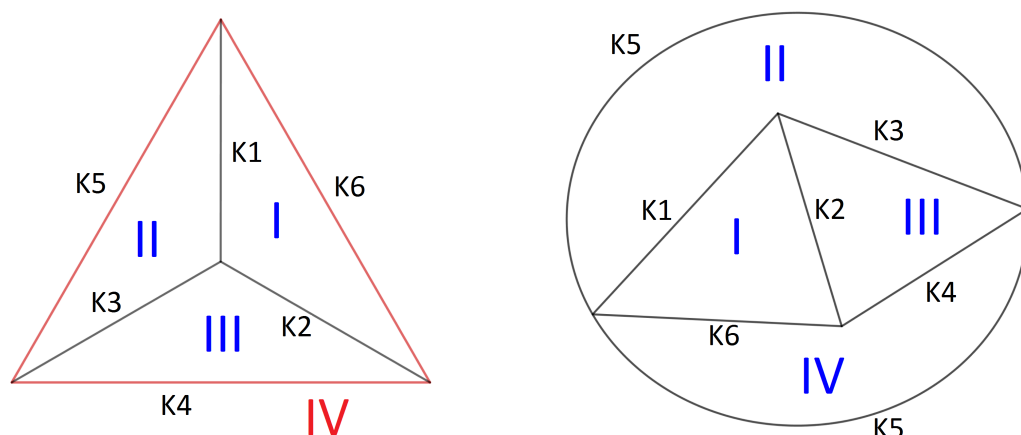
Zauważmy, że żeby móc napisać macierz z Lematu 3.8., potrzebujemy wiedzieć, które krawędzie potencjalnego czworoscianu euklidesowego opisują kąty dwuścienne między poszczególnymi ścianami. W czworoscianie euklidesowym mamy sześć kątów dwuściennych, a każdy z nich znajduje się między dwoma z czterech ścian bryły.

Popatrzmy na okrąg pomocniczy, z którego korzystaliśmy przy wyznaczaniu potencjalnych szóstek w poprzednim podrozdziale. Na rysunku poniżej widzimy tenże okrąg i widok z góry czworoscianu mu odpowiadającego.



Rysunek 3.16: Po lewej stronie znajduje się okrąg pomocniczy znany z poprzedniego podrozdziału. Patrząc na rysunek po prawej stronie patrzymy z góry czworościan, który jest reprezentowany przez okrąg mu towarzyszący.

Ponumerujemy teraz ściany czworościanu i przyjrzymy się krawędziom, które oddzielają poszczególne z nich. Zostało to wykonane na rysunku poniżej.



Rysunek 3.17: Po lewej stronie widzimy czworościan z ponumerowanymi ścianami. Czwarta ściana, w skład której wchodzi zaznaczone na czerwono krawędzie K4, K5 i K6, stanowi podstawę czworościanu. Po prawej stronie widzimy „siatkę” tego czworościanu, który został niejako *rozcięty* wzdłuż krawędzi K5 i rozłożony tak, by żadne dwie ściany na siebie nie nachodziły.

Teraz, korzystając z Rysunku 3.17, możemy zobaczyć, między którymi ścianami znajdują się poszczególne kąty dwuścienne. I tak:

- K1 jest częścią wspólną ścian I i II, więc jest to  $\alpha_{12}$ ,
- K2 odpowiada kątowi dwuściennemu między ścianami I i III, więc jest to  $\alpha_{13}$ ,
- K6 opisuje kąt dwuścienny między ścianami I oraz IV, więc jest to  $\alpha_{14}$ ,
- K3 to część wspólna ścian II i III, więc jest to  $\alpha_{23}$ ,
- K5 odpowiada kątowi dwuściennemu między ścianami II i IV, więc jest to  $\alpha_{24}$ ,
- wreszcie K4 opisuje kąt dwuścienny między ścianami III oraz IV, więc jest to  $\alpha_{34}$ .



Zatem dla szóstki (K1, K2, K3, K4, K5, K6) macierz z Lematu 3.8. wygląda następująco:

$$\begin{pmatrix} -1 & \cos(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{13}) & \cos(\alpha_{14}) \\ \cos(\alpha_{12}) & -1 & \cos(\alpha_{23}) & \cos(\alpha_{24}) \\ \cos(\alpha_{13}) & \cos(\alpha_{23}) & -1 & \cos(\alpha_{34}) \\ \cos(\alpha_{14}) & \cos(\alpha_{24}) & \cos(\alpha_{34}) & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \cos\left(\frac{2\pi}{K1}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{K2}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{K6}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{K1}\right) & -1 & \cos\left(\frac{2\pi}{K3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{K5}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{K2}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{K3}\right) & -1 & \cos\left(\frac{2\pi}{K4}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{K6}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{K5}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{K4}\right) & -1 \end{pmatrix}$$

Mamy więc narzędzie, dzięki któremu będzie możliwa weryfikacja potencjalnych szóstek kątów dwuściennych odbiciowych czworościanów euklidesowych.

### Przykład 3.9.

Obliczmy wyznacznik macierzy z Lematu 3.8. dla nieskończonej serii szóstek postaci  $(4, 4, n, 4, 4, m)$ , gdzie  $n, m \geq 3$ . Innymi słowy: chcemy obliczyć te wyznaczniki dla wszystkich szóstek, które mają w sobie co najmniej cztery czwórki.

Poniżej widzimy macierz z Lematu 3.8. dla serii szóstek wspomnianej w poprzednim akapicie.

$$\begin{pmatrix} -1 & \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) & -1 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -1 & \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \\ 0 & -1 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -1 & 0 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dzięki obliczeniom wykonanym w programie *Wolfram Alpha* możemy zobaczyć, że

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) \\ 0 & -1 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -1 & 0 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right) \left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{m}\right) - 1\right).$$

Zauważmy, że dla każdego  $n, m \geq 3$  wartość  $\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) - 1\right)\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{m}\right) - 1\right)$  nigdy nie będzie równa zero ze względu na to, że  $\cos \alpha = 1$  dla  $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , a żadna z wartości kątów, jakie bierzemy tu pod uwagę, nie jest wielokrotnością  $2\pi$ . Z tego wynika, że nie istnieje odbiciowy czworoscian euklidesowy, którego kąty dwuścienne można by opisać szóstką  $(4, 4, n, 4, 4, m)$  dla  $n, m \geq 3$ .

Poniżej znajduje się kompletna lista szóstek kątów dwuściennych potencjalnych czworoscianów euklidesowych wraz z wartościami wyznacznika. Ze względu na złożoność obliczeń, zostały one wykonane z wykorzystaniem strony internetowej *Wolfram Alpha*.

K1	K2	K3	K4	K5	K6	Uwagi	Wartość wyznacznika
3	3	3	3	3	3		0,3125
			4	4	4		0,5
			6	6	6		0,5
			8	8	8		0,125
			10	10	10		$\frac{7-3\sqrt{5}}{32}$
3	4	4	$n$	4	4	$n \geq 3$	$-\frac{3}{4} \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$
			4	6	6		0,5
			4	8	8		0,25
			4	10	10		$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$
			6	6	6		0,3125
			6	8	8		0,0625
			6	10	10		$\frac{3-2\sqrt{5}}{16}$
			8	6	6		0,125
10	6	6	$\frac{7-3\sqrt{5}}{32}$				
3	6	6	3	6	6		0,3125
			4	6	6		0,25
			4	8	8		0
			4	10	10		$\frac{1-\sqrt{5}}{8}$
			5	6	6		$\frac{3-\sqrt{5}}{32}$
3	8	8	3	8	8		0,0625
3	10	10	3	10	10		$\frac{3-2\sqrt{5}}{16}$
4	4	4	4	4	$n$	$n \geq 4$	$1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)$
			4	6	6		0,5
			4	6	8		0,25
			4	6	10		$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$
			6	6	6		0,25
			6	6	8		0
			6	6	10		$\frac{1-\sqrt{5}}{8}$

4	4	5	4	4	$n$	$n \geq 5$	$\frac{-5-\sqrt{5}}{8} \left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{n} \right) - 1 \right)$
			5	5	4		$\frac{3+\sqrt{5}}{8}$
			6	6	4		0,25
			6	6	6		$\frac{3-\sqrt{5}}{32}$
			6	6	8		$-\frac{1+\sqrt{5}}{16}$
			6	6	10		$-\frac{1+2\sqrt{5}}{16}$
4	4	6	4	4	$n$	$n \geq 6$	$-\frac{3}{4} \left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{n} \right) - 1 \right)$
			4	6	6		0,3125
			4	6	8		0,125
			4	6	10		$\frac{7-3\sqrt{5}}{32}$
			4	8	6		0,0625
			4	10	6		$\frac{3-2\sqrt{5}}{16}$
			5	6	4		0,25
4	4	7	4	4	$n$	$n \geq 7$	$\left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{7} \right) - 1 \right) \left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{n} \right) - 1 \right)$
4	4	8	4	4	$n$	$n \geq 8$	$-\frac{1}{2} \left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{n} \right) - 1 \right)$
			4	6	8		0
			4	6	10		$\frac{1-\sqrt{5}}{16}$
4	4	9	4	4	$n$	$n \geq 9$	$\left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{9} \right) - 1 \right) \left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{n} \right) - 1 \right)$
4	4	10	4	4	$n$	$n \geq 10$	$\frac{\sqrt{5}-5}{8} \left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{n} \right) - 1 \right)$
			4	6	10		$\frac{7-5\sqrt{5}}{32}$
4	4	$n$	4	4	$m$	$n, m \geq 11$	$\left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{n} \right) - 1 \right) \left( \cos^2 \left( \frac{2\pi}{m} \right) - 1 \right)$
4	6	6	4	6	6		0
			4	6	8		$-\frac{1+2\sqrt{2}}{16}$
			4	6	10		$-\frac{1+5\sqrt{5}}{32}$
			5	6	6		$-\frac{1+\sqrt{5}}{8}$
4	6	8	4	6	8		-0,4375
			4	6	10		$-\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}{16}$
4	6	10	4	6	10		$-\frac{5+7\sqrt{5}}{32}$
5	5	5	5	5	5		$\frac{3+\sqrt{5}}{32}$
			6	6	6		$-\frac{9+5\sqrt{5}}{32}$

Tablica 3.2: Wszystkie potencjalne szóstki kątów dwuściennych odbiciowych czworokątów euklidesowych wraz z obliczonymi wyznacznikami.

Analizując powyższą tabelę możemy zobaczyć, że są cztery szóstki, dla których wyznacznik z Lematu 3.8. jest zerowy. Oto one:

- (3, 6, 6, 4, 8, 8),
- (4, 4, 4, 6, 6, 8),

- $(4, 4, 8, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 6, 6, 4, 6, 6)$ .

Aby przekonać się, czy odbiciowe czworościany euklidesowe, których kąty dwuścienne można opisać wylistowanymi przed chwilą szóstkami, rzeczywiście istnieją, należy przeprowadzić próbę konstrukcji tych potencjalnych czworościanów. Jeśli uda się je skonstruować, będziemy mieć namacalny dowód na to, że te czworościany istnieją.

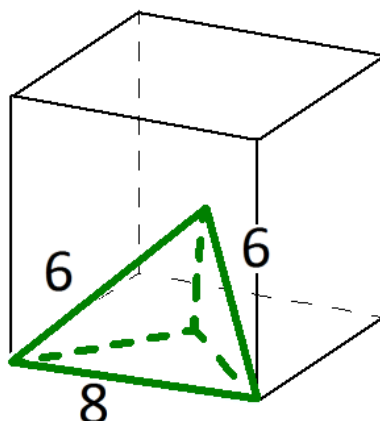
### 3.4 Konstrukcja potencjalnych klepek czworościennych odbiciowych parkietaży przestrzeni

Przypomnijmy szóstki z Tabeli 3.2., dla których wyznaczniki z Lematu 3.8. są zerowe:

- $(3, 6, 6, 4, 8, 8)$ ,
- $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ ,
- $(4, 4, 8, 4, 6, 8)$ ,
- $(4, 6, 6, 4, 6, 6)$ .

Pamiętając o tym, że na każdą szóstkę  $(K1, K2, K3, K4, K5, K6)$  składają się cztery trójki:  $(K1, K2, K3)$ ,  $(K2, K4, K6)$ ,  $(K3, K4, K5)$  oraz  $(K1, K5, K6)$ , spróbujmy dokonać konstrukcji czworościanów opisanych szóstkami z powyższej listy.

Na początek spróbujmy się zastanowić, jak powinien wyglądać czworościan odpowiadający szóstce  $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ . Natychmiast widzimy, że jedno z jego naroży jest narożem sześciangu, ponieważ znajdują się tam trzy kąty dwuścienne, które są kątami prostymi. Temu narożu odpowiada trójka  $(4, 4, 4)$ . Kolejne dwa przystające naroża reprezentowane trójką  $(4, 6, 8)$  sugerują nam, że czworościan będzie miał płaszczyznę symetrii. *Spoiwem* bryły byłoby naroże odpowiadające trójce  $(4, 6, 6)$ . Łącząc te informacje, możemy istotnie otrzymać czworościan z poniższego rysunku.



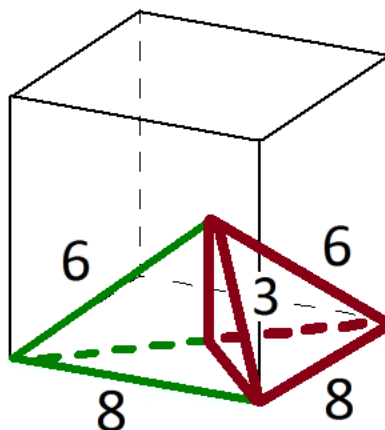
Rysunek 3.18: Czwościan euklidesowy odpowiadający szóstce  $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ .

Narożu, w którym stykają się trzy krawędzie narysowane linią przerywaną, odpowiada trójka  $(4, 4, 4)$ . Ponadto, Czytelnik może łatwo sprawdzić, że kąt dwuścienny, którego

częścią jest zamalowana na zielono krawędź sześciianu, ma miarę  $\frac{2\pi}{8}$ , a miary dwóch pozostałych kątów dwuściennych to  $\frac{2\pi}{6}$ .

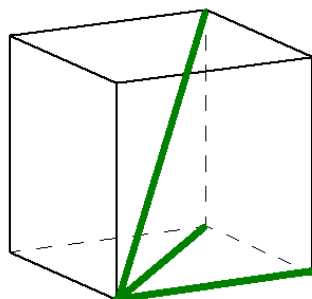
Udało nam się skonstruować czworościan numer 2. z twierdzenia z początku tego rozdziału.

Popatrzmy teraz na szóstkę  $(3, 6, 6, 4, 8, 8)$ . Składają się na nią następujące trójki:  $(3, 6, 6)$ ,  $(3, 8, 8)$  i dwie trójki  $(4, 6, 8)$ . Dzięki temu, że w tym potencjalnym czworościanie są dwa takie same naroża, możemy wyobrazić sobie, że ma on płaszczyznę symetrii. Ponadto, możemy zauważyć, że poprzednio skonstruowany czworościan ma dokładnie te same dwa przystające naroża odpowiadające trójkom  $(4, 6, 8)$ . Gdy przyłożymy obok czworościanu z Rysunku 3.18 dokładnie taki sam czworościan tak, by dwie jego ściany będące trójkątami prostokątnymi idealnie stykały się ze sobą, otrzymamy czworościan odpowiadający szóstce  $(3, 6, 6, 4, 8, 8)$  – dwa kąty dwuściennie o mierze  $\frac{2\pi}{6}$  przyłożone do siebie dały kąt dwuścienny o mierze  $\frac{2\pi}{3}$ . Owy czworościan widzimy na rysunku poniżej.



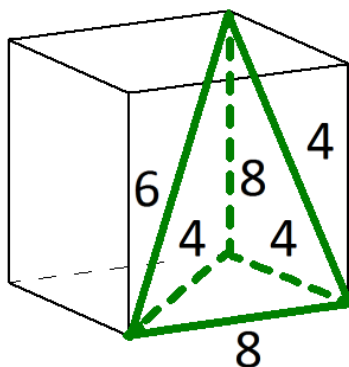
Rysunek 3.19: Czworościan euklidesowy odpowiadający szóstce  $(3, 6, 6, 4, 8, 8)$ , na który składają się dwa czworościany odpowiadające szóstce  $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ . Wprawne oko Czytelnika dostrzeże tu czworościan numer 3. z Twierdzenia 3.1.

Podjmiemy teraz próbę konstrukcji czworościanu odpowiadającego szóstce  $(4, 4, 8, 4, 6, 8)$ . Jego naroża odpowiadają parze trójek  $(4, 4, 8)$  oraz parze trójek  $(4, 6, 8)$ . Widzimy, że znowu pojawia nam się trójka  $(4, 6, 8)$ . Znamy już jedno naroże potencjalnej bryły. Kolejne naroże jest takie samo i będzie znajdować się na drugim końcu krawędzi, która jest częścią kąta dwuściennego o mierze  $\frac{2\pi}{6}$ . Tę sytuację widzimy poniżej:



Rysunek 3.20: Odcinki będące częścią naroża odpowiadającego trójce  $(4, 6, 8)$ .

Zauważmy, że częścią drugiego takiego samego naroża musi być przekątna sześcianu, ponieważ w szóstce  $(4, 4, 8, 4, 6, 8)$  mamy tylko jeden kąt dwuścienny o mierze  $\frac{2\pi}{6}$ , a pozostałe krawędzie odchodzące z tego naroża muszą należeć do kątów dwuściennych o miarach  $\frac{2\pi}{4}$  oraz  $\frac{2\pi}{8}$ . I tak pionowa krawędź odchodząca z tego naroża jest częścią kąta dwuściennego o mierze  $\frac{2\pi}{8}$  (ze względu na to, że „czworościan” stoi na trójkącie prostokątnym równoramiennym, którego kąt ostry ma miarę  $\frac{2\pi}{8}$ ), a ukośna – o mierze  $\frac{2\pi}{4}$ . Poprowadzenie dolnej pionowej krawędzi zamyka przestrzeń między pięcioma pozostałymi krawędziami. Uzyskaliśmy więc kolejny czworościan euklidesowy. Obrazuje to rysunek poniżej.



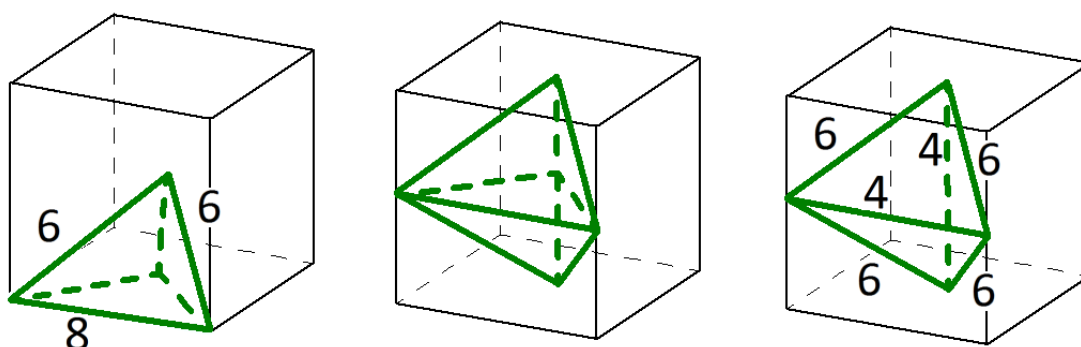
Rysunek 3.21: Czworościan euklidesowy odpowiadający szóstce  $(4, 4, 8, 4, 6, 8)$ .

**Uwaga 3.10.** Czworościan z Rysunku 3.21 to czworościan numer 1. z Twierdzenia 3.1. w skali 2:1.

W ten sposób skonstruowaliśmy już trzy z czterech czworościanów z Twierdzenia 3.1. Przyjrzyjmy się ostatniej szóstce, dla której wyznacznik z Lematu 3.8. jest zerowy.

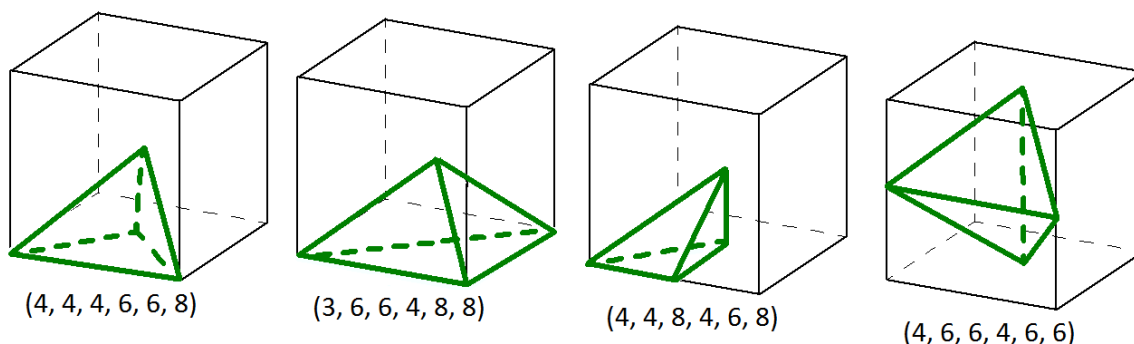
Na szóstkę  $(4, 6, 6, 4, 6, 6)$  składają się cztery trójki  $(4, 6, 6)$ . To oznacza, że wszystkie naroża tego czworościanu są przystające. Naroże odpowiadające trójce  $(4, 6, 6)$  pojawiło się już przy pierwszym czworościanie, jaki udało nam się skonstruować – przy czworościanie dla szóstki  $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ . Oczywiście jest, że dwa kąty dwuścienny o mierze  $\frac{2\pi}{8}$  tworzą kąt dwuścienny będący kątem prostym, dlatego też, aby uzyskać kolejne naroża odpowiadające trójce  $(4, 6, 6)$ , spróbujmy *przykleić* do siebie dwa znane czworościany dla szóstki  $(4, 6, 6, 6, 6, 8)$  ścianami, których krawędzie są opisane cyframi 4, 4 oraz 8.

Popatrzmy na rysunek 3.22. Po lewej stronie znajduje się czworościan euklidesowy odpowiadający szóstce  $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ , zaś po prawej są dwa wspomniane czworościany sklejone ze sobą. Ze względu na to, że wszystkie naroża tak powstałej bryły są identyczne i odpowiadają trójce  $(4, 6, 6)$ , tworzą one czworościan euklidesowy odpowiadający szóstce  $(4, 6, 6, 4, 6, 6)$ .



Rysunek 3.22: Od lewej: czworościan euklidesowy odpowiadający szóstce  $(4, 4, 4, 6, 6, 8)$ , dwa takie czworościany sklejone ze sobą, czworościan odpowiadający szóstce  $(4, 6, 6, 4, 6, 6)$ .

Na poniższym rysunku widzimy cztery czworościany euklidesowe, które udało nam się skonstruować w tej części pracy oraz szóstki im odpowiadające:



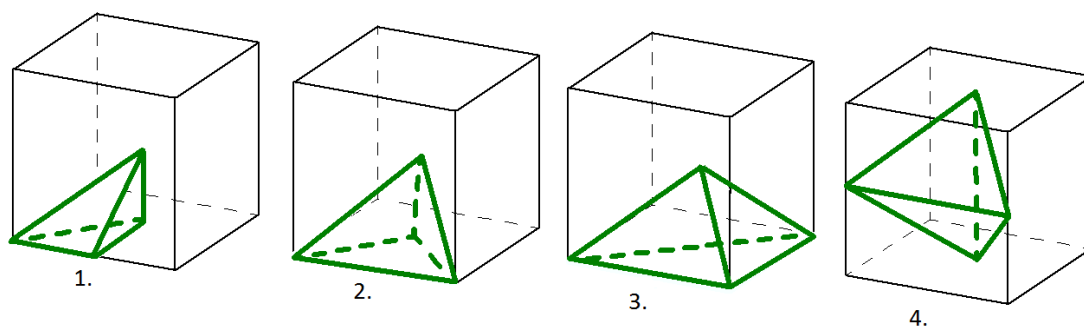
Rysunek 3.23: Czworościany euklidesowe wraz z szóstkami im odpowiadającymi, uszeregowane w kolejności, w jakiej zostały skonstruowane.

Na Rysunku 3.23 znajdują się dokładnie te same czworościany euklidesowe, co na Rysunku 3.1 z Twierdzenia 3.1.

### 3.5 Konstrukcja czworościennych odbiciowych parkietaży przestrzeni

W poprzednim podrozdziale udało nam się skonstruować cztery czworościany euklidesowe. Aby jednak w pełni dowieść Twierdzenia 3.1, należy podjąć próbę konstrukcji czterech odbiciowych parkietaży przestrzeni, których klepkami byłyby wspomniane czworościany.

Przyjrzyjmy się jeszcze raz rzeczonym czworościanom i zauważmy pewne zależności między nimi.



Rysunek 3.24: Czworosciany euklidesowe będaące potencjalnymi klepkami czworoscien-nych odbiciowych parkietaży przestrzeni.

**Obserwacja 3.11.** *Między czworoscianami z powyższego rysunku zachodzą następujące relacje:*

- czworoscian nr 2 można symetrycznie przedzielić płaszczyzną prostopadłą do górnej ściany sześcianu i przechodzącą przez oś symetrii dolnej jego ściany, czego wynikiem będą dwa czworosciany nr 1,
- czworoscian nr 3 można symetrycznie przedzielić płaszczyzną prostopadłą do dolnej ściany sześcianu i przechodzącą przez przekątną tej ściany, czego wynikiem będą dwa czworosciany nr 2,
- czworoscian nr 4 można symetrycznie przedzielić poziomą płaszczyzną przechodzącą przez krawędź czworoscianu dzielącą przednią ścianę sześcianu na połowy i prostopadłą do tejże ściany, czego wynikiem będą dwa czworosciany nr 2.

Innymi słowy, powyższe trzy zależności można zapisać w ten sposób:

- czworoscian nr 2 to dwa czworosciany nr 1,
- czworoscian nr 3 to dwa czworosciany nr 2,
- czworoscian nr 4 to dwa czworosciany nr 2.

Z tej obserwacji wynika, że wystarczy skonstruować odbiciowy parkietaż przestrzeni dla czworoscianu numer 2 i następnie go odpowiednio zmodyfikować tak, by otrzymać pozostałe parkietaże.

Przejdźmy do próby konstrukcji odbiciowego parkietażu przestrzeni, którego klepką byłby czworoscian numer 2. W tym celu przywołajmy fakt, który pojawił się w pierwszym rozdziale:

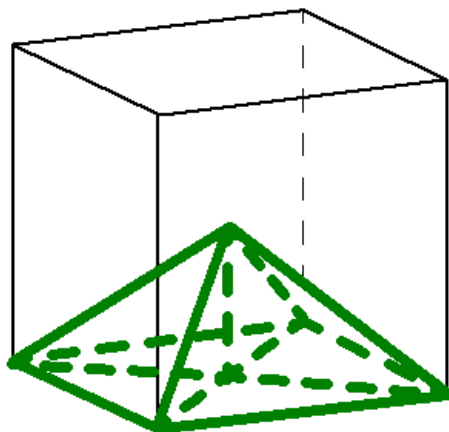
**Fakt 3.12.** *Sześcian jest klepką odbiciowego parkietażu przestrzeni.*

Konstrukcję tego parkietażu można prześledzić w rozdziale pierwszym.

Przyjrzyjmy się ułożeniu kopii czworoscianu numer 2 w sześcianie jednostkowym. Od-  
bijając ten czworoscian najpierw względem jego lewej tylnej ściany, potem względem  
jego prawej tylnej ściany i dokładając jeszcze jeden czworoscian numer 2 pomiędzy dwa



nowe czworościany, otrzymamy ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wysokość jest równa  $\frac{1}{2}$ , a bok podstawy ma długość 1.



Rysunek 3.25: Ostrosłup prawidłowy czworokątny utworzony z czterech czworościanów numer 2.

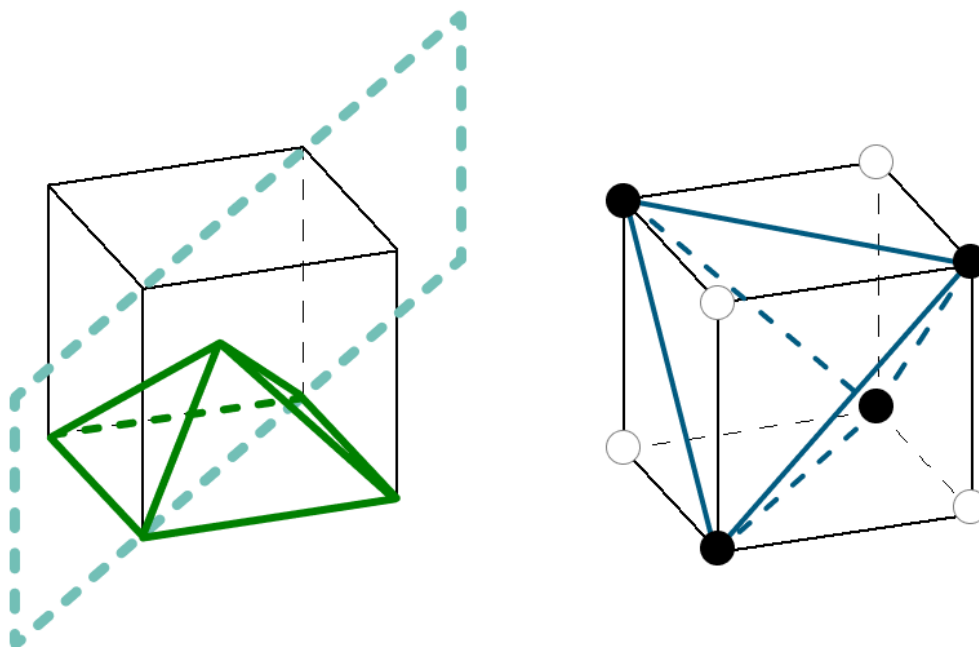
Następnie przedłużamy krawędzie otrzymanego ostrosłupa prawidłowego niebędące krawędziami kwadratowej podstawy tak, by uzyskać przekątne sześcianu. Do każdej z pozostałych pięciu ścian dokładamy ostrosłup prawidłowy czworokątny tak, by wszystkie te ostrosłupy stykały się wierzchołkami niebędącymi wierzchołkami podstawy. W ten sposób z dwudziestu czterech czworościanów numer 2 otrzymaliśmy sześcián, którym możemy wypełnić całą przestrzeń bez luk. Wypełniamy przestrzeń czworościanami, które są ciasno *upakowane* w sześcianiu. Nietrudno zauważyć, że tak skonstruowany parkietaż przestrzeni jest odbiciowy.

Aby utworzyć parkietaż, którego klepką byłby czworościan numer 1, wystarczy wziąć sześcián utworzony z dwudziestu czterech czworościanów numer 2, który został skonstruowany w poprzednim akapicie, i każdy z tych czworościanów przedzielić na pół tak, by otrzymać zeń dwa czworościany numer 1. Mamy więc sześcián, na który składa się czterdzieści osiem ciasno przylegających do siebie czworościanów numer 1. Takimi sześciánami podzielonymi na czworościany wypełniamy przestrzeń bez luk. Nietrudno zauważyć, że tak otrzymany parkietaż to parkietaż odbiciowy.

Podobnie sprawa się ma z czworościanem numer 3. Żeby skonstruować parkietaż, którego klepką byłaby ta bryła, należy wziąć sześcián utworzony z sześciu ostrosłupów prawidłowych czworokątnych i każdy z tych ostrosłupów podzielić płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy i przechodzącą przez jej przekątną tak, by otrzymać dwa czworościany numer 3 w taki sposób, jak po lewej stronie Rysunku 3.26.

Żeby ułożyć w sześcianie dwanaście czworościanów numer 3, pokolorujmy wierzchołki sześcianu na czarno i biało w taki sposób, że każda z krawędzi bryły ma jeden wierzchołek czarny i jeden biały. Następnie połączmy odcinkami każde dwa czarne wierzchołki tak, jak zostało to pokazane po prawej stronie Rysunku 3.26. Poprowadzone odcinki są przekątnymi ścian sześcianu. Wyznaczają one sposób ułożenia czworościanów w sześcianie – należy je układać tak, żeby zaznaczone przekątne były liniami styku dwóch ścian

czworościanów numer 3 będących połówkami kwadratów. Dzięki temu uzyskaliśmy jeden sześcian podzielony na dwanaście przystających czworościanów numer 3. Zobaczmy teraz, jak w podobny sposób uzyskać odbiciowy parkietaż przestrzeni.

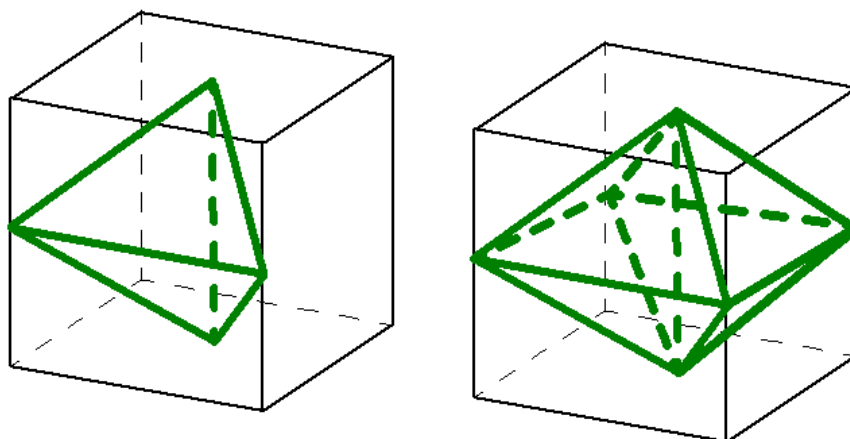


Rysunek 3.26: Na rysunku po lewej niebieskim kolorem zaznaczono płaszczyznę dzielącą ostrosłup prawidłowy czworokątny na dwa czworościany numer 3. Rysunek po prawej prezentuje sposób podziału sześcianu na dwanaście czworościanów numer 3 tak, aby po wypełnieniu przestrzeni podobnie podzielonymi sześcianami uzyskać parkietaż odbiciowy.

Wyobraźmy sobie przestrzeń ciasno wypełnioną sześcianami jednostkowymi w taki sposób, by wierzchołki tego parkietażu były punktami  $(x, y, z)$  o współrzędnych całkowitych. Będziemy następnie chcieli pokolorować wierzchołki tego parkietażu na czarno i biało tak, by w każdym sześcianie to pokolorowanie wyglądało podobnie, jak po prawej stronie Rysunku 26, zaczynając od tego wierzchołka, który jest umiejscowiony w środku układu współrzędnych, i malując go na czarno. Chcemy to zrobić po to, żeby móc połączyć czarne wierzchołki przekątnymi ścian sześcianów. Wracając do pokolorowania, pomalujmy te wierzchołki w taki sposób, żeby suma współrzędnych odpowiadająca czarnym wierzchołkom była liczbą parzystą, a suma współrzędnych odpowiadająca wierzchołkom koloru białego była liczbą nieparzystą. Przy takim kolorowaniu każde dwa wierzchołki sąsiadujące przez krawędź sześcianu będą miały różne kolory, ponieważ sumy współrzędnych ich wierzchołków będą się różnić o jeden. Następnie do każdego z sześcianów *wkładamy* po dwanaście czworościanów numer 3 tak, by przekątne ścian sześcianu wyznaczały linie styku dwóch półkwadratowych ścian czworościanów numer 3. W taki sposób otrzymaliśmy parkietaż złożony z czworościanów numer 3, które są *upakowane* w sześciany po dwanaście sztuk. Łatwo widzimy, że tak uzyskany parkietaż jest odbiciowy.

Spróbujmy teraz uzyskać parkietaż z czworościanu numer 4. Najpierw ustawmy cztery czworościany numer 4 tak, by uzyskać dwupiramidę. Możemy to zrobić, bo kąt dwu-

ścienny wokół tylnej pionowej krawędzi czworościanu jest prosty. Widzimy to na poniższym rysunku.



Rysunek 3.27: Po prawej stronie rysunku mamy dwupiramidę uzyskaną poprzez dostawienie do czworościanu numer 4 widocznego po lewej stronie trzech takich samych czworościanów.

Widzimy, że dwupiramidę można podzielić na pół płaszczyzną poziomą dzielącą sześcian na dwie takie same części tak, by uzyskać dwa ostrosłupy prawidłowe czworokątne sklejone ze sobą. Wiemy już, że na ostrosłup prawidłowy czworokątny składają się cztery czworościany numer 2. W takim razie wystarczy wziąć sześcian podzielony na 24 czworościany nr 2, wyparkietować nim przestrzeń i z każdych dwóch czworościanów nr 2 przylegających do siebie trójkątnymi ścianami stanowiącymi ćwierć ściany sześcianu jednostkowego, utworzyć czworościan numer 4. Widzimy, że tak uzyskany parkietaż jest odbiciowy.

Tak oto uzyskaliśmy cztery odbiciowe parkietaże przestrzeni, których klepkami są odbiciowe czworościany euklidesowe. W ten sposób zakończyliśmy dowód Twierdzenia 3.1. otwierającego ten rozdział i będącego głównym rezultatem niniejszej pracy.



## 4 Literatura

- [1] Kumaszką Patrycja, *O kilku rodzajach regularnych parkietaży płaszczyzny*, praca licencjacka, Wrocław, 2015.
- [2] Praca zbiorowa pod redakcją Witolda Mizerskiego, *Tablice matematyczne*, wyd. Adamantan, Warszawa, 2014.
- [3] Waliszewski Włodzimierz, *Matematyka*, wyd. WSiP, Warszawa, 1990.
- [4] Audet Daniel, *Déterminants sphérique et hyperbolique de Cayley-Menger*, *Bulletin Association mathématique du Québec*, tom LI, numer 2, Montreal, 2011.
- [5] <https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron>, dostęp na 7.07.2020 r.

Rysunki niektórych parkietaży płaszczyzny, brył platońskich oraz parkietaży sferycznych powstały w programie *KaleidoTile* dostępnym na stronie <http://geometrygames.org/KaleidoTile/index.html>, dostęp na 7.07.2020 r.

Rysunki foremnych parkietaży płaszczyzny powstały przy użyciu programu *Tessellation creator*, który jest dostępny na stronie <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Tessellation-Creator>, z dostępem na 10.08.2020 r.

Do wykonania i obróbki pozostałych rysunków wykorzystano programy: *Figma*, *Geoenzo*, *Geogebra*.

Obliczenia wyznaczników z Tabeli 3.2. zostały przeprowadzone z użyciem portalu *Wolfram Alpha*.