

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: ogólna

lic. Paweł Gielgier

**Klasyfikacja zakresów kształtów płytek w
wielokątowych parkietażach izohedralnych o
niesymetrycznych płytkach**

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2020

SPIS TREŚCI

1. Wstęp	3
2. Podstawowe definicje	4
3. Parkietaże o płytkach trójkątnych	11
3.1. Typ IH84 $[6^3]$	12
3.2. Typ IH85 $[6^3]$	12
3.3. Typ IH87 $[6^3]$	14
3.4. Typ IH83 $[6^3]$	15
3.5. Typ IH86 $[6^3]$	16
3.6. Typ IH88 $[6^3]$	17
3.7. Typ IH38 $[3.12^2]$	18
3.8. Typ IH39 $[3.12^2]$	19
3.9. Typ IH77 $[4.6.12]$	21
3.10. Typ IH78 $[4.8^2]$	22
3.11. Typ IH80 $[4.8^2]$	23
3.12. Typ IH79 $[4.8^2]$	24
3.13. Typ IH81 $[4.8^2]$	26
4. Parkietaże o płytkach czworokątnych	28
4.1. Typ IH30 $[3.4.6.4]$	28
4.2. Typ IH31 $[3.4.6.4]$	29
4.3. Typ IH33 $[3.6.3.6]$	31
5. Parkietaże o płytkach pięciokątnych	34
5.1. Typ IH22 $[3^3.4^2]$	34
5.2. Typ IH25 $[3^3.4^2]$	36
5.3. Typ IH23 $[3^3.4^2]$	37
5.4. Typ IH24 $[3^3.4^2]$	39
5.5. Typ IH21 $[3^4.6]$	41
5.6. Typ IH28 $[3^2.4.3.4]$	44
5.7. Typ IH27 $[3^2.4.3.4]$	48
Literatura	54

1. WSTĘP

W poniższej pracy obiektem naszego zainteresowania będą parkietaże izohedralne, czyli takie parkietaże płaszczyzny, w których dla każdych dwóch płytek istnieje *symetria parkietażu* przeprowadzająca jedną płytkę na drugą. Głównie interesują nas *wielokątowe* parkietaże izohedralne o *niesymetrycznych* płytkach (Definicja 2.2 i Definicja 2.11). Parkietaże zostały sklasyfikowane z dokładnością do tzw. *typów izohedralnych* (Definicja 2.25) w książce *Tilings & patterns* B. Grünbaum'a i G.C. Shephard'a [2], w artykule *Theory of planigons* B. N. Delone [1], oraz w pracy magisterskiej *Klasyfikacja parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach* K. Siejek [4].

Celem poniższej pracy jest znalezienie wszystkich możliwych kształtów wielokątnej płytki dla 23 typów parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach spośród wszystkich 46 typów. Wybór takiego zakresu dla typów parkietaży izohedralnych powodowany jest ograniczeniem w zamierzonej wielkości pracy.

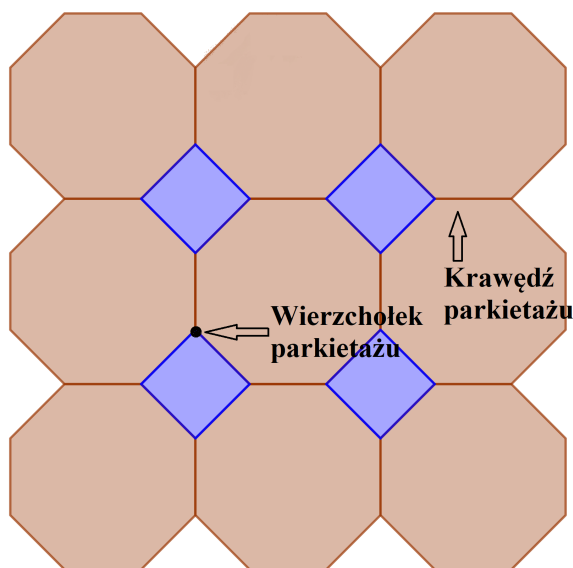
W książce *Introductory Tiling Theory for Computer Graphics* C.S. Kaplan'a [3] można znaleźć szkieletowo opisane kształty dla wszystkich wspomnianych typów, jednak są one zaprezentowane bez dowodu. W poniższej pracy chcemy w prosty i elementarny sposób uzasadnić zakresy kształtów dla płytek z poszczególnych typów parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach, aby były one zrozumiałe i przystępne dla zdolnych i interesujących się geometrią uczniów liceów.

2. PODSTAWOWE DEFINICJE

Definicja 2.1. *Parkietażem płaszczyzny* nazywamy pokrycie całej płaszczyzny pewnymi figurami w taki sposób, że figury wzajemnie na siebie nie zachodzą oraz nie ma dziur. Figury tworzące parkietaż będziemy nazywali *plytkami parkietażu*.

Definicja 2.2. *Parkietażem wielokątowym* nazwiemy parkietaż, którego płytki są wielokątami, zaś część wspólna dwóch płytek może być pojedynczym bokiem, pojedynczym wierzchołkiem lub pusta.

Krawędź parkietażu to wspólny bok dwóch płytek. *Wierzchołek parkietażu* to wspólny wierzchołek dwóch lub więcej płytek.



RYSUNEK 1. Parkietaż wielokątowy z zaznaczonymi narożem, wierzchołkiem i krawędzią.

Definicja 2.3. *Stopniem albo walencyjnością wierzchołka* parkietażu będziemy nazywać liczbę spotykających się w nim płytek parkietażu.

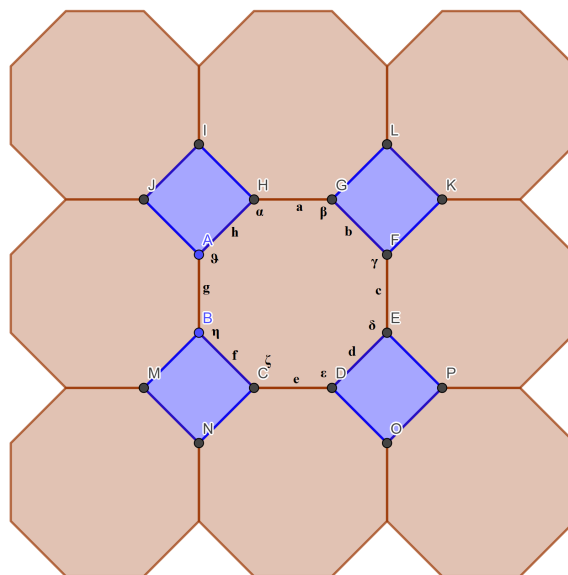
Na Rysunku 1 zaznaczony wierzchołek ma stopień trzy, ponieważ spotykają się w nim trzy płytki: dwie ośmiokątne i jedna czworokątna. Wierzchołki parkietażu będziemy oznaczać dużymi literami alfabetu tak jak wierzchołki płytek. Krawędzie parkietażu będą oznaczane małymi literami alfabetu. Kąty wewnętrzne płytek będziemy oznaczać małymi literami alfabetu greckiego.

Rysunek 2 przedstawia ten sam parkietaż z wprowadzonymi oznaczeniami wierzchołków, krawędzi i kątów.

Definicja 2.4. *Izometria płaszczyzny* to przekształcenie, które zachowuje wymiary i kształty obiektów znajdujących się na płaszczyźnie.

Mamy następujące rodzaje izometrii:

- (1) *Translacja* (inaczej *przesunięcie*) to izometria przesuująca każdy punkt płaszczyzny o zadany wektor \vec{u} .
- (2) *Obrót* o kąt ϕ wokół punktu O . Jest to izometria, która każdy punkt płaszczyzny przemieszcza po okręgu o środku w punkcie O o zadany kąt ϕ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Promieniem tego okręgu jest odległość między środkiem



RYSUNEK 2. Parkietaż wielokątowy z oznaczeniami wierzchołków i krawędzi oraz kątów wewnętrznych płytek

okręgu O a przekształcanym punktem. Punkt O nazywamy środkiem obrotu. W przypadku obrotu o kąt $\phi = \pi$ można mówić o półobrocie albo symetrii środkowej o środku w punkcie O .

- (3) Symetria osiowa (odbicie) względem prostej k to izometria, która przekształca każdy punkt A płaszczyzny na punkt A' płaszczyzny, gdzie oba punkty spełniają następujące warunki:
- punkty A i A' znajdują się na prostej prostopadłej do prostej k ,
 - punkty A i A' znajdują się w tej samej odległości od prostej k ,
 - punkty A i A' znajdują się po przeciwnych stronach prostej k .
- (4) Symetrię z poślizgiem nazwiemy złożeniem symetrii osiowej względem prostej k i translacji o wektor \vec{u} równoległy do prostej k . Prosta k nazywamy osią symetrii z poślizgiem.

Wśród wymienionych izometrii translacja i obrót zachowują orientację, zaś odbicie i symetria z poślizgiem nie zachowują orientacji.

Definicja 2.5. *Symetrią parkietażu* nazwiemy każdą izometrię, która przeprowadza parkietaż na siebie.

Uwaga 2.6. Zwróćmy uwagę, że wśród symetrii parkietażu zawsze jest izometria tożsamościowa.

Definicja 2.7. Parkietaż nazywamy *izohedralnym* wtedy, gdy dla każdych dwóch płytek P_1 i P_2 istnieje symetria parkietażu przeprowadzająca P_1 na P_2 .

Z powyższej definicji wynika, że w parkietażach izohedralnych wszystkie płytki są przystające, tzn. mają ten sam kształt. Rysunek 3 przedstawia przykład parkietażu izohedralnego, którego płytki są przystającymi czworokątami.

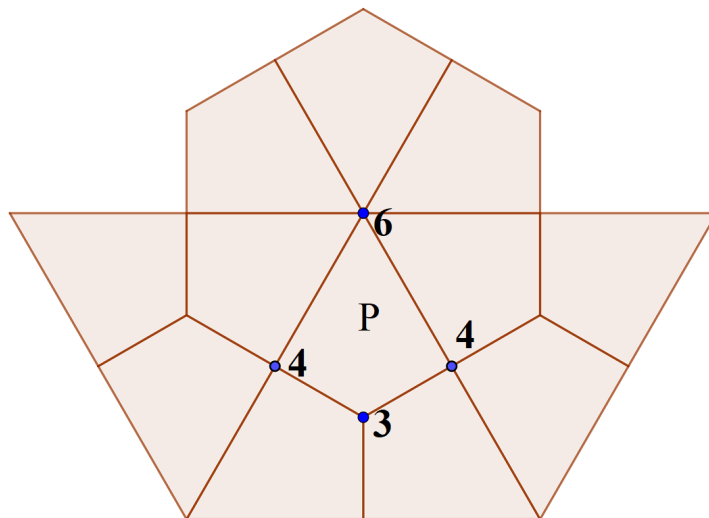
Definicja 2.8. *Typem walencyjnym lub topologicznym* parkietażu izohedralnego nazywamy zestaw stopni wierzchołków parkietażu na obwodzie pojedynczej płytki branych w kolejności występowania na obwodzie płytki przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Typy topologiczne będziemy zapisywać za pomocą kwadratowych nawiasów $([])$, w których będą zapisane liczby oznaczające stopnie wierzchołków płytki oddzielane kropką

(.), np. [4.6.12], [4.8.4.8], [6.6.6]. Przy czym jeżeli obok siebie występują te same liczby, można zapisać typ krócej używając indeksu górnego do zapisania ilości powtarzających się stopni, np. [6.6.6] = [6³], [4.4.6.8] = [4².6.8]. Oczywiście liczb w zapisie typu walencyjnego będzie tyle samo, ile wierzchołków w płytce w parkietażu izohedralnym.

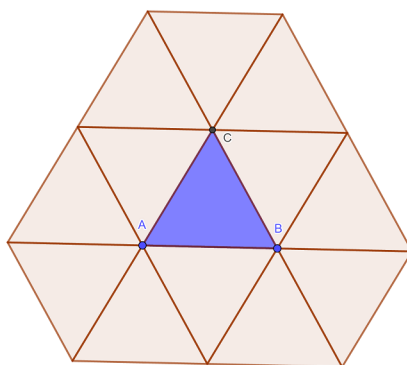
Należy pamiętać, że kolejność liczb w zapisie typu topologicznego ma znaczenie, mianowicie typ [3.4.6.4] jest tym samym typem co [4.6.4.3], ale nie tym samym co [4.3.6.4].

Przykład 2.9. (1) Typ topologiczny [3.4.6.4] oznacza, że w czworokątnej płytce jeden wierzchołek ma stopień 3, a potem kolejne wierzchołki po obwodzie płytki P będą miały stopnie 4, 6 i 4. (patrz Rysunek 3).



RYSUNEK 3. Typ topologiczny [3.4.6.4]

(2) Typ topologiczny [6³] oznacza, że w każdym wierzchołku spotyka się 6 płytek. W zapisie 6³ liczba 6 oznacza liczbę płytek spotykających się w jednym wierzchołku, zaś liczba 3 to liczba wierzchołków znajdujących się w pojedynczej płytce (patrz Rysunek 4).



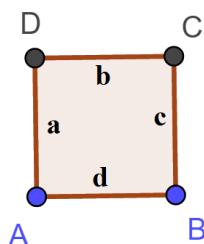
RYSUNEK 4. Przy każdym wierzchołku spotyka się sześć płytek

Na potrzeby kolejnych definicji należy określić pojęcie orientacji płytki.

Definicja 2.10. *Orientacją płytki* będziemy nazywać kierunek (zgodny bądź przeciwny do ruchu wskazówek zegara), względem którego oznaczamy krawędzie płytki.

Krawędzie płytki będziemy oznaczać zgodnie z kolejnością występowania liter w alfabecie łacińskim.

Na Rysunku 5 mamy przykład kwadratowej płytki z orientacją zgodną z ruchem wskazówek zegara.



RYSUNEK 5. Płytki kwadratowa, w której mamy orientację zgodną z ruchem wskazówek zegara

Definicja 2.11. Płytki w pakiecie izohedralnym jest *niesymetryczna*, gdy nie istnieje różna od tożsamościowej symetria parkietu przekształcająca wybraną płytkę na samą siebie.

- Uwaga 2.12.**
- (1) Jeżeli jedna płytki parkietu izohedralnego jest niesymetryczna, to każda inna płytki tego parkietu jest niesymetryczna.
 - (2) Niesymetryczność płytki może wynikać z braku symetrii własnych wielokąta, którego kształt ma płytki.
 - (3) Może się też zdarzyć, że płytki ma kształt wielokąta posiadającego symetrie własne, ale symetria parkietu izohedralnego sprawia, że płytki staje się niesymetryczna.
 - (4) W parkiecie izohedralnym, którego płytki mają symetrie własne, możemy poetykietować boki płytek i wymagać aby symetria parkietu zachowywała te etykiety i dzięki etykiety płytki będą niesymetryczne nawet mając symetryczny kształt (patrz Rysunek 6).

Poniższa definicja wprowadza pojęcie parkietu izohedralnego o niesymetrycznych płytkach.

Definicja 2.13. *Parkietem izohedralnym o niesymetrycznych płytkach* nazwiemy parkiet izohedralny, którego płytki spełniają Definicję 2.11.

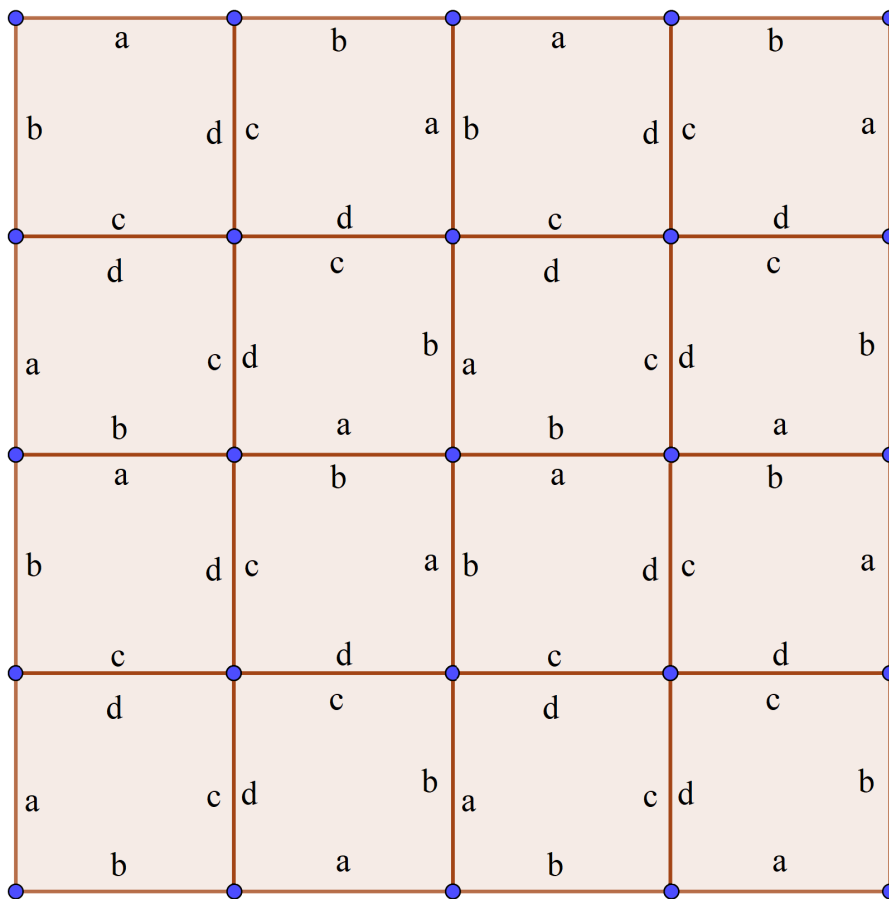
Parkiet izohedralny o niesymetrycznych płytkach mają następującą własność:

Lemat 2.14. *W izohedralnym parkiecie o niesymetrycznych płytkach dla dowolnych dwóch płytek P_1 i P_2 istnieje dokładnie jedna symetria parkietu, która przeprowadza płytkę P_1 na P_2 .*

Uwaga 2.15. Mając dowolny parkiet izohedralny o dowolnych płytkach zawsze możemy dokonać następującego etykietowania płytek parkietu:

- (1) Wyróżnimy jedną płytkę parkietu P_1 , a następnie krawędziom tej płytki nadamy parami różne etykiety.
- (2) Dla dowolnej innej płytki P_2 w parkiecie rozpatrzmy jedyną symetrię przekształcającą P_1 na P_2 jednocześnie przenosząc za pomocą tej symetrii etykiety z P_1 na P_2 .
- (3) Powtarzamy krok 2 aż wszystkie płytki w parkiecie będą poetykietowane.

W ten sposób otrzymamy zestaw etykiet na bokach wszystkich płytek w parkiecie.



RYSUNEK 6. Parkietaż izohedralny o kwadratowych poetykietowanych płytkach, które są niesymetryczne

Definicja 2.16. Powiemy, że płytki P_1 i P_2 *przylegają* do siebie, gdy ich częścią wspólną jest pojedynczy bok.

Zauważmy, że etykiety na krawędziach parkietażu pochodzące od dwóch płytek występują w stałych parach. Oznacza to, że dla każdych dwóch płytek w parkietażu izohedralnym przylegających do siebie przez konkretną krawędź, jeśli w jednej płytce ta krawędź będzie miała etykietę "a", to w przylegającej płytce ta krawędź będzie miała etykietę "c".

W następnej części przytoczymy serię znanych lematów o parkietażach izohedralnych o niesymetrycznych płytkach, których nie będziemy dowodzić. Niech będą prawdziwe następujące założenia dla Lematów 2.17 - 2.23:

- (1) Załóżmy, że mamy parkietaż izohedralny o niesymetrycznych płytkach oraz w każdej płytce boki zostały poetykietowane według Uwagi 2.15.
- (2) Załóżmy też, że płytki P_1 i P_2 przylegają do siebie przez bok o etykiecie "a" w płytce P_1 .

Lemat 2.17. *Niech P_1 i P_2 będą płytkami parkietażu izohedralnego o niesymetrycznych płytkach i niech przylegając do siebie przez bok o etykiecie "a" w P_1 . Jeżeli bok o etykiecie "a" płytki P_1 jest przekształcony przez symetrię parkietażu na bok o tej samej etykiecie "a" płytki P_2 , to boki te mają tę samą długość, ponieważ każda symetria parkietażu jest izometrią zachowującą odległości i kształty.*

Lemat 2.18. *Jeżeli wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma etykietę "a" w P_1 i tę samą etykietę "a" w P_2 oraz symetria parkietażu przekształcająca P_1 na P_2 zachowuje orientację, to tę symetrię będzie półobrót względem środka boku o etykietę "a" (patrz Rysunek 7a).*

Lemat 2.19. *Jeżeli wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma etykietę "a" w P_1 i tę samą etykietę "a" w P_2 oraz symetria parkietażu przekształcająca P_1 na P_2 nie zachowuje orientacji, to tę symetrię będzie odbicie względem prostej będącej przedłużeniem boku o etykietę "a" (patrz Rysunek 7b).*

Lemat 2.20. *Jeżeli wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma etykietę "a" w P_1 i inną etykietę niż "a" w P_2 i bok o etykietę "a" w P_2 ma wspólny wierzchołek z bokiem o etykietę "a" w P_1 oraz symetria parkietażu przekształcająca P_1 na P_2 zachowuje orientację, to tę symetrię jest obrót wokół powyższego wspólnego wierzchołka boków (patrz Rysunek 7c).*

Lemat 2.21. *Jeżeli wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma etykietę "a" w P_1 i inną etykietę niż "a" w P_2 i bok o etykietę "a" w P_2 ma wspólny wierzchołek z bokiem o etykietę "a" w P_1 oraz symetria parkietażu przekształcająca P_1 na P_2 nie zachowuje orientacji, to tę symetrię będzie symetria z poślizgiem (patrz Rysunek 7d).*

Lemat 2.22. *Jeżeli wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma etykietę "a" w P_1 i inną etykietę niż "a" w P_2 i bok o etykietę "a" w P_2 nie ma wspólnego wierzchołka z bokiem o etykietę "a" w P_1 oraz symetria parkietażu przekształcająca P_1 na P_2 zachowuje orientację, to tę symetrię jest translacja (patrz Rysunek 7e).*

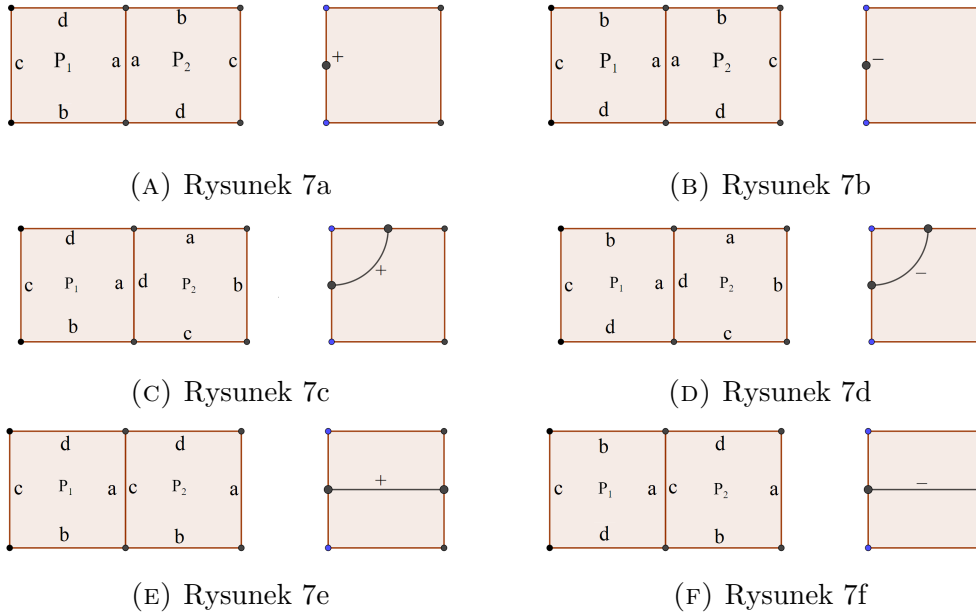
Lemat 2.23. *Jeżeli wspólny bok płytek P_1 i P_2 ma etykietę "a" w P_1 i inną etykietę niż "a" w P_2 i bok o etykietę "a" w P_2 nie ma wspólnego wierzchołka z bokiem o etykietę "a" w P_1 oraz symetria parkietażu przekształcająca P_1 na P_2 nie zachowuje orientacji, to będzie ona symetrię z poślizgiem, której osią jest prosta przechodząca przez środki odcinków, których końce to wierzchołek boku o etykietę "a" w P_1 i jego obraz na boku o etykietę "a" w P_2 przez tę symetrię (patrz Rysunek 7f).*

Definicja 2.24. *Diagramem sąsiedownia w parkietażu izohedralnym o niesymetrycznych płytkach będziemy nazywać rysunek przedstawiający pojedynczą płytkę P_1 parkietażu izohedralnego z symbolami i etykietami, które będą symbolicznie wskazywały na symetrie parkietażu przekształcające płytkę P_1 w sąsiadujące z nią płytki. W diagramie sąsiedownia na środku każdego boku będzie znajdowała się czarna kropka (•). Mamy następujące symbole:*

- Gdy płytki P_1 i P_2 spełniają Lemat 2.18, to na diagramie sąsiedownia symbol umieszczony na wspólnym boku płytek P_1 i P_2 • ma znak + (Rysunek 7a).
- Gdy płytki P_1 i P_2 spełniają Lemat 2.19, to na diagramie sąsiedownia symbol umieszczony na wspólnym boku płytek P_1 i P_2 • ma znak – (Rysunek 7b).

Jeżeli bok oznaczony etykietą "a" płytki P_1 przylega do boku w sąsiedniej płytce P_2 oznaczonego inną etykietą "b", to boki o etykietach "a" i "b" w P_1 są połączone łukiem o końcach w środkach obu boków oznaczonych symbolami •.

- Gdy płytki P_1 i P_2 spełniają Lemat 2.20, to łuk na diagramie sąsiedownia łączący wskazane boki ma znak + (Rysunek 7c).
- Gdy płytki P_1 i P_2 spełniają Lemat 2.21, to łuk na diagramie sąsiedownia łączący wskazane boki ma znak – (Rysunek 7d).
- Gdy płytki P_1 i P_2 spełniają Lemat 2.22, to łuk na diagramie sąsiedownia łączący wskazane boki ma znak + (Rysunek 7e).
- Gdy płytki P_1 i P_2 spełniają Lemat 2.23, to łuk na diagramie sąsiedownia łączący wskazane boki ma znak – (Rysunek 7f).



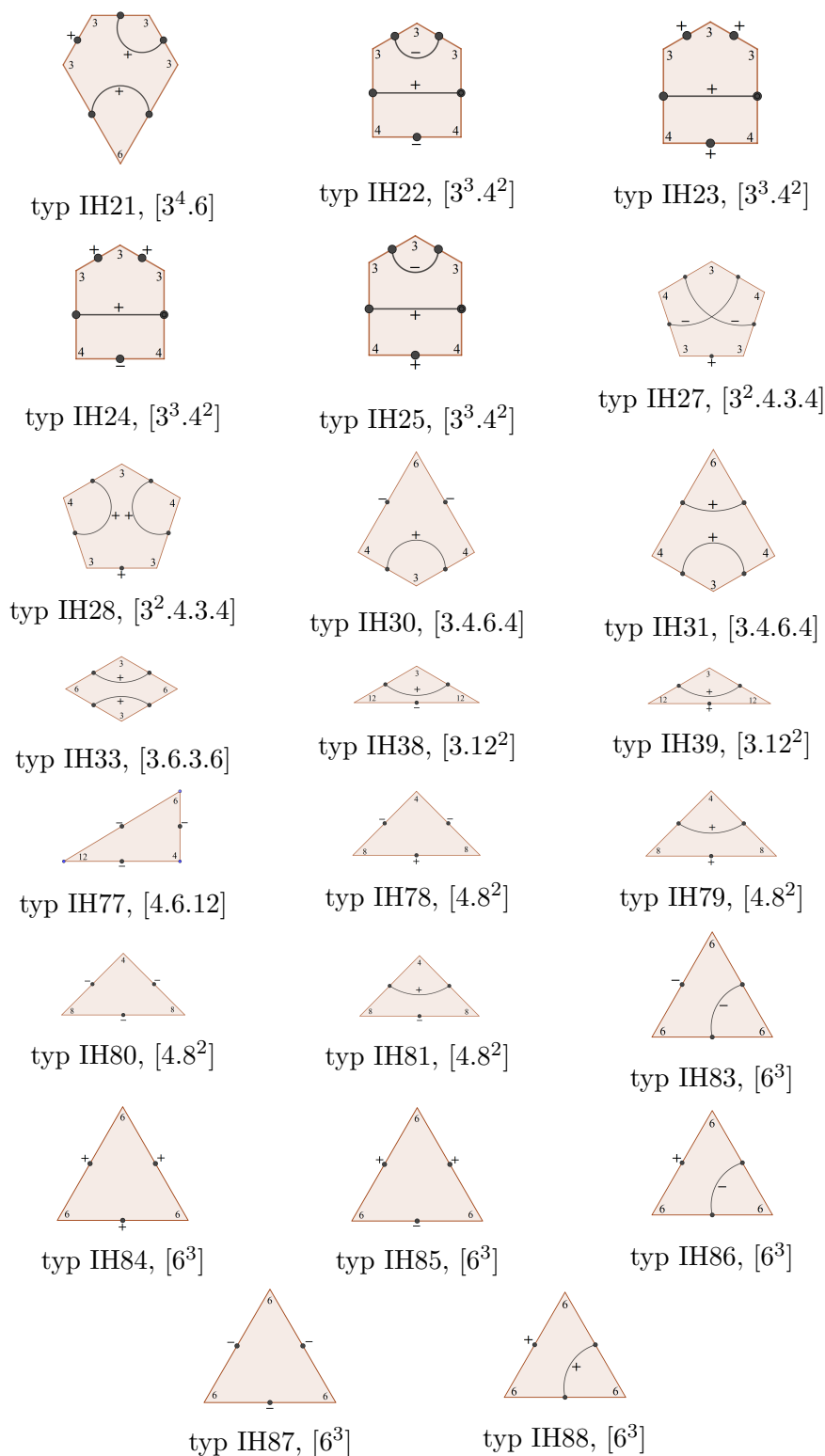
RYSUNEK 7. diagramy sąsiedownia dla symetrii z lematów 2.18-2.23

Należy zwrócić uwagę, że w rysunkach 7a, 7c i 7e przedstawione izometrie zachowują orientację płytki (stąd znak +), zaś rysunki 7b, 7d, 7f przedstawiają izometrie nie zachowujące orientacji (stąd znak -).

Definicja 2.25. Dwa parkietaże izohedralne należą do tego samego typu, zwanego *typem izohedralnym* wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam typ walencyjny oraz płytki mają ten sam diagram sąsiedownia.

Istnieje 46 typów parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach, które zostały sklasyfikowane przez Grünbaum'a i Shepard'a w książce [2], a także inną metodą przez Katarzynę Siejek w pracy magisterskiej [4]. Wśród nich 16 typów dotyczy płytek czworokątnych o typie walencyjnym $[4^4]$ i 7 typów dotyczy płytek o kształcie sześciokątnym. Pozostałe 23 typy parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach przedstawiamy na Rysunku 8. Liczby na rysunkach oznaczają stopnie walencyjne wierzchołków.

Celem pracy jest znalezienie dla każdego spośród 23 typów parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach przedstawionych na Rysunku 8 wszystkich możliwych kształtów dla wielokątnej płytki w parkietażach danego typu. Wybór takiego zakresu typów parkietaży izohedralnych powodowany jest ograniczeniem w zamierzonej wielkości tejże pracy. W następnych rozdziałach będziemy najpierw rozpatrywali parkietaże izohedralne, których płytki mają kształt trójkąta, następnie parkietaże, których płytki mają kształt czworokąta i pięciokąta. Przyjęta kolejność związana jest z własnościami płytek w niektórych typach parkietaży izohedralnych, które będą wykorzystywane w parkietażach izohedralnych innych typów, aby ułatwić niektóre rozumowania. W następnym rozdziale o parkietażach izohedralnych o płytkach trójkątnych także przyjęta kolejność ma ułatwić niektóre z rozumowań.



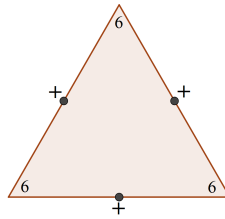
RYSUNEK 8. 23 typy izohedralne parkietaży o niesymetrycznych płytkach nie będących sześciokątami oraz o typach topologicznych różnych od $[4^4]$

3. PARKIETAŻE O PŁYTKACH TRÓJKĄTNYCH

W poniższym rozdziale naszym obiektem zainteresowania będą parkietaże izohedralne o płytkach w kształcie trójkąta. Dla każdego typu określimy jaki jest zakres kształtu trójkątnej płytki tworzącej parkietaż izohedralny oraz udowodnimy, że dla wyznaczonego

zakresu kształtów płytki rzeczywiście daje się utworzyć izohedralny parkietaż o zadanym typie izohedralnym. Kolejność rozpatrywania typów została dobrana ze względu na rosnący poziom trudności oraz w ten sposób, aby móc w dalszych rozważaniach niekiedy korzystać z poprzednich. Symbole typów izohedralnych używane w tym i w kolejnych rozdziałach odnoszą się do oznaczeń wprowadzonych w książce [1] i zastosowanych w Rysunku 8.

3.1. Typ IH84 [6³]. Parkietaż IH84 o typie topologicznym [6³] tworzą płytki trójkątne z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 9. Przypomnijmy, że znak + przy symbolu • na boku płytki oznacza, że symetrią parkietażu przekształcającą płytkę parkietażu w sąsiednią jest półobrót względem środka wspólnego boku obu płytek o wspomnianym symbolu.



RYSUNEK 9. typ IH84, [6³]

Fakt 3.1. *Dla płytki w kształcie dowolnego trójkąta istnieje parkietaż izohedralny typu IH84 [6³] złożony z takich płytek.*

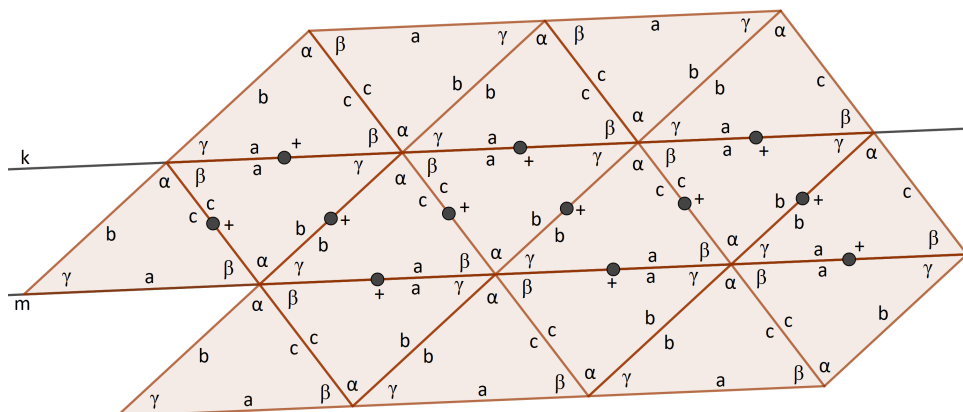
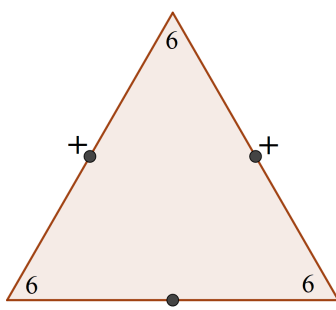
Dowód. Niech T będzie płytką w kształcie dowolnego trójkąta o bokach oznaczonych a , b , c zaopatrzoną w diagram sąsiedowności jak na Rysunku 9. Zestawmy ze sobą siedem płytek T zgodnie z regułami sąsiedowności (patrz na płytki pomiędzy prostymi k i m na Rysunku 10). Mając wyjściową płytkę T kolejna płytkę T' powstaje przez półobrót względem środka boku, przez który sąsiaduje z płytką T (Lemat 2.18). Zauważmy jednocześnie, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Kontynuując dokładanie kolejnych płytek w obie strony w nieskończoność otrzymujemy pas trójkątów zawartych między prostymi k i m (wyznaczonymi przez odpowiednie boki trójkątów). Zwróćmy też uwagę, że pas powyżej prostej k i pas poniżej prostej m są przystające do środkowego pasa, wynika to z reguły przenoszenia, i także można je kontynuować w nieskończoność w obie strony. Oczywiście możemy tworzyć nowe pasy w nieskończoność za pomocą reguły przenoszenia, a w ten sposób zapełnimy całą płaszczyznę przystającymi płytkami T . \square

3.2. Typ IH85 [6³]. Parkietaż izohedralny o typie IH85 [6³] tworzą płytki trójkątne z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 11. Przypomnijmy, że znak – przy symbolu • na boku płytki oznacza, że symetrią parkietażu przekształcającą płytkę parkietażu w sąsiednią jest odbicie względem wspólnego boku obu płytek o wspomnianym symbolu.

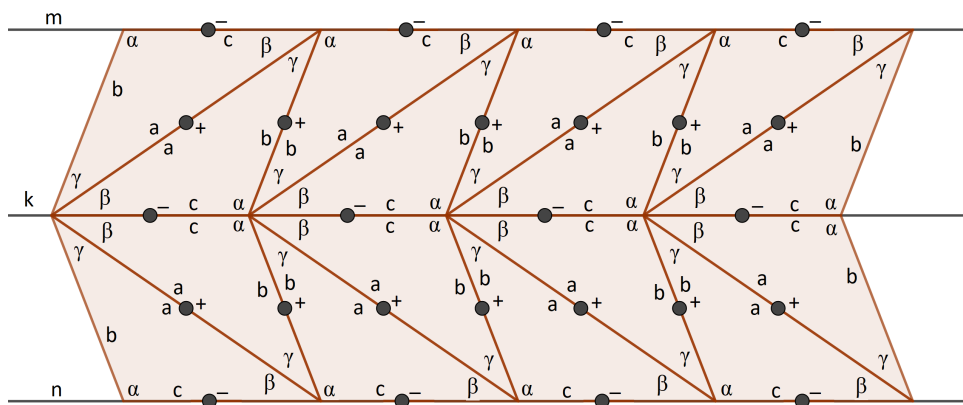
Sformujemy następujący fakt:

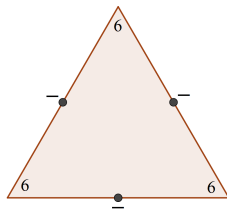
Fakt 3.2. *Dla płytki o kształcie dowolnego trójkąta istnieje parkietaż izohedralny typu IH85 [6³] złożony z takich płytek.*

Dowód. Pokażemy, że wypełniając płaszczyznę jednakowymi trójkątnymi płytkami o dowolnym kształcie i zgodnie z regułami sąsiedowności wyznaczonymi przez diagram sąsiedowności dla tego typu (Rysunek 11) otrzymamy parkietaż izohedralny typu IH85 [6³]. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę takimi płytkami jak na Rysunku 12 korzystając z Lematów 2.18 i 2.19. Zauważmy, że w pewnym momencie otrzymamy dwa pasy trójkątów,

RYSUNEK 10. Trzy pasy trójkątów o płycce z parkietaża IH84 [6³]RYSUNEK 11. Parkietaż IH85 [6³]

które są symetryczne względem prostej k , która jest osią odbicia. Pasy te powstają dzięki temu, że $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Oba pasy możemy kontynuować w obie strony w nieskończoność stosując reguły przenoszenia wynikające z diagramu sąsiedownia. Zwróćmy uwagę, że proste k , m i n są równoległe (kąty naprzemianległe) oraz są osiami odbicia względem których możemy odbić pasy trójkątów i kontynuować te odbicia w nieskończoność. Stąd zapełniamy całą płaszczyznę płytkami. \square

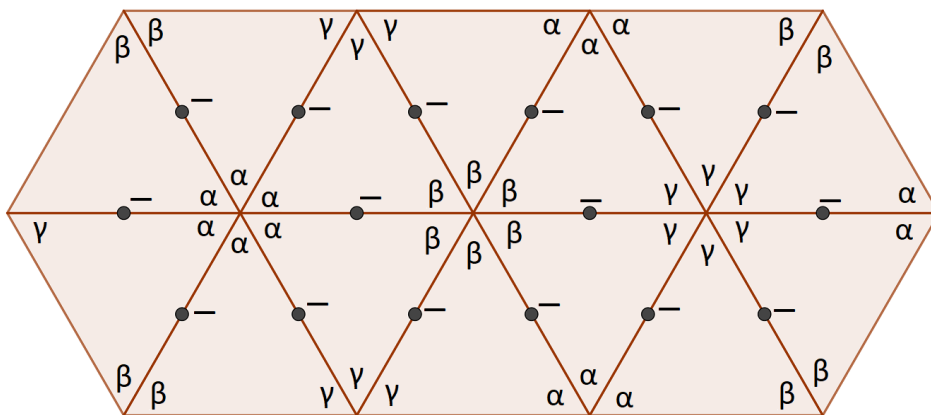
RYSUNEK 12. Pasy płytek trójkątnych z parkietażu typu IH85 [6³]

RYSUNEK 13. Parkietaż izohedralny IH87 $[6^3]$

3.3. **Typ IH87** $[6^3]$. Parkietaż izohedralny IH87 $[6^3]$ tworzą płytki trójkątne z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 13. Przypomnijmy, że znak $-$ przy symbolu \bullet na boku płytki oznacza, że symetrią parkietażu przekształcającą płytkę parkietażu w sąsiednią jest odbicie względem wspólnego boku obu płytek o wspomnianym symbolu.

Uzasadnimy, że te płytki będą trójkątami równobocznymi. Wynika to z następujących obserwacji (patrz Rysunek 14):

- Wokół jednego wierzchołka spotyka się sześć przystających płytek (typ topologiczny).
- Kąty przy ustalonym wierzchołku w sześciu spotykających się wokół tego wierzchołka płytkach mają tę samą miarę.
- Stąd wynika, że każdy z kątów przy ustalonym wierzchołku ma 60° , a zatem również kąty $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.
- Zatem potencjalne płytki w parkietażu typu IH87 $[6^3]$ muszą mieć kształt trójkąta równobocznego. Możemy zmieniać w nich tylko długość boku.

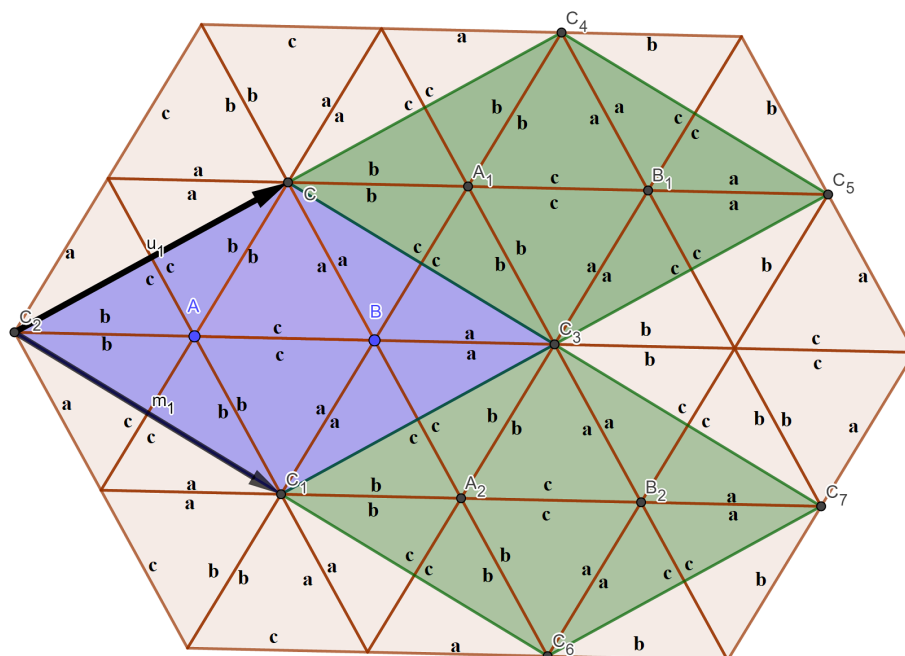
RYSUNEK 14. Fragment parkietażu IH87 $[6^3]$

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 3.3. *Dla dowolnej długości boku płytki o kształcie trójkąta równobocznego istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH87 $[6^3]$ złożony z takich płytek.*

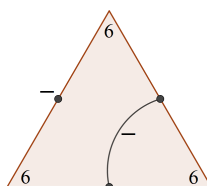
Dowód. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami według reguł z diagramu sąsiedowności (Rysunek 13) zgodnie z Lematem 2.19. W pewnym momencie otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 15. Łącząc wierzchołki C, C_3, C_1, C_2 otrzymujemy równoległobok zawierający sześć płytek trójkątnych (dwie całe i osiem połówek). Następnie możemy przesunąć równoległobok $CC_3C_1C_2$ o wektor u_1 i otrzymamy przystający równoległobok $C_4C_5C_3C$ także zawierający sześć płytek (dwie całe i osiem połówek). Podobnie możemy zrobić korzystając z wektora m_1 . W ten sposób przesuwając kolejne równoległoboki

wypełnimy całą płaszczyznę równoległobokami, które nie pozostawią pustych miejsc i nie będą na siebie nachodzić (translacja zachowuje kształt i rozmiar). Zatem powstanie parkietaż całej płaszczyzny. \square



RYSUNEK 15. Równoległobok przesunięty o wektory u_1 i m_1

3.4. **Typ IH83** $[6^3]$. Parkietaż typu IH83 $[6^3]$ jest utworzony z płytek trójkątnych o diagramie sąsiedowności jak na Rysunku 16. Przypomnijmy, że łuk z minusem oznacza, że symetria parkietażu przekształcającą płytkę parkietażu w sąsiednią jest symetria z poślizgiem, gdzie oś odbicia to prosta przechodząca przez środki boków połączonych łukiem. Przypomnijmy też, że boki połączone łukiem są równej miary (Lemat 2.17).



RYSUNEK 16. Diagram sąsiedowności dla płytek parkietażu IH83 $[6^3]$

Twierdzę, że potencjalna płytka w parkietażu IH83 $[6^3]$ musi być trójkątem równoramiennym. Wynika to z Lematu 2.21, gdzie boki połączone łukiem muszą mieć tę samą długość, ponieważ symetria parkietażu przekształca jeden bok na drugi.

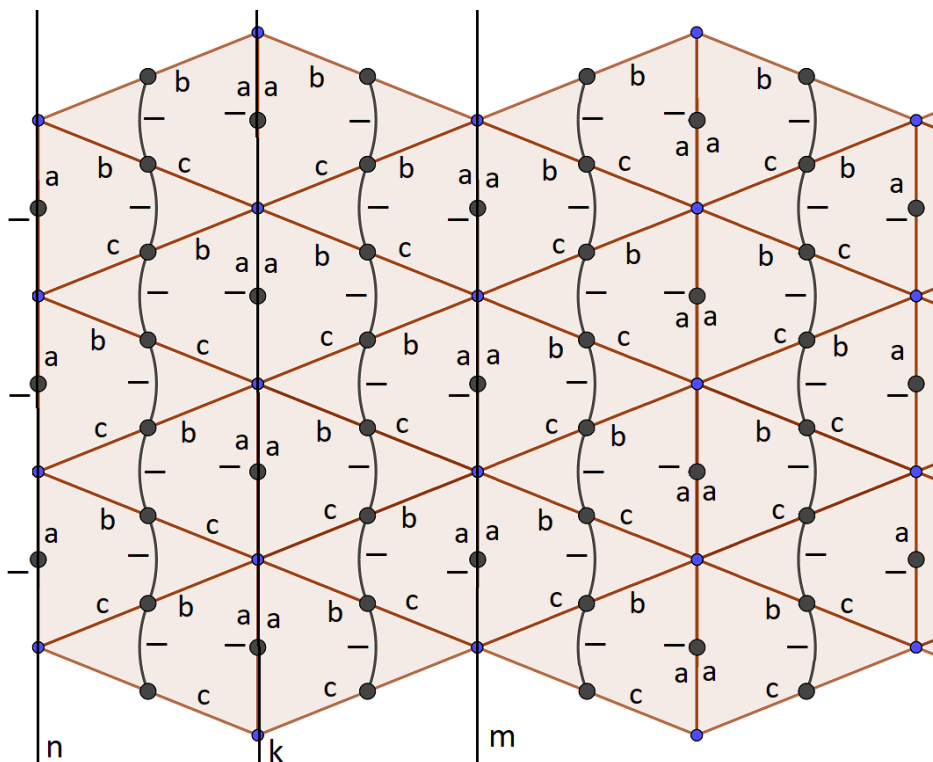
Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 3.4. *Dla dowolnych długości ramion i podstawy płytki o kształcie trójkąta równoramiennego istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH83 $[6^3]$ złożony z takich płytek.*

Dowód. Niech T będzie płytką w kształcie dowolnego trójkąta równoramiennego. Zaczniemy wykładać płaszczyznę płytkami T według diagramu sąsiedownia. Otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 17. Możemy dokonać dwóch obserwacji:

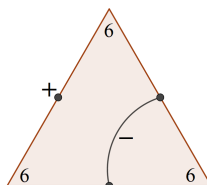
- (1) Trójkąty połączone łukami tworzą pasy, które możemy wypełniać płytkami w nieskończoność w obie strony.
- (2) Dwa pasy połączone prostą utworzoną ze wspólnych boków (prosta k) tworzą większy nieskończony pas trójkątów, który możemy odbić względem prostej m i n . Powtarzając tę czynność nieskończenie wiele razy otrzymamy parkietaż całej płaszczyzny złożony z płytek T .

□



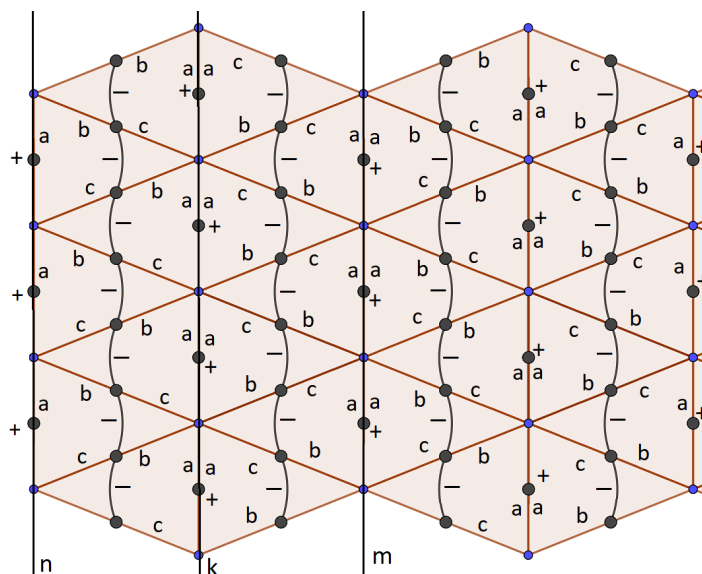
RYSUNEK 17. Fragment płaszczyzny wyłożony płytkami o diagramie sąsiedownia z Rysunku 16

3.5. **Typ IH86** $[6^3]$. Parkietaż izohedralny typu IH86 $[6^3]$ tworzą trójkątne płytki z diagramem sąsiedownia jak na Rysunku 18.



RYSUNEK 18. Diagram sąsiedownia dla płytki w parkietażu izohedralnym IH86 $[6^3]$

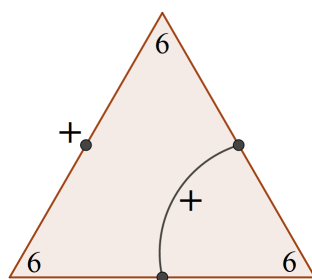
Z tego samego powodu jak w przypadku parkietażu typu IH83, każda płytka parkietażu typu IH86 musi być trójkątem równoramiennym. Rysunek 19 przedstawia fragment parkietażu.

RYSUNEK 19. Fragment parkietażu typu IH86 [6³]

Fakt 3.5. Dla dowolnych długości ramion i podstawy płytki o kształcie trójkąta równoramiennego istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH86 [6³] złożony z takich płytek.

Dowód tego faktu jest analogiczny do dowodu dla parkietażu typu IH83.

3.6. **Typ IH88 [6³].** Parkietaż typu IH88 [6³] tworzą trójkątne płytki o diagramie sąsiedowności przedstawionym na Rysunku 20. Przypomnijmy, że łuk z plusem oznacza, że symetrią parkietażu przekształcającą płytkę parkietażu w sąsiednią jest obrót wokół wspólnego wierzchołka boków połączonych tym łukiem, a zatem boki połączone łukiem są równej miary.

RYSUNEK 20. Diagram sąsiedowności dla płytki z parkietażu izohedralnego typu IH88 [6³]

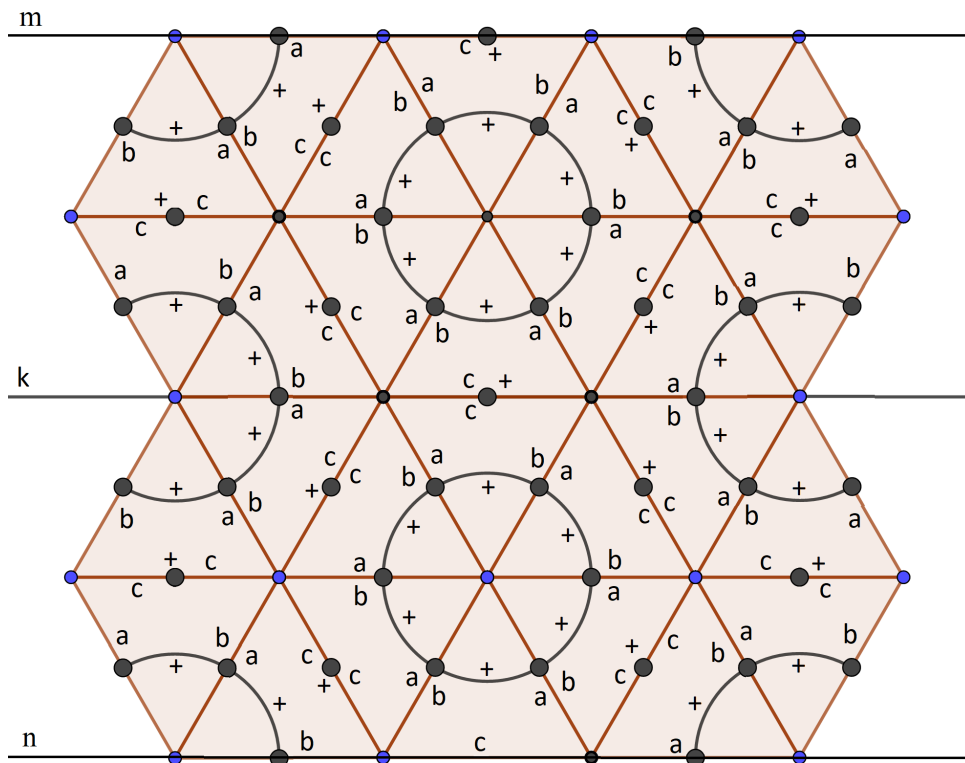
Pokażemy, że potencjalny kształt płytki w parkietażu typu IH88 [6³] musi być trójkątem równobocznym. Korzystając z Lematu 2.20 wiemy, że dwa z boków trójkątnej płytki mają tę samą miarę, bo są połączone łukiem. Dodatkowo symetrią parkietażu przekształcającą płytkę P_1 w przyległą do niej płytkę P_2 jest obrót względem wspólnego wierzchołka, co wynika z plusa przy łuku (Rysunek 20). Dokonując kolejnych obrotów płytki względem wybranego wierzchołka, dojdziemy do momentu, gdy będziemy mieli sześć takich samych płytek o kształcie trójkąta równoramiennego o wspólnym wierzchołku i przylegających do siebie ramionami. Kąt między ramionami w każdej płytce będzie miał miarę 60° (bo

dzielimy kąt pełny na sześć równych części). Stąd kąty przy podstawie w każdej płytce też będą miały po 60° . Zatem każda z tych płytek jest trójkątem równobocznym.

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 3.6. *Dla dowolnej długości boku płytki o kształcie trójkąta równobocznego istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH88 [6³] złożony z takich płytek.*

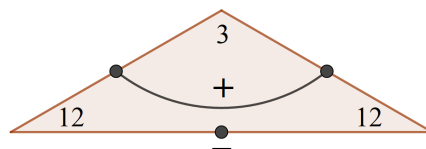
Dowód. Niech T będzie płytką o kształcie trójkąta równobocznego o dowolnej długości boku zaopatrzoną w diagram sąsiedowności jak na Rysunku 20. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami T zgodnie z regułami sąsiedowności wykorzystując Lematy 2.18 i 2.20. Po pewnym czasie otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 21. Zauważmy, że otrzymaliśmy dwa pasy powyżej i dwa pasy poniżej prostej k, które można przedłużyć w nieskończoność. Zwróćmy też uwagę na to, że dwa pasy powyżej prostej k powstają przez półobrot pasów poniżej prostej k względem środka dowolnego krawędzi na prostej k. Podobnie możemy wykonać półobroty dwóch pasów powyżej prostej k względem środka dowolnej krawędzi na prostej m i następnie w nieskończoność w górę. Analogicznie możemy postąpić w przypadku dwóch pasów poniżej prostej k i dowolnej krawędzi na prostej n i w nieskończoność w dół. \square



RYSUNEK 21. Fragment parkietażu typu IH88 [6³]

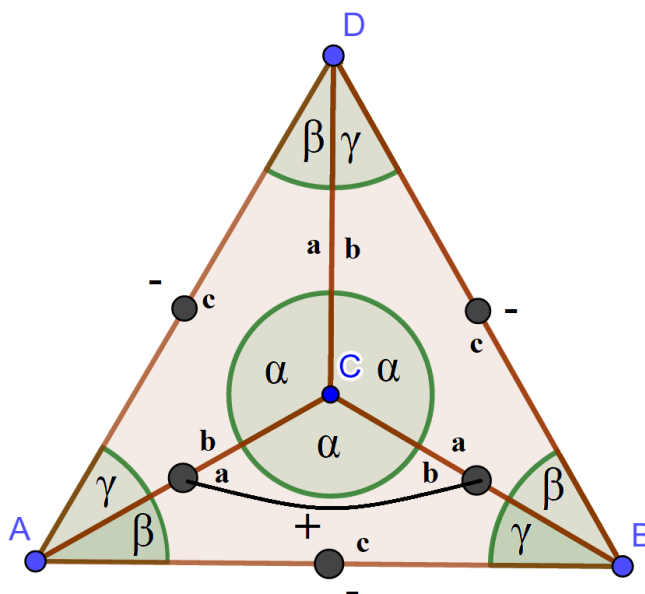
3.7. Typ IH38 [3.12²]. Parkietaż izohedralny typu IH38 [3.12²] tworzą płytki trójkątne, których diagram sąsiedowności widzimy na Rysunku 22.

Z Lematu 2.20 wiemy, że symetria parkietażu przekształcająca płytki, których boki połączone są łukiem z plusem jest obrotem wokół wspólnego dla tych boków wierzchołka oraz boki te są tej samej długości. Stąd płytki te są trójkątami równoramiennymi. Obracając wokół wspólnego wierzchołka, który ma stopień 3, otrzymujemy trzy płytki



RYSUNEK 22. Diagram sąsiedownia dla płytki w parkiecie IH38 [3.12²]

o kształcie trójkąta równoramiennego. Kąty przy wierzchołku względem którego obracaliśmy mają tę samą miarę równą 120° i znajdują się między ramionami płytek. Stąd wnioskujemy, że pozostałe dwa kąty w każdej płytce mają po 30° . Zatem każda z tych płytek ma kształt trójkąta równoramiennego rozwartokątnego o kącie między ramionami równym 120° i kątach przy podstawie o mierze po 30° .



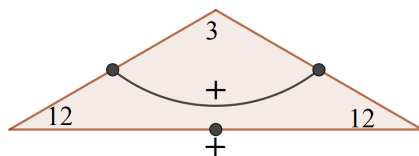
RYSUNEK 23. Fragment parkietu po zastosowaniu reguł sąsiedownia

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 3.7. *Dla dowolnych długości boków płytki o kształcie trójkąta równoramiennego o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ istnieje parkiet izohedralny typu IH38 [3.12²].*

Dowód. Niech T będzie płytką w kształcie dowolnego trójkąta równoramiennego o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ i bokach poetykietowanych a, b, c . Zgodnie z regułami sąsiedownia utworzymy fragment parkietu jak na Rysunku 23. Zauważmy, że kąty $\angle ABD, \angle BDA$ i $\angle DAB$ mają miary po 60° , ponieważ każdy z tych kątów jest sumą kątów β i γ , które mają po 30° . Zatem $\triangle ABD$ jest równoboczny o regułach sąsiedownia na bokach AB, BD i AD jak w płytce parkietu typu IH87 (patrz Rysunek 13). Dodatkowo zauważmy, że w płytce z parkietu typu IH87 zawarte są trzy płytki z parkietu IH38. Z Faktu 3.3 wiemy, że z płytek trójkątnych równobocznych da się utworzyć parkiet izohedralny o typie IH87 [6³]. Zatem z płytek T także da się utworzyć parkiet izohedralny, o typie IH38 [3.12²]. \square

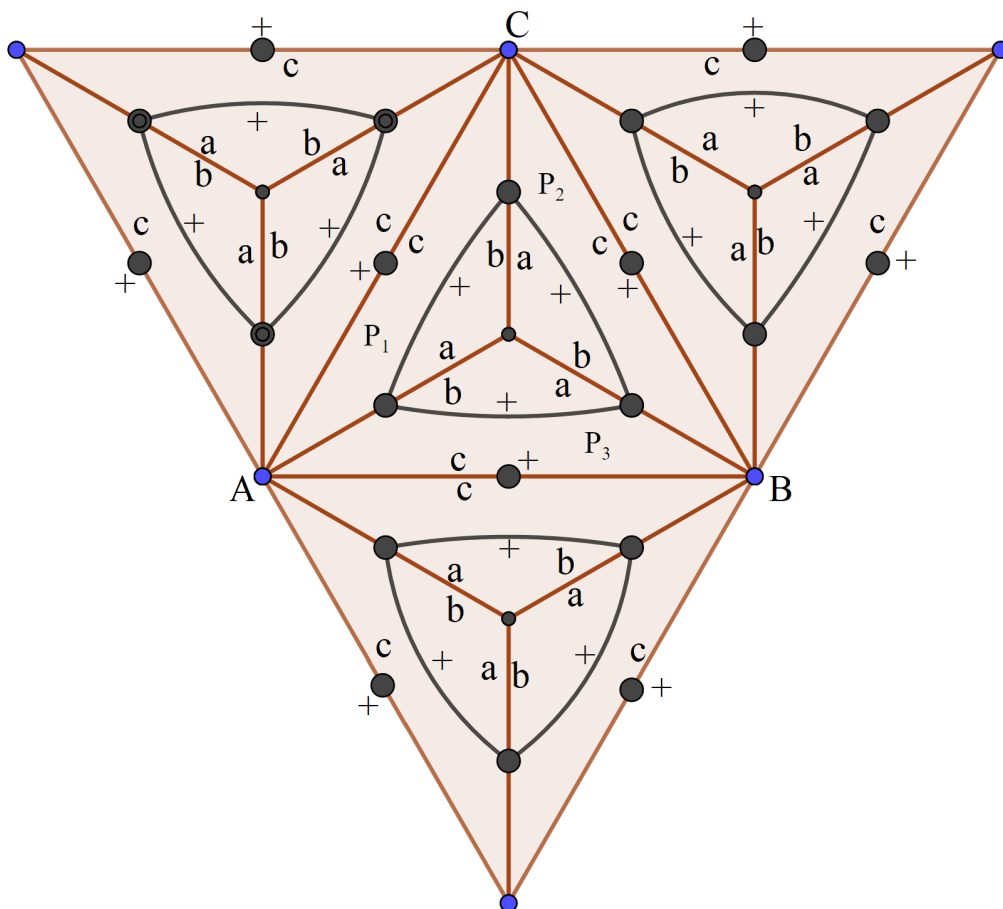
3.8. **Typ IH39** [3.12²]. Parkiet typu IH39 [3.12²] tworzą trójkątne płytki jak na Rysunku 24. Analogicznie jak w przypadku płytek w parkiecie IH38, pokazujemy, że płytki w parkiecie IH39 mają kształt trójkąta równoramiennego o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.



RYSUNEK 24. Diagram sąsiedowania dla płytki w parkiecie izohedralny IH39 [3.12²]

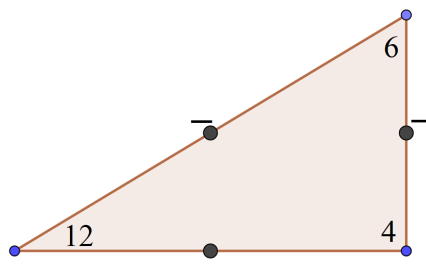
Fakt 3.8. Dla dowolnej płytki o kształcie trójkąta równoramiennego o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ istnieje parkiet izohedralny płaszczyzny typu IH39 [3.12²].

Dowód. Niech P_1 będzie płytką o kształcie dowolnego trójkąta równoramiennego o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ zaopatrzoną w diagram sąsiedowania jak na Rysunku 24. Utwórzmy fragment parkietu jak na Rysunku 25. Zwróćmy uwagę, że płytki P_1, P_2, P_3 tworzą większy trójkąt równoboczny $\triangle ABC$, którego boki przylegają do przystających trójkątów równobocznych i są przekształcane przez symetrie parkietu jak w Lemacie 2.18. Zauważmy, że te trójkąty wraz z regułami sąsiedowania tworzą płytki trójkątne takie same jak w parkiecie IH84. Z Faktu 3.1 wiemy, że płytki o kształcie trójkąta równobocznego o diagramie sąsiedowania jak na Rysunku 9 tworzą parkiet izohedralny oraz symetria parkietu przenosi podział dużego $\triangle ABC$ na całą płaszczyznę. Zatem płytki o kształcie dowolnego trójkąta równoramiennego o kątach $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$ także tworzą parkiet izohedralny. \square



RYSUNEK 25. Fragment parkietu izohedralnego IH39 [3.12²]

3.9. **Typ IH77** [4.6.12]. Parkietaż typu IH77 [4.6.12] tworzą trójkątne płytki jak na Rysunku 26. Przypomnijmy, że znak \bullet na boku płytki oznacza, że symetrią parkietażu przekształcającą płytkę parkietażu w sąsiednią jest odbicie względem wspólnego boku obu płytek o wspomnianym symbolu.



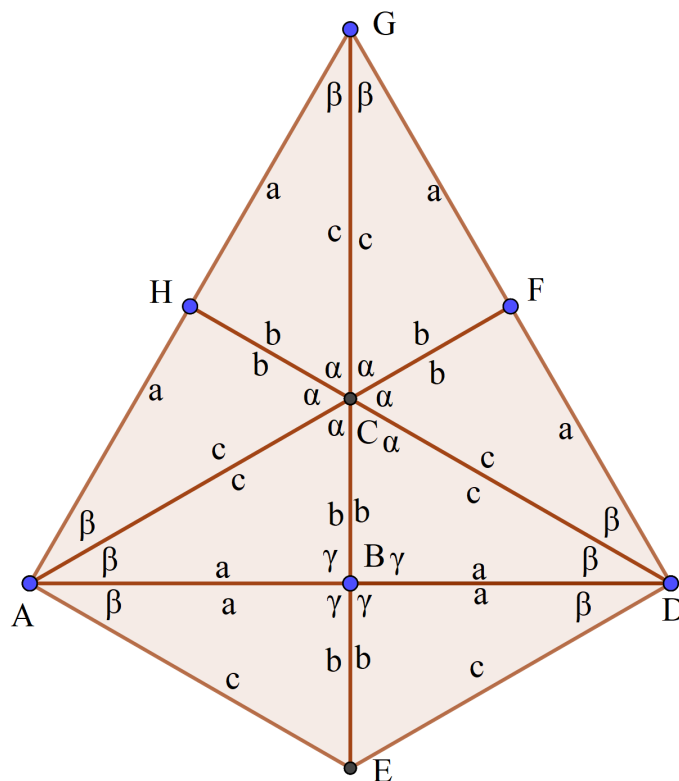
RYSUNEK 26. Diagram sąsiedowania dla płytki w parkietażu izohedralnym typu IH77 [4.6.12]

Pokażemy, że potencjalny kształt płytki w parkietażu izohedralnym typu IH77 [4.6.12] jest trójkątem prostokątnym o kątach 30° , 60° , 90° . Zwróćmy uwagę, że typ topologiczny wskazuje, że dla każdej płytki w jednym wierzchołku spotykają się cztery płytki, w drugim sześć płytek, a w trzecim dwanaście płytek. Weźmy $\triangle ABC$ i odbijmy go względem prostej BC i prostej AB , a następnie odbijmy $\triangle BDC$ względem prostej BD (patrz Rysunek 27). Zwróćmy uwagę, że wokół wierzchołka B spotykają się 4 przystające trójkąty i kąty przy tym wierzchołku są tej samej miary γ . Zatem kąt γ będzie miał miarę 90° , ponieważ dzielimy kąt pełny na 4 równe części. Następnie odbijmy $\triangle ABC$ względem prostej AC i powstały $\triangle ACH$ względem prostej HC oraz odbijmy $\triangle BDC$ względem prostej CD i powstały $\triangle CDF$ odbijmy względem prostej CF . Wtedy wokół wierzchołka C spotka się sześć przystających płytek i jednocześnie kąty α przy wierzchołku C są takie same. Zatem kąt α ma miarę 60° , ponieważ dzielimy kąt pełny na sześć równych części. Zatem w $\triangle ABC$ kąt przy wierzchołku B ma miarę 90° , a przy wierzchołku C ma miarę 60° . Z twierdzenia o sumie miar kątów w trójkącie kąt przy wierzchołku A ma miarę 30° . Stąd $\triangle ABC$ jest prostokątny o kątach 30° , 60° , 90° .

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 3.9. *Dla dowolnej płytki o kształcie trójkąta prostokątnego o kątach 30° , 60° , 90° istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH77 [4.6.12].*

Dowód. Zgodnie z Rysunkiem 28, niech P_1 będzie poetykietowaną płytką o kształcie trójkąta prostokątnego o kątach $\angle EAF = 30^\circ$, $\angle AEF = 60^\circ$, $\angle AFE = 90^\circ$ zaopatrzoną w diagram sąsiedowania jak na Rysunku 26. Utwórzmy fragment parkietażu jak na Rysunku 28 poprzez symetrie parkietażu korzystając z Lematu 2.19. Zauważmy, że $\triangle ABC$ zawiera sześć płytek P_1 . Dodatkowo przy wierzchołku A mamy dwa kąty $\angle CAE$ i $\angle BAE$, których suma miar wynosi 60° i podobnie można pokazać, że przy wierzchołkach B i C także mamy miarę kąta równą 60° , stąd $\triangle ABC$ jest trójkątem równobocznym. Zauważmy również, że pozostałe duże trójkąty równoboczne przyległe do $\triangle ABC$ są jego odbiciem przez prostą zawartą w odpowiednim boku $\triangle ABC$. Zatem $\triangle ABC$ jest płytką z parkietażu typu IH87. Z Faktu 3.3 wiemy, że istnieje izohedralny parkietaż płaszczyzny o płytkach jak $\triangle ABC$ z diagramem sąsiedowania jak na Rysunku 13 oraz symetria parkietażu przenosi podział dużego trójkąta na całą płaszczyznę. Zatem istnieje izohedralny parkietaż płaszczyzny typu IH77 [4.6.12]. \square



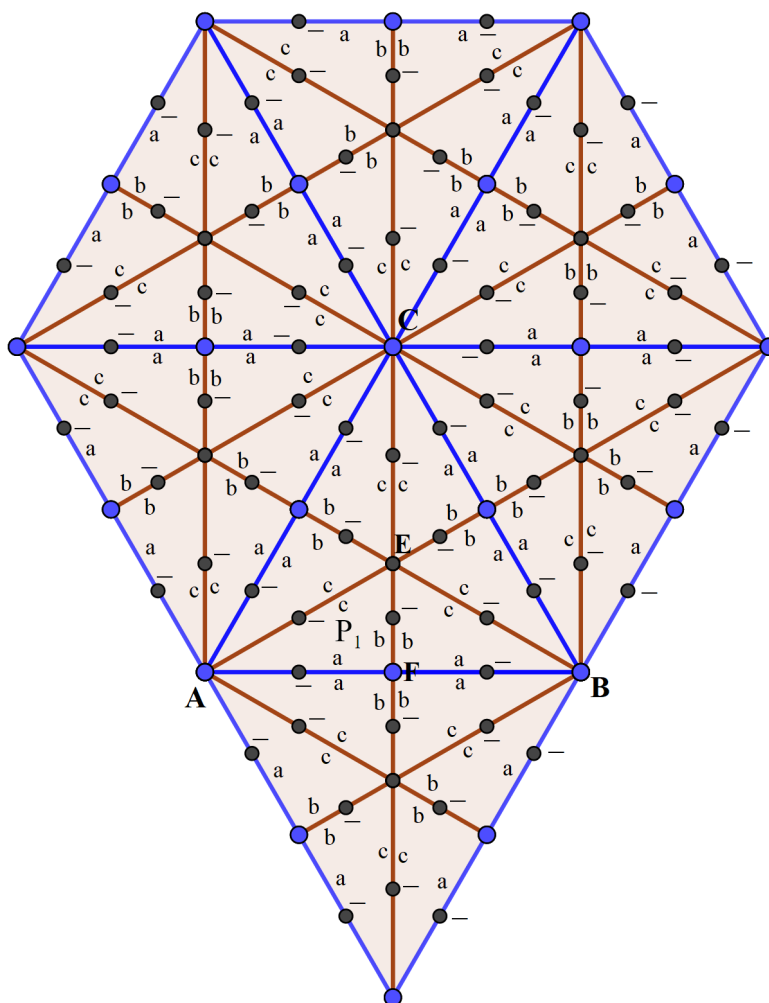
RYSUNEK 27. Płytki o kształcie trójkąta prostokątnego o kątach 30° , 60° , 90°

3.10. **Typ IH78** [4.8²]. Parkietaż typu IH78 [4.8²] tworzą trójkątne płytki jak na Rysunku 29. Przypomnijmy, że znak $+$ przy symbolu \bullet na boku płytki oznacza, że symetrią parkietażu przekształcającą płytkę parkietażu w sąsiednią jest półobrót względem środka wspólnego boku obu płytek o wspomnianym symbolu.

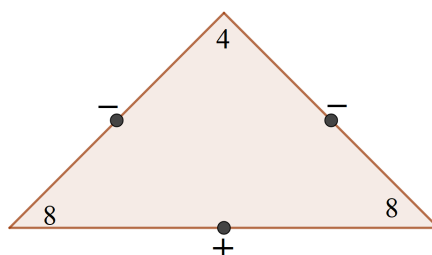
Pokażemy, że potencjalny kształt płytki w parkietażu izohedralnym typu IH78 [4.8²] jest dowolnym trójkątem prostokątnym, w którym przeciwprostokątną jest bok oznaczony symbolem $+$. Niech wierzchołek C będzie stopnia 4 tak jak na Rysunku 30 co oznacza, że spotykają się w nim cztery przystające płytki oraz cztery kąty o tej samej mierze. Miara tego kąta musi być równa 90° , ponieważ gdyby była mniejsza, to albo musiałyby być więcej płytek, albo pozostałby pusty obszar między płytkami. Stąd płytka jest trójkątem prostokątnym. Pozostałe dwa kąty w płytce mogą być dowolnych miar spełniających jedynie warunek sumowania się do 90° .

Fakt 3.10. *Dla dowolnej płytki o kształcie trójkąta prostokątnego istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH78 [4.8²].*

Dowód. Niech P_1 będzie płytką o kształcie trójkąta dowolnego prostokątnego zaopatrzoną w diagram sąsiedownia jak na Rysunku 29. Wypełnijmy fragment płaszczyzny płytkami P_1 stosując odpowiednie symetrie. Otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 31. Zwróćmy uwagę, że pas płytek pomiędzy prostymi k i m możemy kontynuować w nieskończoność w górę i w dół. Zauważmy też, że pas na lewo od prostej k jest pasem środkowym przesuniętym w lewo o wektor \vec{v} o długości równej długości boku o etykiecie "a". Podobnie pas na prawo od prostej m jest pasem środkowym przesuniętym w prawo o wektor $-\vec{v}$. Przesuwając w lewo i w prawo nieskończone pasy zapełnimy całą płaszczyznę płytkami przystającymi do P_1 , a zatem będziemy mieli parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH78 [4.8²]. \square

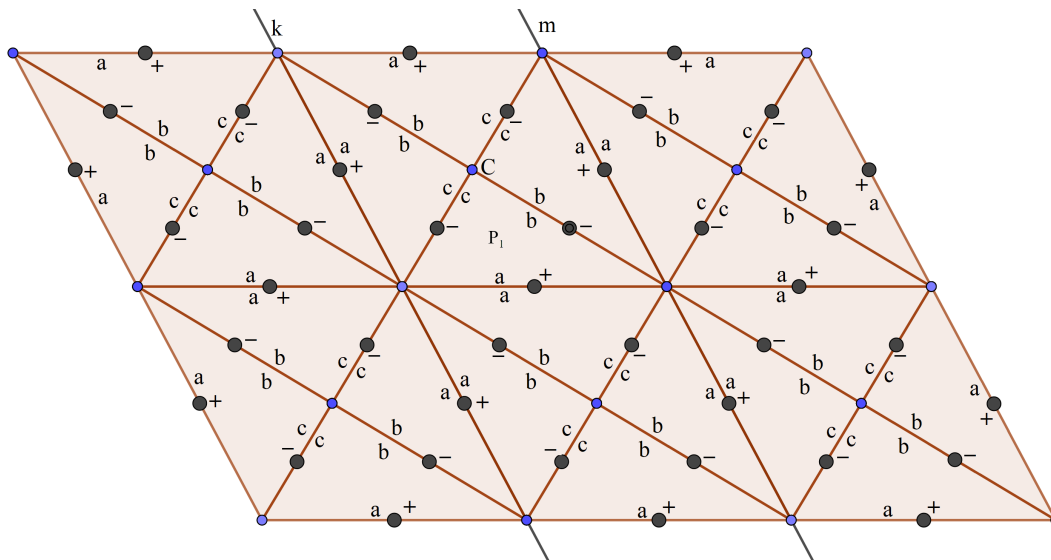
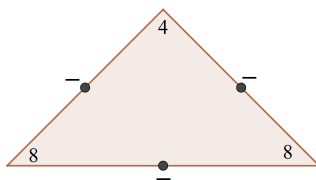


RYSUNEK 28. fragment parkietażu typu IH77 [4.6.12]

RYSUNEK 29. Diagram sąsiedownia dla płytki z parkietażu izohedralnego typu IH78 [4.8²]

3.11. **Typ IH80** [4.8²]. Parkietaż typu IH80 [4.8²] tworzą płytki trójkątne z diagramem sąsiedownia jak na Rysunku 31.

Podobnie jak w przypadku płytki z parkietażu typu IH78 [4.8²] niech wierzchołek C będzie miał stopień 4, a więc kąty α przy tym wierzchołku będą proste (patrz Rysunek 32). Możemy teraz odbić $\triangle ABC$ względem prostej AB i prostej BC. Otrzymamy trójkąty $\triangle ABD$ i $\triangle BCH$, które odbijemy względem prostej BD i BH odpowiednio. Powstaną trójkąty $\triangle BDI$ i $\triangle BEH$, które odbijemy względem prostej BI i BE odpowiednio. Otrzymamy trójkąty $\triangle BIF$ oraz $\triangle BEG$. Odbijmy zatem $\triangle BEG$ względem

RYSUNEK 30. Fragment parkietaża utworzonego z płytki P_1 RYSUNEK 31. Diagram sąsiedowności dla dowolnej płytki w parkietażu typu IH80 [4.8²]

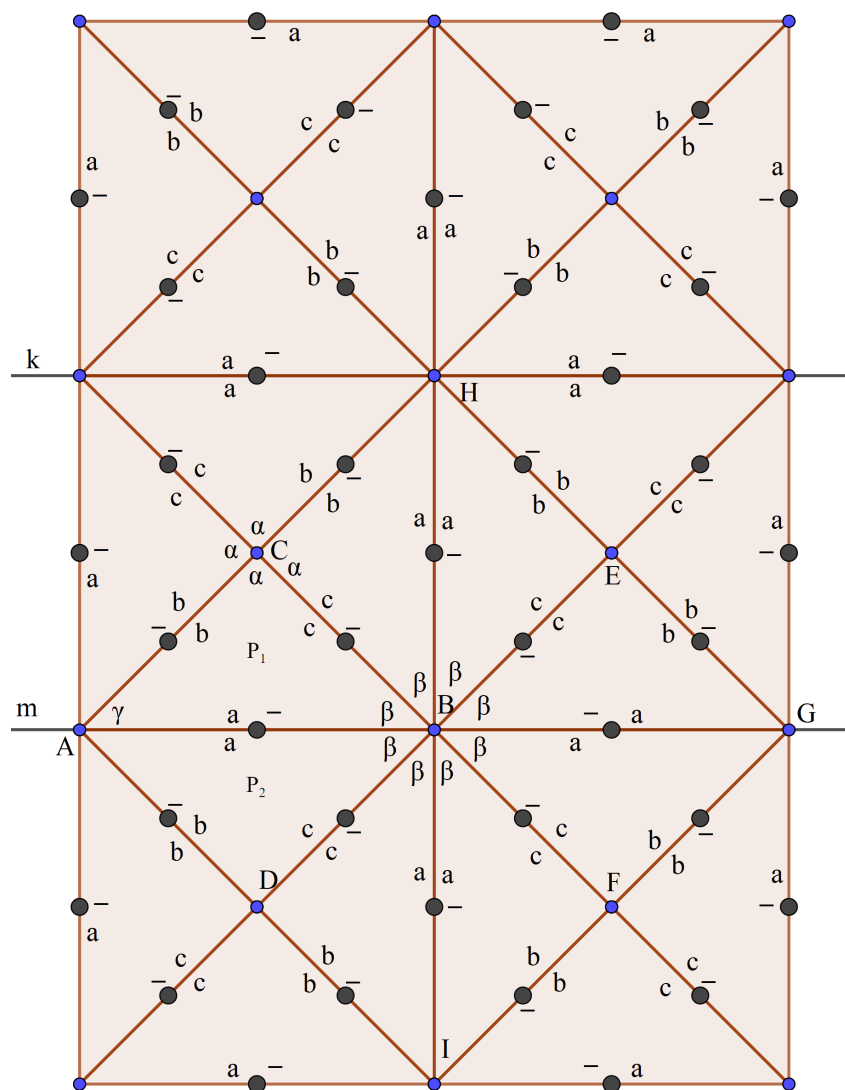
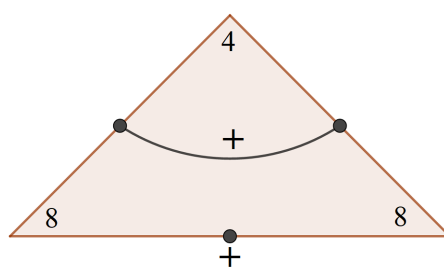
prostej BG przez co otrzymamy $\triangle BGF$. Zwróćmy uwagę, że wokół wierzchołka B spotyka się osiem przystających trójkątów oraz osiem kątów β o tej samej mierze. Zatem kąt $\beta = 360^\circ : 8 = 45^\circ$. Z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych w trójkącie otrzymamy, że kąt γ ma miarę 45° . Podsumowując płytki z parkietażu typu IH80 [4.8²] mają kształt trójkąta prostokątnego równoramiennego.

Fakt 3.11. *Dla dowolnej płytki o kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH80 [4.8²].*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie Faktu 3.10 będziemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 o kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 31. Na Rysunku 32 mamy trzy pasy czworokątów złożonych z płytek P_1 oraz dwie proste m i k . Po pierwsze zauważamy, że każdy z tych pasów możemy kontynuować w lewo i w prawo w nieskończoność stosując symetrie parkietażu. Następnie zwróćmy uwagę, że prosta k jest osią odbicia między środkowym pasem a górnym pasem, zatem możemy poprzez odbicia względem prostych równoległych do prostej k powielać pas środkowy w górę w nieskończoność. Analogicznie możemy postąpić z pasem poniżej prostej m , która jest osią odbicia między pasem środkowym a pasem poniżej. W ten sposób zapełnimy całą płaszczyznę płytkami P_1 tworząc izohedralny parkietaż płaszczyzny typu IH80 [4.8²]. \square

3.12. Typ IH79 [4.8²]. Parkietaż typu IH79 [4.8²] tworzą płytki trójkątne o diagramie sąsiedowności jak na Rysunku 33.

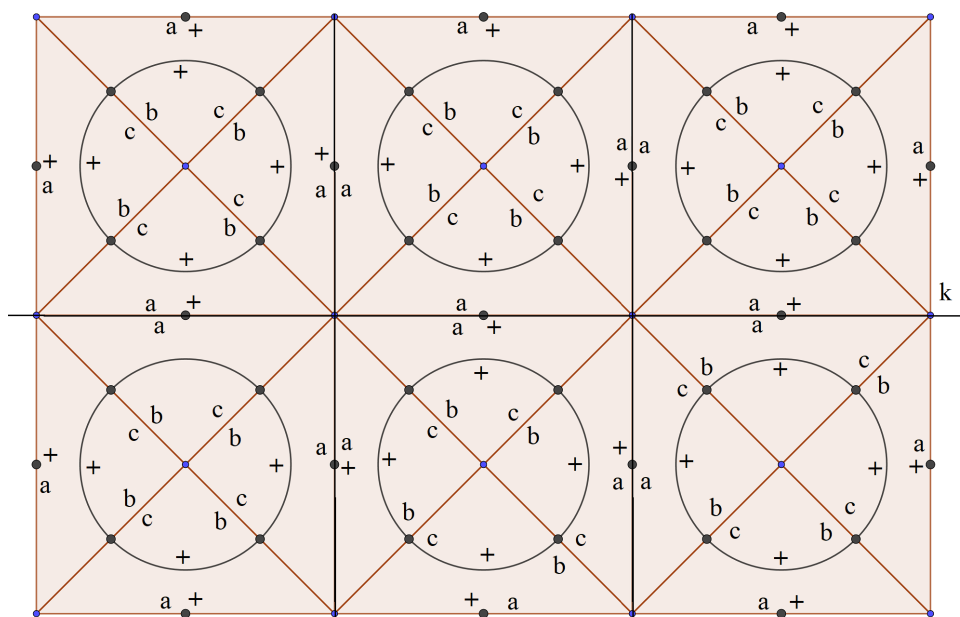
Przypomnijmy, że łuk ze znakiem + oznacza obrót wokół wierzchołka wspólnego dla boków połączonych łukiem oraz boki połączone łukiem są tej samej długości (Lemat

RYSUNEK 32. Fragment parkietażu typu IH80 $[4.8^2]$ RYSUNEK 33. Diagram sąsiedowności dla płytki w parkietażu typu IH79 $[4.8^2]$

2.17 i 2.20). Stąd płytka ma kształt trójkąta równoramiennego. Dodatkowo wiemy, że wierzchołek między ramionami będzie miał stopień 4, co oznacza, że w tym wierzchołku spotykają się cztery jednakowe płytki i cztery takie same kąty (wynika to z obrotu płytki względem wspomnianego wierzchołka). Zatem kąt przy wierzchołku stopnia 4 będzie kątem prostym. Stąd kształt płytki będzie trójkątem prostokątnym równoramiennym.

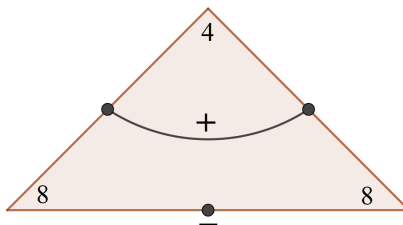
Fakt 3.12. Dla dowolnej płytki o kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH79 [4.8²].

Dowód. Niech P_1 będzie płytką o kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 33. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 aż otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 34. Zwróćmy uwagę, że pas powyżej prostej k możemy kontynuować w lewo i w prawo w nieskończoność stosując symetrie parkietażu. Zauważmy też, że pas poniżej prostej k otrzymujemy przez półobróć pasa powyżej prostej k względem środka dowolnej krawędzi o etykiecie "a". Możemy zatem kontynuować tworzenie kolejnych pasów w górę i w dół w podobny sposób jak opisany przed chwilą, otrzymując w ten sposób parkietaż całej płaszczyzny typu IH79 [4.8²]. \square



RYSUNEK 34. Fragment parkietażu izohedralnego typu IH79 [4.8²]

3.13. **Typ IH81** [4.8²]. Parkietaż typu IH81 [4.8²] tworzą płytki trójkątne o diagramie sąsiedowności jak na Rysunku 35.

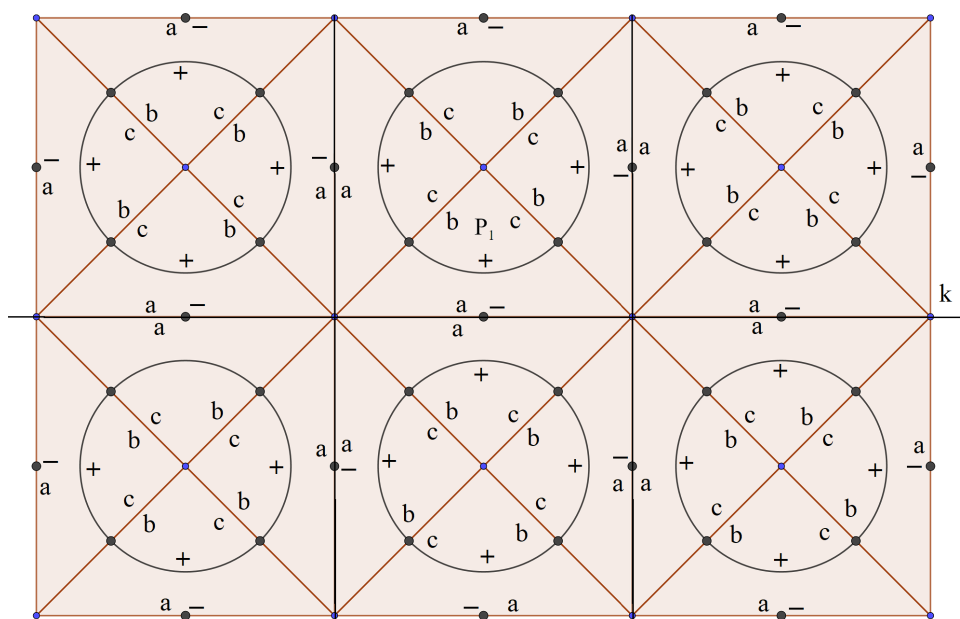


RYSUNEK 35. Diagram sąsiedowności dla płytek parkietażu typu IH81 [4.8²]

Kształt uzasadniamy analogicznie jak w przypadku typu IH79. Dla przypomnienia, "–" na krawędzi oznacza odbicie względem prostej zawierającej tę krawędź.

Fakt 3.13. Dla dowolnej płytki o kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH81 [4.8²].

Dowód. Niech P_1 będzie płytką o kształcie trójkąta prostokątnego równoramiennego z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 35. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 aż otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 36. Zwróćmy uwagę, że pas powyżej prostej k możemy kontynuować w lewo i w prawo w nieskończoność stosując symetrie parkietażu. Zauważmy też, że pas poniżej prostej k otrzymujemy przez odbicie względem prostej k pasa powyżej tej prostej. Możemy zatem kontynuować tworzenie kolejnych pasów w górę i w dół w podobny sposób jak opisany przed chwilą, otrzymując w ten sposób parkietaż całej płaszczyzny typu IH81 [4.8²]. \square

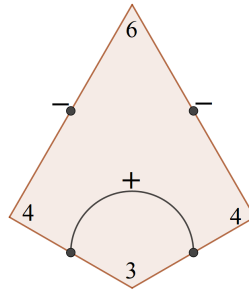


RYSUNEK 36. Fragment parkietażu typu IH81 [4.8²]

4. PARKIETAŻE O PŁYTKACH CZWOROKĄTNYCH

W tym rozdziale zajmiemy się parkietażami izohedralnymi o niesymetrycznych płytkach mających kształt czworokąta. Podobnie jak w rozdziale poprzednim określimy dla każdego typu parkietażu izohedralnego zakres kształtów czworokątnej płytki, a następnie udowodnimy, że dla wyznaczonego zakresu kształtów płytek da się z nich utworzyć parkietaż izohedralny płaszczyzny.

4.1. **Typ IH30 [3.4.6.4].** Parkietaż typu IH30 [3.4.6.4] tworzą czworokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 37.



RYSUNEK 37. Diagram sąsiedowności dla płytek parkietaża typu IH30 [3.4.6.4]

Określimy zakres kształtów dla płytki z parkietażu typu IH30 [3.4.6.4]. Przyjmijmy oznaczenia dla płytki P_1 jak na Rysunku 38 oraz przyjmijmy zgodnie z diagramem sąsiedowności, że wierzchołek A ma stopień 3, wierzchołki B i D stopień 4, a wierzchołek C stopień 6.

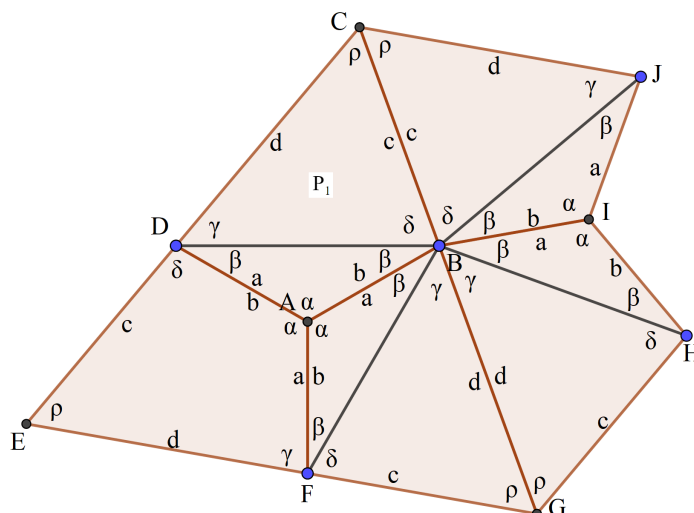
Wtedy $\triangle ABD$ jest równoramienny, bo krawędzie połączone łukiem są tej samej długości, a kąt przy wierzchołku A jest α . Wokół wierzchołka A dokonujemy obrotu płytki P_1 , aby w tym wierzchołku spotkały się trzy jednakowe płytki i trzy kąty α . Zatem kąt $\alpha = 360^\circ : 3 = 120^\circ$. Wtedy kąty β przy wierzchołku B i D mają miarę 30° z twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych w trójkącie i $\triangle ABD$ jest równoramienny. Pozostaje określić jaki jest zakres kształtu dla $\triangle BCD$.

Obróćmy P_1 wokół wierzchołka A o 120° . Otrzymamy czworokąt ABGF. Odbijmy także P_1 względem prostej BC. Otrzymamy czworokąt BIJC. Następnie obróćmy czworokąt BIJC wokół wierzchołka I o kąt 120° i otrzymamy czworokąt BGHI. Sytuację, którą mamy przedstawia Rysunek 38. Zauważmy, że $4 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma + 2 \cdot \delta = 360^\circ$ i po uproszczeniu i podstawieniu $\beta = 30^\circ$ otrzymujemy, że $\gamma + \delta = 120^\circ$. Stosując twierdzenie o sumie miar wewnętrznych w trójkącie otrzymujemy $\gamma + \delta + \rho = 180^\circ$ i po podstawieniu $\gamma + \delta = 120^\circ$ mamy $\rho = 60^\circ$.

Uwaga 4.1. Podsumowując powyższe rozważania, potencjalna czworokątna płytka musi spełniać następujące warunki:

- (1) składać się z dwóch trójkątów,
- (2) jeden z trójkątów ma być równoramienny o kątach $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$,
- (3) drugi trójkąt musi mieć jeden z kątów o mierze 60° ,
- (4) trójkąt równoramienny połączony jest podstawą z bokiem w drugim trójkącie w taki sposób, że kąt o mierze 120° leży naprzeciwko kąta o mierze 60° .

Należy zwrócić uwagę, że kształty trójkątów z punktu (3) Uwagi 4.1 mogą być różne i niekoniecznie musi to być trójkąt równoboczny. Przykłady można zobaczyć zarówno na Rysunku 38 jak i 39.



RYSUNEK 38. Uzasadnienie kształtu płytki w parkiecieżu IH30 [3.4.6.4]

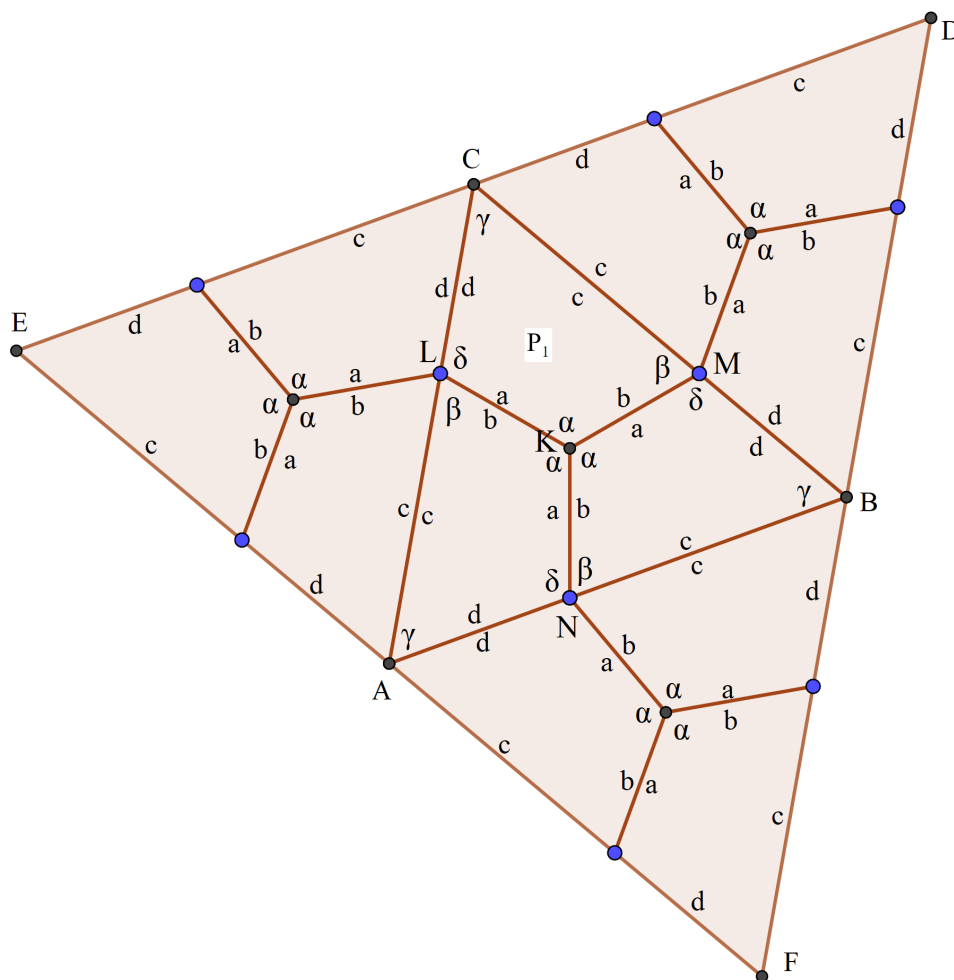
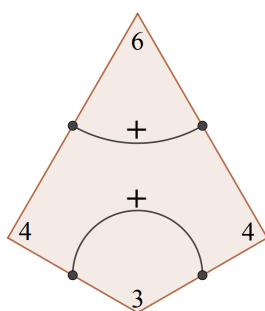
Fakt 4.2. Dla dowolnej płytki o kształcie czworokąta spełniającego warunki z Uwagi 4.1 istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH30 [4.8²].

Dowód. Niech P_1 będzie płytką spełniającą warunki z Uwagi 4.1 z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 37. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 zgodnie z diagramem sąsiedowności. Otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 39. Po pierwsze zwróćmy uwagę, że z konstrukcji płytki P_1 kąty β i δ mają w sumie miarę równą 180° (dokładnie $\beta + \delta = 120^\circ + 2 \cdot 30^\circ$). Stąd kąty $\angle CMB = \angle BNA = \angle ALC = 180^\circ$. Ponownie z Uwagi 4.1 wiemy, że kąt $\gamma = 60^\circ$. Zatem $\triangle ABC$ utworzony z trzech płytek P_1 jest równoboczny, ponieważ kąty $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = \gamma$. Analogicznie można pokazać, że $\triangle ACE$, $\triangle BCD$ i $\triangle ABF$ także są równoboczne. Zwróćmy uwagę, że $\triangle ABC$ można odbić względem prostej BC otrzymując $\triangle BCD$ oraz zachowane zostaną etykiety krawędzi. Podobnie możemy zauważyć, że odbijając $\triangle ABC$ względem prostej AB otrzymamy $\triangle ABF$, a odbijając względem prostej AC otrzymamy $\triangle ACE$ oraz w obu przypadkach zachowane zostaną etykiety krawędzi. Zatem płytka będąca trójkątem $\triangle ABC$ będzie podobna do płytki z parkietażu typu IH87 [6³] z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 13. Z Faktu 3.3 wiemy, że istnieje izohedralny parkietaż płaszczyzny typu IH87 [6³]. Odbicie jako symetria zachowuje podział $\triangle ABC$ na płytki P_1 . Zatem można utworzyć izohedralny parkietaż typu IH30 [4.8²] z płytek P_1 . \square

4.2. Typ IH31 [3.4.6.4]. Parkietaż typu IH31 [3.4.6.4] tworzą czworokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 40.

Pokażemy, że potencjalny kształt płytki dla parkietażu typu IH31 [3.4.6.4] jest deltoidem o kątach $120^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Przypomnijmy, że łuk z symbolem " + " oznacza obrót płytki wokół wspólnego wierzchołka dla krawędzi połączonych łukiem oraz, że boki połączone łukiem są tej samej długości. Przyjmijmy oznaczenia dla pojedynczej płytki P_1 jak na Rysunku 41. Niech także wierzchołek A będzie stopnia 3, wierzchołki B i D stopnia 4 i wierzchołek C stopnia 6.

Najpierw zauważmy, że $\triangle ABD$ i $\triangle BCD$ są równoramienne. Obracając płytkę P_1 wokół wierzchołka A , otrzymamy przy tym wierzchołku trzy przystające płytki i trzy kąty α o jednakowej mierze. Zatem miara kąta $\alpha = 360^\circ : 3 = 120^\circ$ oraz kąty $\beta = 30^\circ$. Podobnie zwróćmy uwagę, że obracając P_1 wokół wierzchołka C , otrzymamy sześć przystających płytek przy wierzchołku C i sześć kątów γ o jednakowej mierze. Zatem miara kąta $\gamma = 360^\circ : 6 = 60^\circ$. Stąd w $\triangle BCD$ kąty $\delta = 60^\circ$. Zatem kąty $\angle ADC$ i $\angle ABC$

RYSUNEK 39. Fragment parkietażu typu IH30 [4.8²]

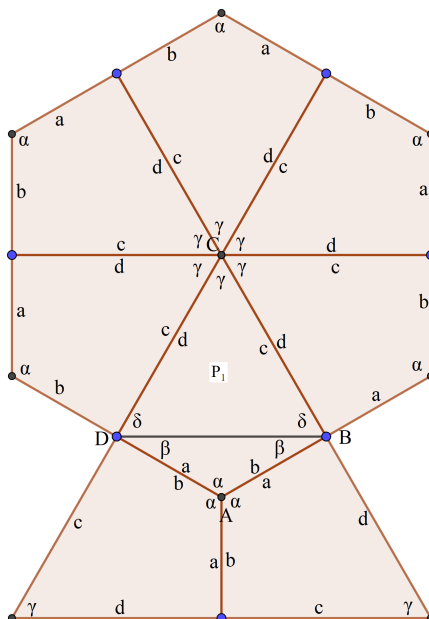
RYSUNEK 40. Diagram sąsiedownia dla płytki z parkietaża typu IH31 [3.4.6.4]

są kątami prostymi, ponieważ każdy z nich jest sumą kąta β i δ . Podsumowując mamy dwa trójkąty: równoramienny o kącie między ramionami równym 120° oraz równoboczny, "sklejone" podstawami, przez co otrzymujemy deltoid o kątach $120^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 4.3. *Dla dowolnej płytki o kształcie deltoidu o kątach $120^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH31 [3.4.6.4].*

Dowód. Niech P_1 będzie płytką o kształcie deltoidu o kątach $120^\circ, 90^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ z diagramem sąsiedownia jak na Rysunku 40. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 . W



RYSUNEK 41. Płytką czworokątną z oznaczeniami.

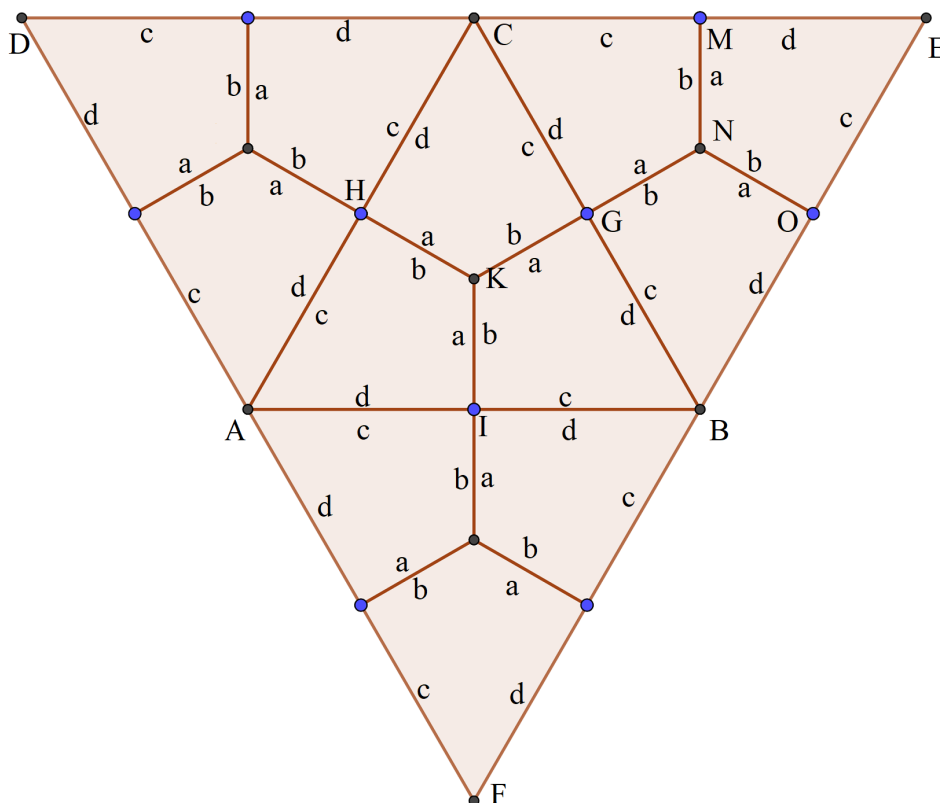
pewnym momencie otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 42. Zwróćmy uwagę, że $\triangle ABC$ jest równoboczny oraz punkty G, H, I są środkami boków BC, AC, AB odpowiednio. Zauważmy też, że $\triangle BCE, \triangle ACD$ i $\triangle ABF$ są również równoboczne. Możemy dokonać następujących obserwacji:

- (1) krawędź GN jest obrazem krawędzi GK przez półobrót względem punktu G .
- (2) krawędź MN jest obrazem krawędzi IK przez półobrót względem punktu G .
- (3) krawędź NO jest obrazem krawędzi HK przez półobrót względem punktu G .
- (4) krawędź BG w $\triangle BCE$ jest obrazem krawędzi GC w $\triangle ABC$ przez półobrót względem punktu G .
- (5) itd.

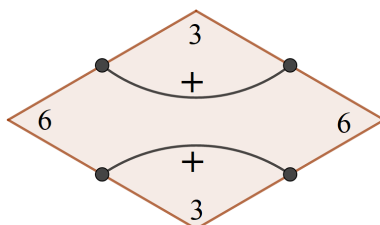
Podobnie można pokazać, że krawędzie w $\triangle BCE$ są obrazami krawędzi w $\triangle ABC$ przez półobrót względem punktu G zachowujący również odpowiednie etykiety. Stąd wniosek, że $\triangle BCE$ jest obrazem $\triangle ABC$ przez półobrót względem punktu G . Analogicznie możemy pokazać, że $\triangle ACD$ i $\triangle ABF$ są obrazami $\triangle ABC$ przez półobrót względem punktu H i I odpowiednio. Zatem trzy płytki P_1 w $\triangle ABC$ tworzą większą płytkę z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 9, a więc płytkę z parkietażu typu IH84 [6³]. Z Faktu 3.1 wiemy, że istnieje parkietaż typu IH84 [6³] dla płytki trójkątnej o dowolnym kształcie. Ponieważ płytkę z parkietażu IH84 [6³] jest podzielona na trzy płytki P_1 i półobrót zachowuje ten podział, zatem istnieje również parkietaż typu IH31 [3.4.6.4] dla płytki P_1 . \square

4.3. Typ IH33 [3.6.3.6]. Parkietaż typu IH33 [3.6.3.6] tworzą czworokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 43.

Najpierw określimy zakres kształtu dla czworokątnej płytki w parkietażu typu IH33 [3.6.3.6]. Weźmy czworokątne płytkę P_1 o wierzchołkach C, B, D, A i stopniach $3, 6, 3, 6$ odpowiednio jak na Rysunku 44. Przypomnijmy, że boki połączone łukiem mają tę samą długość. Zatem $\triangle CBA$ i $\triangle BDA$ są równoramienne i mają wspólną podstawę AB . Zwróćmy uwagę, że zgodnie z walencyjnością wierzchołka C , po obrocie płytki P_1 będziemy mieć trzy jednakowe płytki P_1 przy wierzchołku C oraz trzy kąty α tej samej miary. Zatem $\alpha = 360^\circ : 3 = 120^\circ$. Z równoramienności $\triangle CBA$ i twierdzenia o sumie miar



RYSUNEK 42. Fragment parkietażu typu IH31 [3.4.6.4]



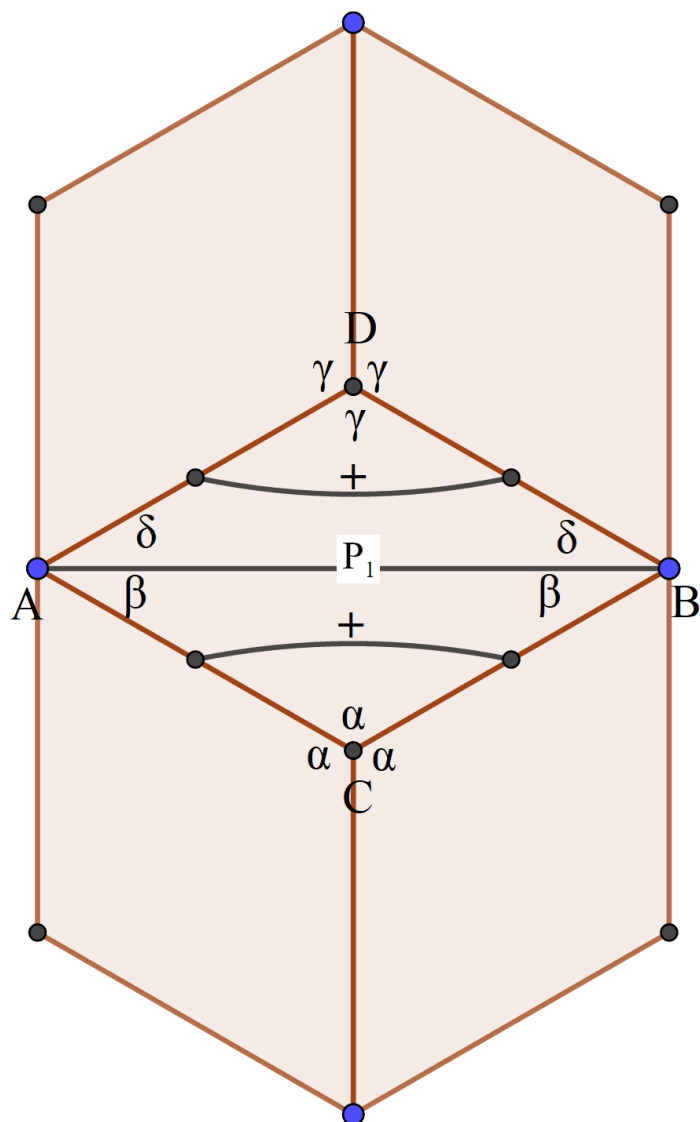
RYSUNEK 43. Typ IH33 [3.6.3.6]

kątów wewnętrznych w trójkącie wnioskujemy, że $\beta = (180^\circ - \alpha) : 2 = 30^\circ$. Analogicznie można pokazać, że kąt $\gamma = 120^\circ$ i $\delta = 30^\circ$. Zatem suma kątów β i δ jest równa 60° . Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że $\triangle CBA \equiv \triangle BDA$ z cechy KBK. Zatem P_1 ma kształt rombu o kątach $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$.

Sformułujemy następujący fakt:

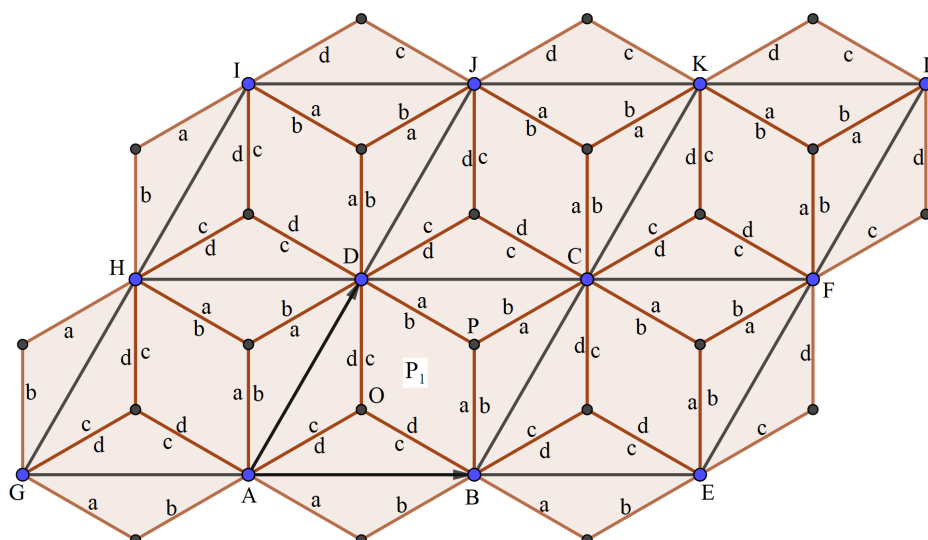
Fakt 4.4. *Dla dowolnej płytki o kształcie rombu o kątach $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH33 [3.6.3.6].*

Dowód. Niech P_1 będzie płytką o kształcie rombu o kątach $120^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 43. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 zgodnie z diagramem sąsiedowności. Po jakimś czasie otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 45. Zwróćmy uwagę, że czworokąt ABCD jest rombem, który składa się z jednej całej płytki parkietażu oraz czterech połówek dalszych płytek. Następnie zauważymy, że romb ABCD możemy przesunąć o wektor \vec{AD} na romb DCKJ zachowując przy



RYSUNEK 44. Rysunek pomocniczy do uzasadnienia zakresu kształtu dla płytki z parkietaża typu IH33 [3.6.3.6]

tym podział rombu ABCD oraz etykiety na krawędziach płytek. Analogicznych obserwacji możemy dokonać patrząc na romby BEFC i GADH. Łatwo zauważyć, że wszystkie przedstawione romby są przystające i można z nich utworzyć parkietaż całej płaszczyzny używając jedynie translacji. Mamy więc parkietaż płaszczyzny utworzony z przystających rombów, a każdy z tych rombów ma jednakowy podział zachowujący także etykiety krawędzi. Stąd mamy parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH33 [3.6.3.6]. \square

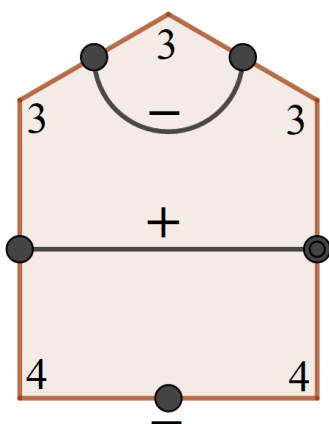


RYSUNEK 45. Fragment parkietażu IH33 [3.6.3.6]

5. PARKIETAŻE O PŁYTKACH PIĘCIOKĄTNYCH

W tym rozdziale zajmiemy się parkietażami izohedralnymi o niesymetrycznych płytkach mających kształt pięciokąta. Podobnie jak w rozdziale poprzednim określimy dla każdego typu parkietażu izohedralnego zakres kształtów pięciokątnej płytki, a następnie udowodnimy, że dla wyznaczonego zakresu kształtów płytek da się z nich utworzyć parkietaż izohedralny płaszczyzny.

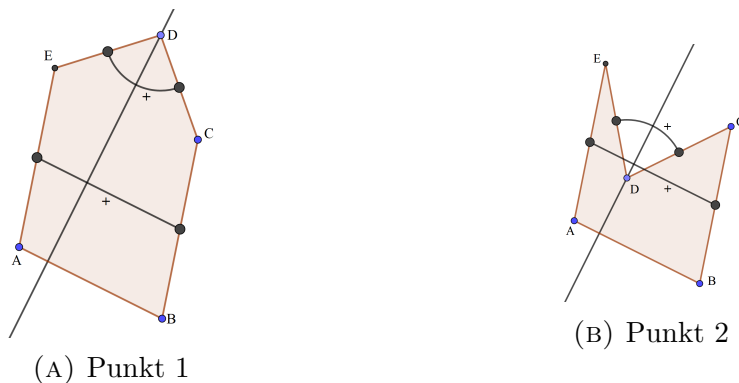
5.1. **Typ IH22** [$3^3.4^2$]. Parkietaż typu IH22 [$3^3.4^2$] tworzą pięciokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 46.

RYSUNEK 46. Diagram sąsiedowności dla płytki w parkietażu typu IH22 [$3^3.4^2$].

Wpierw określimy zakres kształtów dla pięciokątnej płytki. Niech P_1 będzie pięciokątą płytką o wierzchołkach A, B, C, D, E o stopniach wierzchołków 4, 4, 3, 3, 3 odpowiednio oraz o diagramie sąsiedowności jak na Rysunku 46. Zwróćmy uwagę, że odcinki AE i BC są równej długości z Lematu 2.17 (boki połączone łukiem są równej długości). Dodatkowo wiemy, że zachodzi tu Lemat 2.22, zatem AE i BC są równoległe (patrz Rysunek 47). Zatem ABCE jest równoległobokiem. Podobnie z Lematu 2.17 wyciągamy wniosek, że boki

CD i ED są równej długości, stąd $\triangle CDE$ jest równoramienny. W $\triangle CDE$ wierzchołek D leży na symetralnej podstawy CE. Mamy zatem dwie możliwości:

- (1) Wierzchołek D leży poza równoległobokiem ABCE i wtedy do tego równoległoboku dodajemy $\triangle CDE$ (Rysunek 47 Przykład 1).
- (2) Wierzchołek D leży wewnątrz równoległoboku ABCE i wtedy odejmujemy ("wycinamy") z tego równoległoboku $\triangle CDE$ (Rysunek 47 Przykład 2).

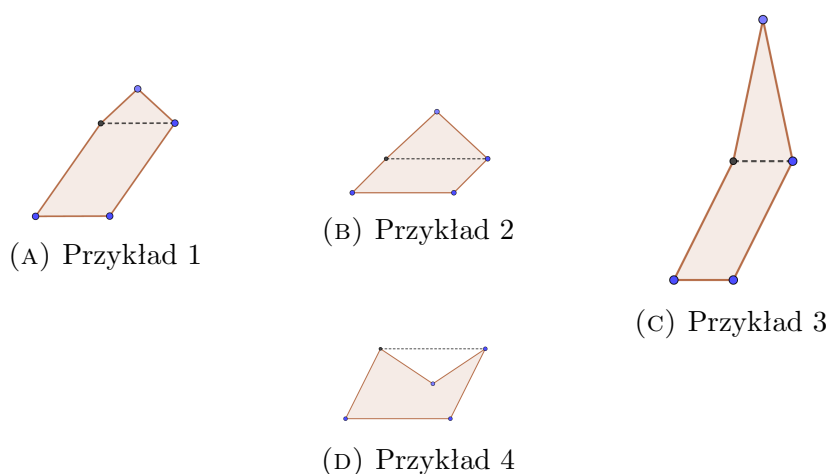


RYSUNEK 47. Dwie możliwości dla zakresu kształtu płytki $IH22[3^3.4^2]$

Uwaga 5.1. Podsumowując powyższe rozważania, potencjalna pięciokątna płytka musi spełniać następujące warunki:

- (1) pięciokąt jest sumą albo różnicą czworokąta i trójkąta,
- (2) czworokąt musi być równoległobokiem,
- (3) trójkąt musi być równoramienny o podstawie równej długości jednego z boków równoległoboku,
- (4) trójkąt równoramienny połączony jest podstawą z bokiem w równoległoboku.

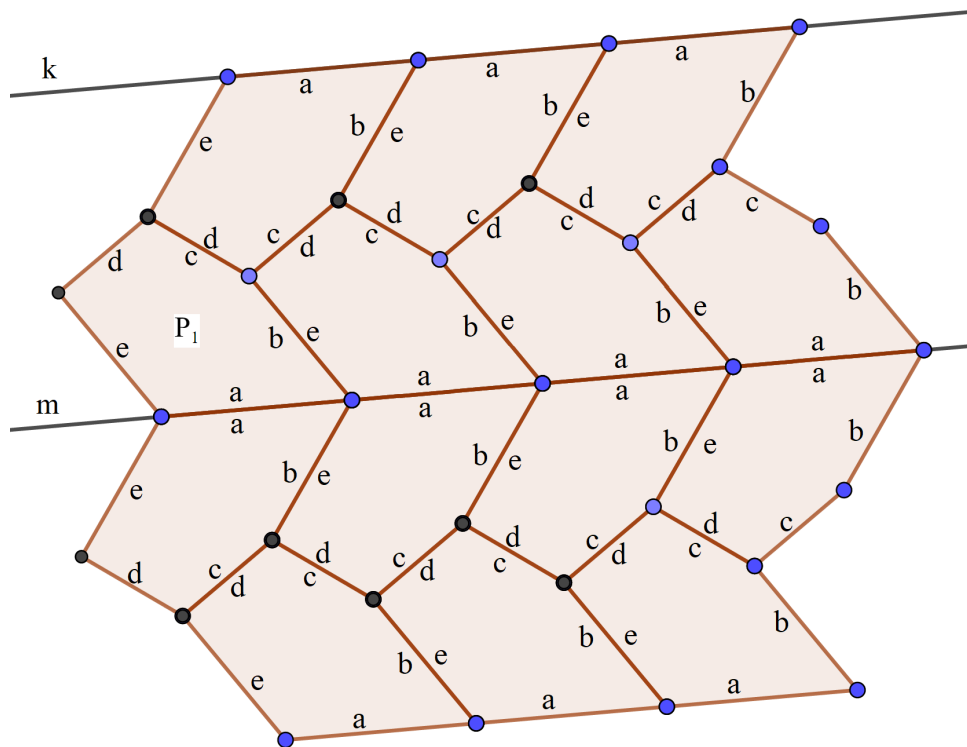
Rysunek 48 przedstawia przykłady płytek spełniających warunki z Uwagi 5.1.



RYSUNEK 48. Przykłady płytek z Uwagi 4.1

Fakt 5.2. Dla dowolnej płytki pięciokątnej spełniającej warunki z Uwagi 5.1 istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu $IH22[3^3.4^2]$.

Dowód. Niech P_1 będzie pięciokątną płytką spełniającą warunki z Uwagi 5.1 z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 46. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 . Po pewnym czasie otrzymamy sytuację jak na Rysunkach 49 i 50. Zauważmy, że na obu tych rysunkach pas płytek pomiędzy równoległymi prostymi k i m możemy dalej kontynuować w lewą i prawą stronę w nieskończoność. Zwróćmy też uwagę, że pas poniżej prostej m jest odbiciem pasa pomiędzy prostymi k i m względem prostej m . Zatem możemy kontynuować wypełnianie płaszczyzny płytkami P_1 wykonując podobne odbicia w górę i w dół w nieskończoność. W ten sposób otrzymamy parkietaż izohedralny typu IH22 $[3^2.4^2]$. \square



RYSUNEK 49. Fragment parkietażu typu IH22 $[3^3.4^2]$

5.2. **Typ IH25** $[3^3.4^2]$. Parkietaż typu IH25 $[3^3.4^2]$ tworzą pięciokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 51.

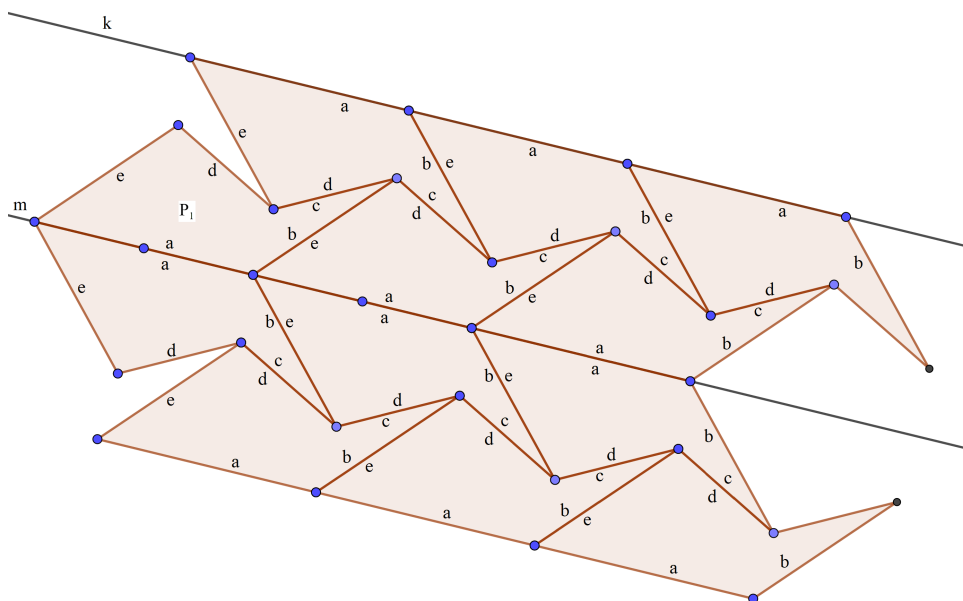
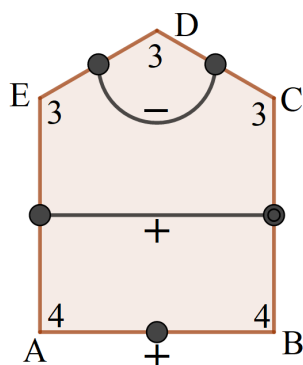
Zakres kształtów dla pięciokątnej płytki w typie IH25 $[3^3.4^2]$ określamy analogicznie do płytki z typu IH22 $[3^3.4^2]$. Oznaczenia i stopnie wierzchołków są przedstawione na Rysunku 51. Równoległość boków AE i BC jak w poprzednim podrozdziale wynika z połączenia tych boków łukiem i translacji. $\triangle BCD$ jest równoramienny z tych samych powodów co w poprzednim podrozdziale.

Dlatego też potencjalna pięciokątna płytka w parkietażu IH25 $[3^3.4^2]$ także musi spełniać warunki z Uwagi 5.1.

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 5.3. *Dla dowolnej płytki pięciokątnej spełniającej warunki z Uwagi 5.1 istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH25 $[3^3.4^2]$.*

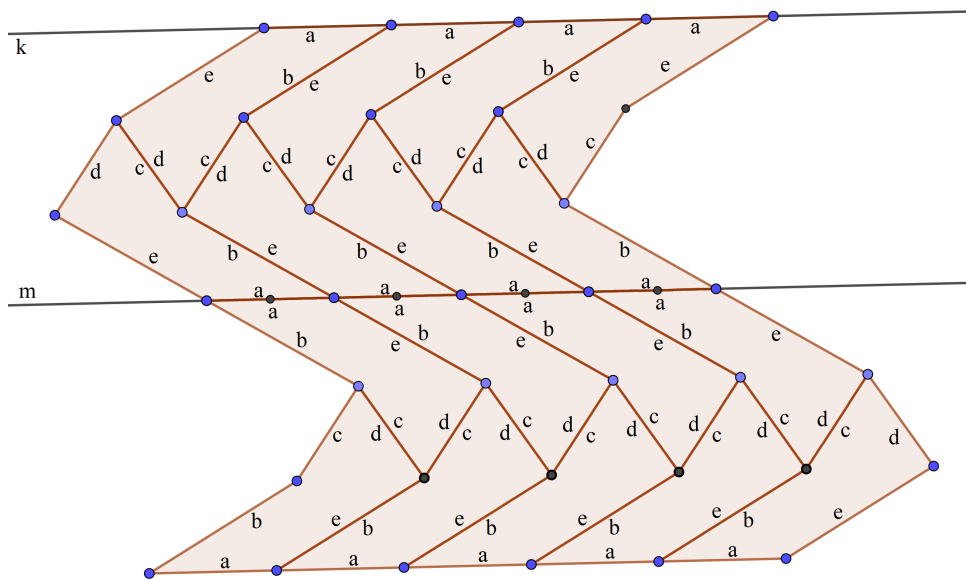
Dowód. Dowód będzie podobny do dowodu Faktu 5.2. Niech P_1 będzie pięciokątną płytką spełniającą warunki z Uwagi 5.1 z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 51. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 . Po pewnym czasie otrzymamy sytuację jak na

RYSUNEK 50. Fragment parkietazu typu IH22 $[3^3.4^2]$ RYSUNEK 51. Diagram sąsiedowności dla płytki w parkietazu typu IH25 $[3^3.4^2]$.

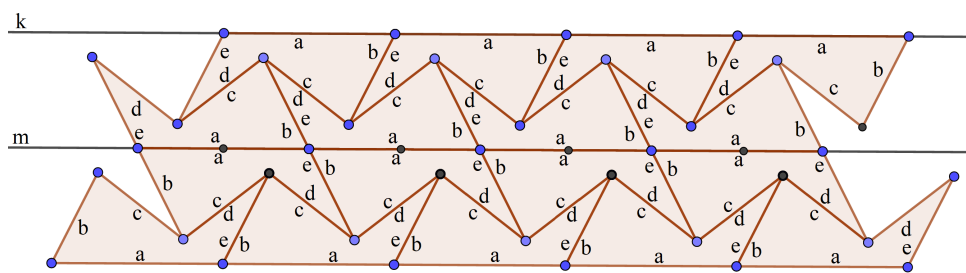
Rysunku 52 lub Rysunku 53 w zależności od tego czy trójkąt został dodany czy odejmy od równoległoboku zgodnie z warunkami w Uwadze 5.1. Zauważmy, że pas płytek pomiędzy prostymi k i m (w obu rysunkach) możemy dalej kontynuować w lewą i prawą stronę w nieskończoność. Zwróćmy też uwagę, że pas poniżej prostej m powstaje przez półobrót pasa pomiędzy prostymi k i m względem środka dowolnej krawędzi o etykiecie "a" na prostej m . Zatem możemy kontynuować wypełnianie płaszczyzny płytkami P_1 wykonując podobne półobroty w górę i w dół w nieskończoność. W ten sposób otrzymamy parkietaz izohedralny typu IH25 $[3^2.4^2]$. \square

5.3. **Typ IH23** $[3^3.4^2]$. Parkietaz typu IH23 $[3^3.4^2]$ tworzą pięciokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 54.

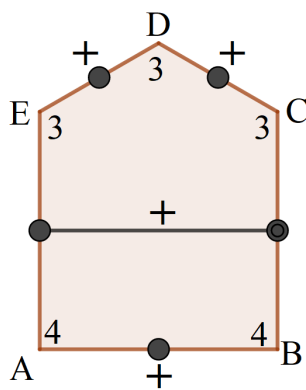
Określmy teraz zakres potencjalnych kształtów dla pięciokątnej płytki z parkietazu typu IH23 $[3^3.4^2]$. Weźmy dowolną pięciokątną płytkę o wierzchołkach A, B, C, D, E o stopniach 4, 4, 3, 3, 3 odpowiednio i z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 54. Podobnie jak przy typie IH22 $[3^3.4^2]$ zauważmy, że boki AE i BC są równe co do długości i równoległe z Lematów 2.17 i 2.22. Zatem ABCE jest równoległobokiem. Patrząc na



RYSUNEK 52. Fragment parkietażu typu IH25 [3³.4²]



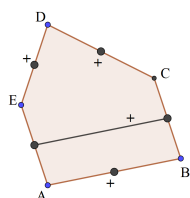
RYSUNEK 53. Fragment parkietażu typu IH25 [3³.4²]



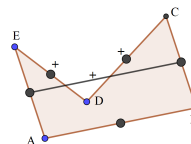
RYSUNEK 54. Diagram sąsiedownia dla płytki w parkietażu typu IH23 [3³.4²].

wierzchołek D, wydaje się, że jedynym ograniczeniem jest to, żeby łamana ABCDE nie miała samoprzecięć i przyjmując to założenie mamy dwie możliwości (patrz Rysunek 55):

- (1) Jeśli wierzchołek D trójkąta CDE znajduje się poza równoległobokiem ABCE i powyżej prostej CE, to dodajemy $\triangle CDE$ do równoległoboku ABCE (patrz Rysunek 55 Przykład 1).
- (2) Jeśli wierzchołek D trójkąta CDE znajduje się wewnątrz równoległoboku ABCE, to odejmujemy $\triangle CDE$ od równoległoboku ABCE. (patrz Rysunek 55 Przykład 2)



(A) Przykład 1



(B) Przykład 2

RYSUNEK 55. Dwie możliwości dla zakresu kształtu płytki $IH23[3^3.4^2]$

Uwaga 5.4. Podsumowując powyższe rozważania, potencjalna pięciokątna płytka musi spełniać następujące warunki:

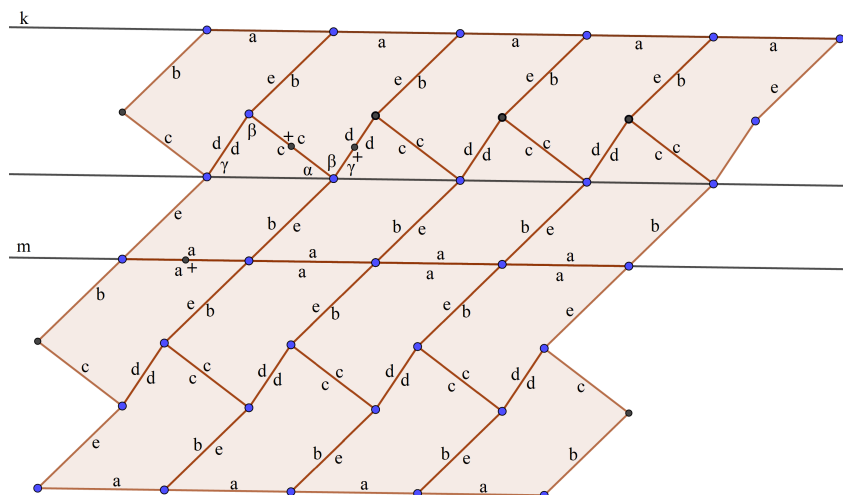
- (1) pięciokąt składa się z równoległoboku i piątego wierzchołka nie należącego do tego równoległoboku,
- (2) piąty wierzchołek nie należący do równoległoboku może leżeć w dowolnym miejscu o ile łamana zamknięta, której wierzchołkami są wierzchołki równoległoboku i wierzchołek nie należący do niego, nie ma samoprzecięć,
- (3) wspomniana w poprzednim punkcie łamana zamknięta wraz z wnętrzem będzie potencjalną pięciokątną płytką.

Fakt 5.5. Dla dowolnej płytki pięciokątnej spełniającej warunki z Uwagi 5.4 istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu $IH23 [3^3.4^2]$.

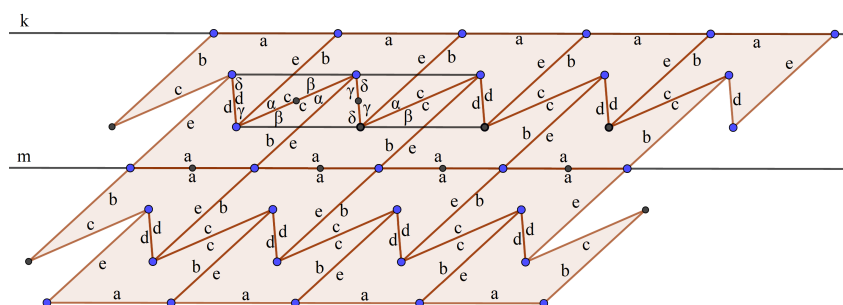
Dowód. Niech P_1 będzie pięciokątną płytką spełniającą warunki z Uwagi 5.4 z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 54. Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 zgodnie z regułami z diagramu sąsiedowności. W pewnym momencie otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 56 lub 57 (zależnie czy piąty wierzchołek leży wewnątrz czy na zewnątrz równoległoboku zgodnie z Uwagą 5.4). Zauważmy, że pas płytek pomiędzy prostymi k i m możemy kontynuować w lewo i prawo w nieskończoność. To, że pas pomiędzy prostymi k i m zapełnia się płytkami w lewo i w prawo wynika z sumowania się kątów α , β i γ do kąta półpełnego dla wierzchołka leżącego na zewnątrz równoległoboku (Rysunek 56). Dla wierzchołka leżącego wewnątrz równoległoboku (Rysunek 57) zapełnienie pasa pomiędzy prostymi k i m wynika z sumowania się kątów α , β , γ i δ do kąta półpełnego. Następnie zwróćmy uwagę, że możemy otrzymać pas poniżej prostej m (w obu przypadkach), poprzez półobrót pasa pomiędzy prostymi k i m względem środka dowolnej krawędzi o etykietce "a" na prostej m . Możemy kontynuować tworzenie nowych pasów w górę i w dół w nieskończoność, zapełniając płaszczyznę płytkami P_1 . W ten sposób otrzymamy parkietaż izohedralny typu $IH23 [3^3.4^2]$. \square

5.4. **Typ $IH24 [3^3.4^2]$.** Parkietaż typu $IH24 [3^3.4^2]$ tworzą pięciokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 58.

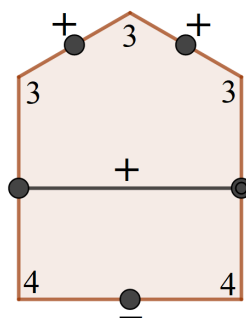
Łatwo pokazać, korzystając z analogicznego rozumowania jak w przypadku $IH23 [3^3.4^2]$, że pięciokątna płytka w parkietażu typu $IH24 [3^3.4^2]$ musi spełniać warunki z Uwagi 5.4.



RYSUNEK 56. Fragment parkietażu typu IH23 $[3^3.4^2]$ otrzymany z płytki P_1



RYSUNEK 57. Fragment parkietażu typu IH23 $[3^3.4^2]$ otrzymany z innego rodzaju płytki P_1

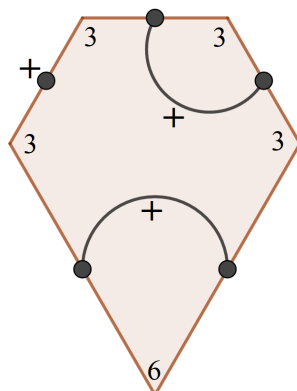


RYSUNEK 58. Diagram sąsiedowności dla płytki w parkietażu typu IH24 $[3^3.4^2]$.

Fakt 5.6. Dla dowolnej płytki pięciokątnej spełniającej warunki z Uwagi 5.4 istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH23 $[3^3.4^2]$.

Dowód. Dowód powyższego faktu jest analogiczny, jak w przypadku dowodu Faktu 5.5 z tą różnicą, że zamiast powielać wypełniony pas za pomocą półobrotu wokół odpowiedniego punktu na prostej m (korzystając z tych samych oznaczeń), będziemy odbijać jeden z pasów względem wspomnianej prostej. \square

5.5. **Typ IH21** [3⁴.6]. Parkietaż typu IH21 [3⁴.6] tworzą pięciokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 59.



RYSUNEK 59. Diagram sąsiedowności dla płytki w parkietażu typu IH21 [3⁴.6].

Ustalimy potencjalny zakres kształtów dla pięciokątnej płytki z parkietażu IH21 [3⁴.6]. Niech P_1 będzie pięciokątą płytką z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 59 o wierzchołkach A, B, C, D, E o stopniach 3, 3, 3, 3, 6 odpowiednio. Rysunek 60 przedstawia ułożenie płytek w takim parkietażu. Zwróćmy uwagę, że krawędzie AE i DE są równej długości z Lematu 2.17, stąd $\triangle ADE$ jest równoramienny o podstawie AD. Dodatkowo w wierzchołku E spotyka się sześć takich samych płytek i jednocześnie sześć kątów α . Zatem $\alpha = 360^\circ : 6 = 60^\circ$. Z równoramienności $\triangle ADE$ i z tego, że $\alpha = 60^\circ$ łatwo wyniwnioskować, że $\triangle ADE$ jest równoboczny. Następnie zauważmy, że krawędzie AB i BC są równej długości z Lematu 2.17, a zatem $\triangle ABC$ także jest równoramienny o podstawie AC. Przy wierzchołku B spotykają się trzy takie same płytki i trzy takie same kąty δ . Zatem $\delta = 360^\circ : 3 = 120^\circ$.

Uwaga 5.7. Podsumowując powyższe rozważania, potencjalna pięciokątne płytki musi spełniać następujące warunki:

- (1) przy wierzchołku E ma być kąt 60° i $\triangle ADE$ ma być równoboczny,
- (2) przy wierzchołku B ma być kąt 120° i $\triangle ABC$ ma być równoramienny, którego podstawą jest odcinek AC,
- (3) łamana zamknięta ABCDE nie ma samoprzecięć.

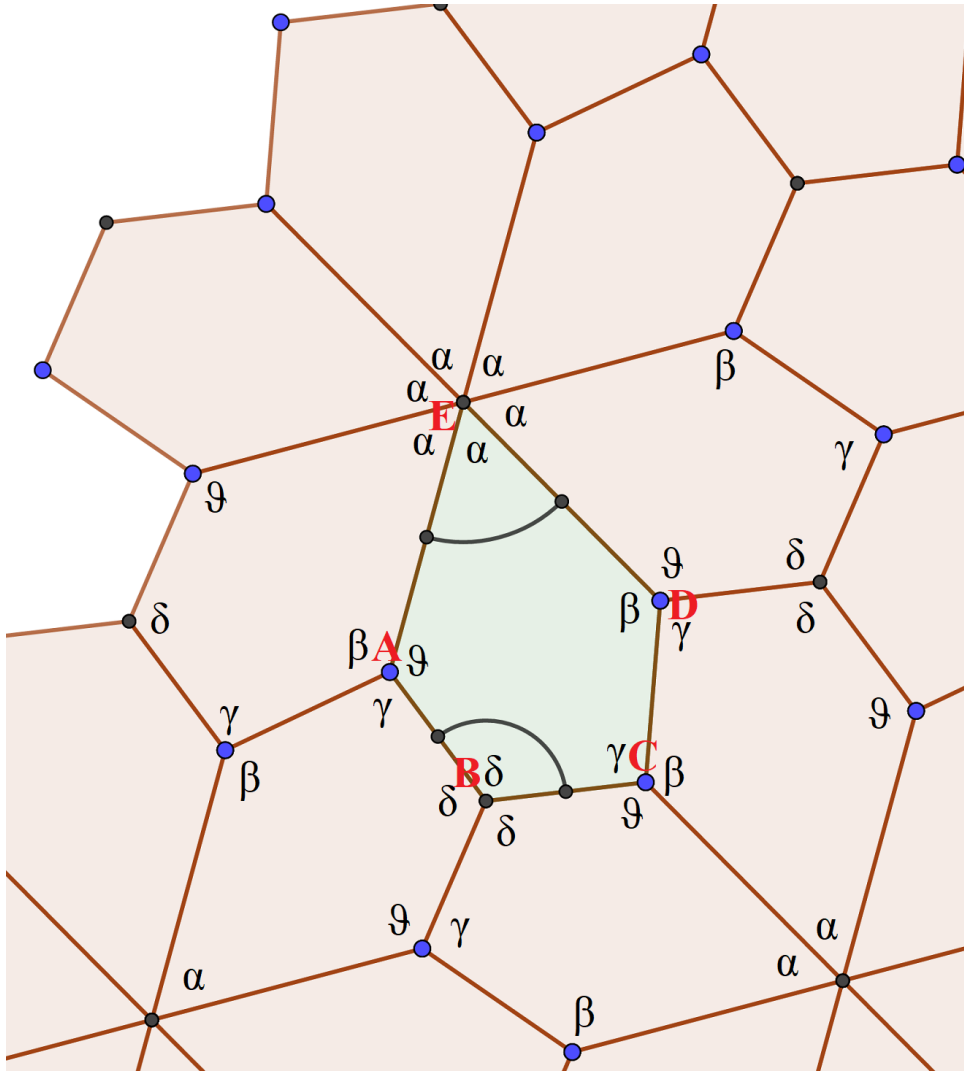
Poniższy Rysunek 61 przedstawia kilka przykładów dla pięciokątnej płytki spełniającej warunki z Uwagi 5.7.

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 5.8. Dla dowolnej płytki pięciokątnej spełniającej warunki z Uwagi 5.7 istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH21 [3⁴.6].

Dowód. Niech P_1 będzie pięciokątą płytką spełniającą warunki z Uwagi 5.7 z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 59.

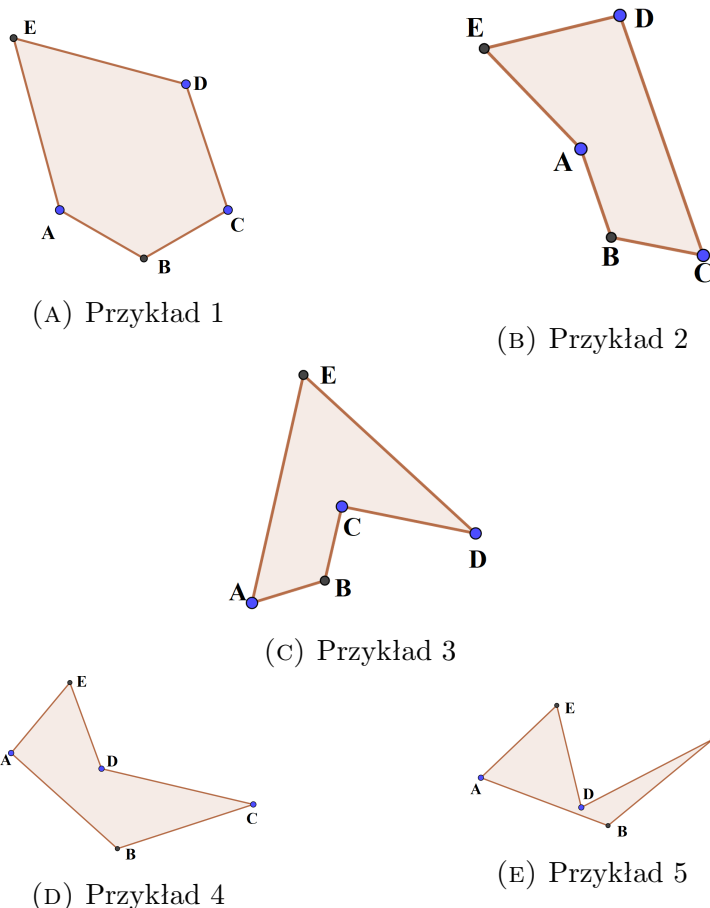
- (1) Najpierw stworzymy fragment parkietażu z płytek P_1 taki jak na Rysunku 62. Z Uwagi 5.7 znamy następujące miary kątów: $\alpha = 120^\circ$ i $\delta = 60^\circ$. Znamy też zależności pomiędzy długościami boków: $c = d$, $a = b$.
- (2) Chcemy pokazać, że pomiędzy pięciokątnymi płytkami ABCDS i DEFSG, przylegającymi do siebie przez krawędź DS, można dołożyć jeszcze jedną płytkę i aby to zrobić, najpierw pokażemy, że suma kątów $\beta + \vartheta < 360^\circ$. Załóżmy nie wprost, że



RYSUNEK 60

$\beta + \vartheta \geq 360^\circ$. Wiemy, że ABCDS jest pięciokątem, więc $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \vartheta = 540^\circ$. Znając miary kątów α i δ otrzymujemy $\beta + \vartheta + \gamma + 180^\circ = 540^\circ$. Zatem mamy równanie $360^\circ = \beta + \vartheta + \gamma \geq 360^\circ + \gamma$ i stąd $\gamma \leq 0^\circ$, sprzeczność. Zatem $\beta + \vartheta < 360^\circ$.

- (3) Z punktu 2. wiemy, że jest miejsce między płytkami ABCDS i DEF GS. Chcemy teraz pokazać, że w to miejsce idealnie wpasuje nam się płytka KLMNO. Zwróćmy uwagę, że krawędź CD w ABCDS ma etykietę "e" i zgodnie z diagramem sąsiedowania płytka przylegająca przez ten bok do ABCDS także ma mieć etykietę "e", a w płytce KLMNO będzie to krawędź KO. Następnie zauważmy, że krawędź DE w płytce DEF GS ma etykietę "c" i zgodnie z diagramem sąsiedowania płytka przylegająca przez ten bok do DEF GS ma mieć etykietę "d" i w płytce KLMNO będzie to krawędź KL. Zatem wystarczy sprawdzić, że kąt $\angle CDE = \beta + \vartheta$ i kąt $\angle LKO$ sumują się do kąta pełnego. Wiemy, że kąt $\angle LKO = \gamma$. ABCDS jest pięciokątem i zachodzi równość $\beta + \vartheta + \gamma = 360^\circ$ i stąd $\angle CDE + \angle LKO = 360^\circ$. Zatem prawdziwe jest stwierdzenie, że pomiędzy dwie pięciokątne płytki ABCDS i DEF GS można dołożyć jeszcze jedną płytkę KLMNO zgodnie z regułami sąsiedowania tak, że płytka KLMNO przylega do płytki ABCDS przez krawędź CD i jednocześnie płytka KLMNO przylega do DEF GS przez krawędź DE. Stosując

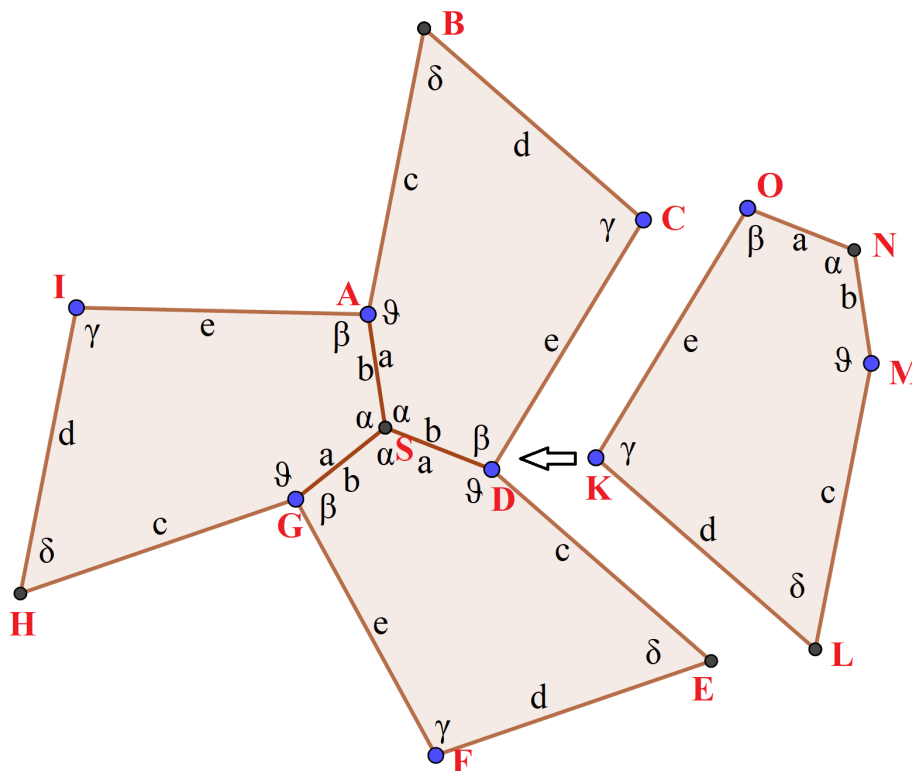


RYSUNEK 61. Przykłady pięciokątnych płytek spełniających warunki z Uwagi 5.7

- powyższe rozumowanie można pokazać, że przy wierzchołkach A i G także można dołożyć kolejne płytki zgodnie z regułami sąsiedowania.
- (4) Spójrzmy teraz na Rysunek 63, w którym oznaczyliśmy środki obrotu płytek o kąt 60° literami A, B, C i D oraz środki obrotu płytek o kąt 120° literami S i O. Wtedy można zauważyć, że punkt B jest obrazem punktu A przez obrót wokół punktu S o kąt 120° . Podobnie punkt C jest obrazem punktu B przez obrót wokół punktu S o kąt 120° i tak samo punkt A jest obrazem punktu C przez obrót wokół S o kąt 120° .
 - (5) Zatem odcinki AS, BS i CS są równej długości, bo punkty A, B i C leżą na okręgu o środku w punkcie S. Zwróćmy uwagę, że trójkąty $\triangle ASB$, $\triangle ASC$ i $\triangle BSC$ są równoramienne o kącie między ramionami równym 120° i przystające z cechy kbk. Zatem są to trzy trójkąty równoramienne, o podstawach równej długości, tworzące równoboczny $\triangle ABC$.
 - (6) Analogicznie do punktu 5. można pokazać, że $\triangle ABD$ także jest równoboczny.
 - (7) Łatwo zauważyć, że $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$ składają się w identyczny sposób z fragmentów sześciu płytek.
 - (8) Zauważmy, że $\triangle ABD$ jest obrazem $\triangle ABC$ przez półobrót względem środka boku AB, zachowując przy tym podział z punktu 7.

- (9) Analogicznie do punktu 8. można pokazać, że $\triangle BCE$ i $\triangle ACE$, z Rysunku 64 są obrazami $\triangle ABC$ przez półobrót względem środka boku BC i AC odpowiednio (także zachowującymi podział z punktu 7). Stąd zauważamy, że wymienione trójkąty równoboczne tworzą parkietaż typu IH84 [6³].
- (10) Z Faktu 3.1 wiemy, że istnieje parkietaż izohedralny typu IH84 [6³], a półobrót zachowuje zarówno podział trójkątów jak i etykietowanie, zatem istnieje również parkietaż izohedralny typu IH21 [3⁴.6].

□



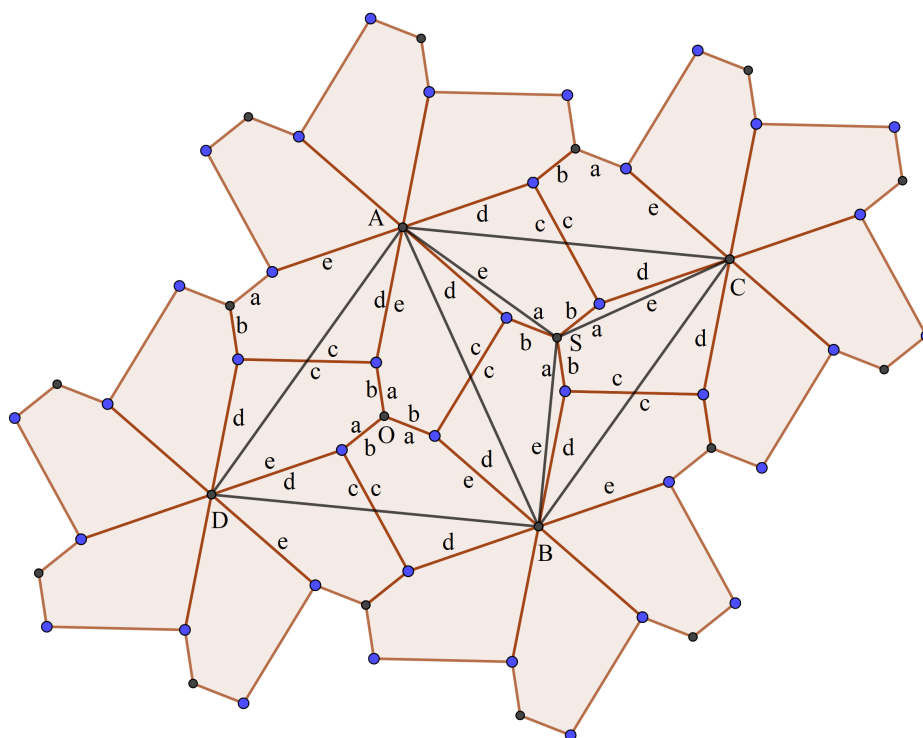
RYSUNEK 62. Fragment parkietażu złożonego z trzech przylegających do siebie płytek i potencjalnie przylegającej czwartej płytki zgodnie z regułami typu izohedralnego IH21 [3⁴.6]

5.6. **Typ IH28** [3².4.3.4]. Parkietaż typu IH28 [3².4.3.4] tworzą pięciokątne płytki z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 65.

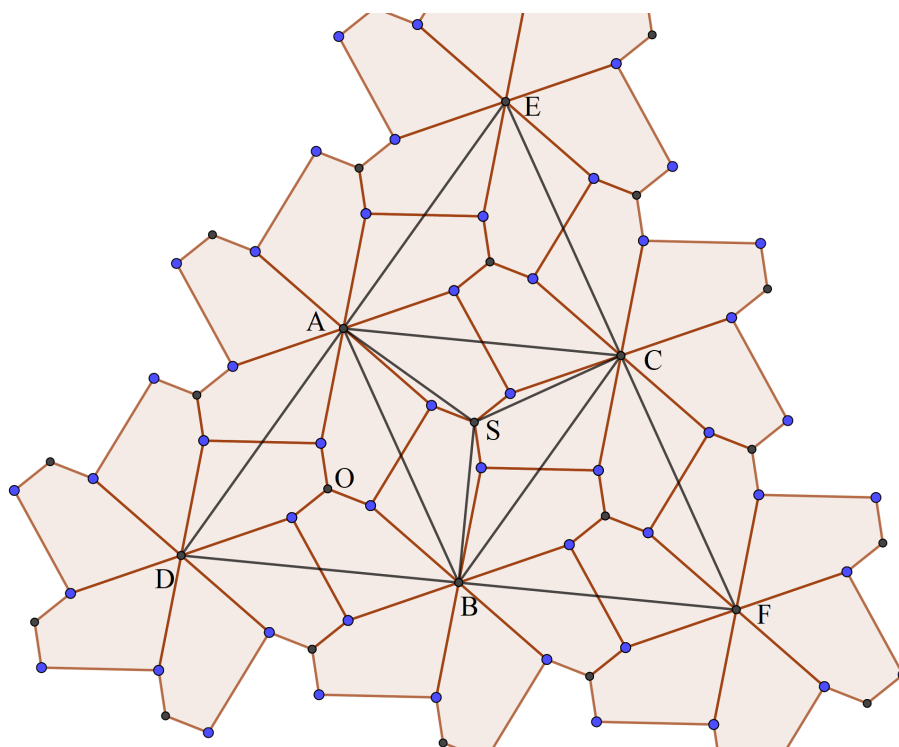
Ustalimy potencjalny kształt pięciokątnej płytki z parkietażu IH28 [3².4.3.4]. Niech P_1 będzie pięciokątą płytką z diagramem sąsiedowności jak na Rysunku 65 oraz wierzchołkami A, B, C, D, E o stopniach 3, 3, 4, 3, 4 odpowiednio. Rysunek 66 przedstawia ułożenie płytek w takim parkietażu. Zwróćmy uwagę, że krawędzie AE i DE są równej długości z Lematu 2.17. Zatem $\triangle ADE$ jest równoramienny. Zauważmy, że przy wierzchołku E spotykają się cztery takie same płytki oraz cztery kąty ϑ . Zatem $\vartheta = 360^\circ : 4 = 90^\circ$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla $\triangle BCD$ otrzymując $\gamma = 90^\circ$.

Uwaga 5.9. Podsumowując powyższe rozważania, potencjalna pięciokątna płytka musi spełniać następujące warunki:

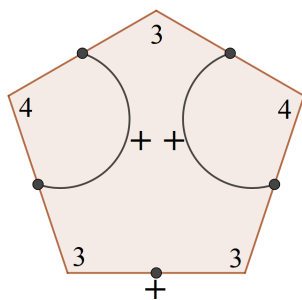
- (1) przy wierzchołkach E i C mają być kąty proste,
- (2) $\triangle ADE$ i $\triangle BDC$ mają być równoramienne o podstawach AD i BD odpowiednio,



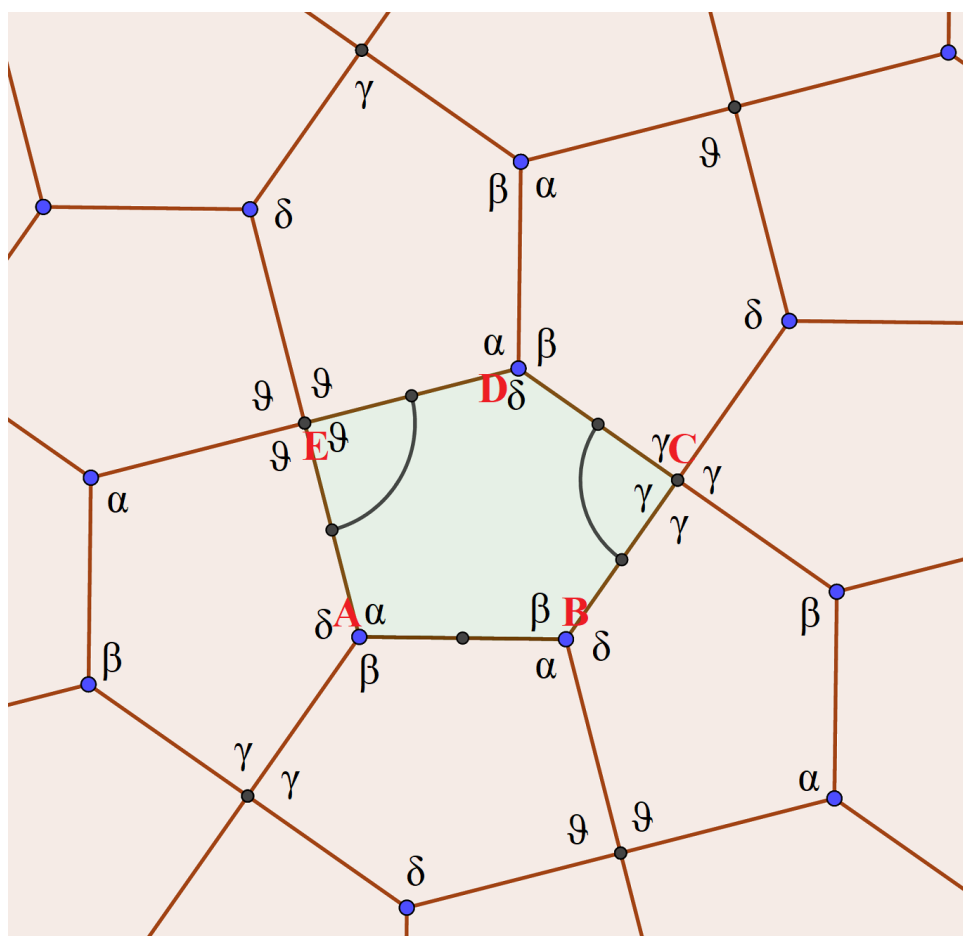
RYSUNEK 63. Fragment parkietazu złożonego z płytek P_1 typu IH21 [3⁴.6]



RYSUNEK 64. Nieco większy fragment parkietazu złożonego z płytek P_1 typu IH21 [3⁴.6]



RYSUNEK 65. Diagram sąsiedowania dla płytki w parkiecie typu IH28 [3².4.3.4].



RYSUNEK 66

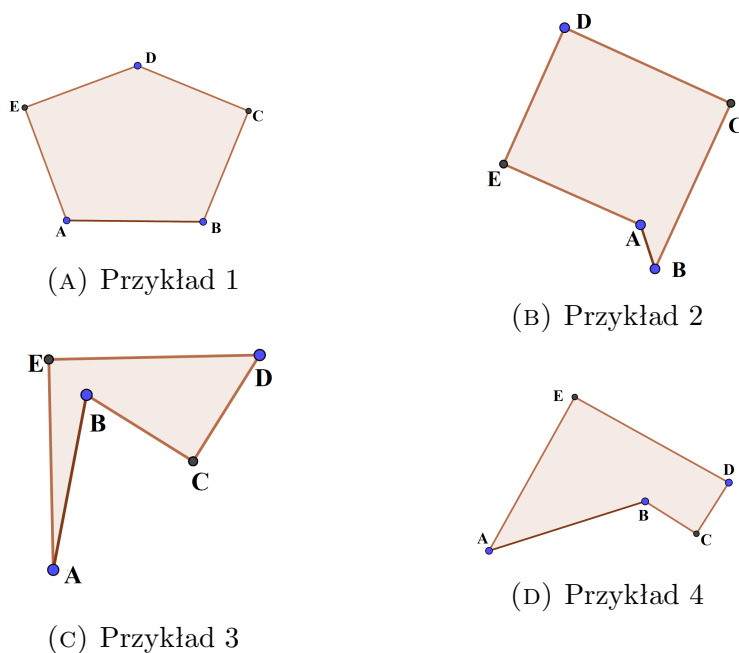
(3) łamana zamknięta ABCDE nie ma samoprzecięć.

Poniższy Rysunek 67 przedstawia kilka przykładów dla pięciokątnej płytki spełniającej warunki z Uwagi 5.9.

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 5.10. *Dla dowolnej płytki pięciokątnej spełniającej warunki z Uwagi 5.9 istnieje parkiet izohedralny płaszczyzny typu IH28 [3².4.3.4].*

Dowód. Niech P_1 będzie pięciokątą płytką spełniającą warunki z Uwagi 5.9 o diagramie sąsiedowania jak na Rysunku 65.



RYSUNEK 67. Przykłady pięciokątnych płytek spełniających warunki z Uwagi 5.9

- (1) Na Rysunku 68 mamy przedstawione dwa fragmenty parkietażu, gdzie w każdym mamy cztery płytki P_1 skupione wokół wspólnego wierzchołka. Z Uwagi 5.9 wiemy, że $\alpha = 90^\circ$ i $\gamma = 90^\circ$, a także, że $a = b$ i $c = d$.
- (2) Chcemy pokazać, że do czterech płytek o wspólnym wierzchołku S możemy dołożyć cztery płytki o wspólnym wierzchołku X tak, aby przylegały do siebie przez łamaną $EABC$ jak pokazano na Rysunku 69. Najpierw pokażemy, że przy wierzchołku A suma kątów $\beta + \vartheta < 360^\circ$. Załóżmy nie wprost, że $\beta + \vartheta \geq 360^\circ$. Wiemy, że $ABCDS$ jest pięciokątem, więc $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \vartheta = 540^\circ$. Znając miary kątów α i γ otrzymujemy $\beta + \vartheta + \delta + 180^\circ = 540^\circ$. Zatem mamy równanie $360^\circ = \beta + \vartheta + \delta \geq 360^\circ + \delta$ i stąd $\delta \leq 0^\circ$, sprzeczność. Zatem $\beta + \vartheta < 360^\circ$. Oczywiście jest fakt, że przy wierzchołku B kąt δ ma miarę mniejszą o kąta pełnego.
- (3) Chcemy teraz pokazać, że do płytek $ABCDS$ i $GFEAS$ możemy idealnie dołożyć płytki $KLMNX$ i $NOPRX$. Zwróćmy uwagę, że krawędź EA w $GFEAS$ ma etykietę "c" i zgodnie z diagramem sąsiedowania płytka przylegająca przez ten bok do $GFEAS$ ma mieć etykietę "d", a w płytce $KLMNX$ będzie to krawędź LM . Następnie zauważmy, że krawędź AB w płytce $ABCDS$ ma etykietę "e" i zgodnie z diagramem sąsiedowania płytka przylegająca przez ten bok do $ABCDS$ ma mieć także etykietę "e" i w płytce $KLMNX$ będzie to krawędź MN . W końcu zauważmy, że krawędź BC w płytce $ABCDS$ ma etykietę "d" i zgodnie z diagramem sąsiedowania płytka przylegająca przez ten bok do $ABCDS$ ma mieć etykietę "c" i będzie to krawędź NO w płytce $NOPRX$. Sprawdźmy teraz, że kąt $\angle EAB = \beta + \vartheta$ i kąt $\angle LMN$ sumują się do kąta pełnego. Wiemy, że kąt $\angle LMN = \delta$. $ABCDS$ jest pięciokątem i zachodzi równość $\beta + \vartheta + \delta = 360^\circ$ i stąd $\angle EAB + \angle LMN = 360^\circ$. Analogicznie pokazujemy, że $\angle ABC + \angle MNO = 360^\circ$. Zatem prawdziwe jest stwierdzenie, że do dwóch pięciokątnych płytek $ABCDS$ i $GFEAS$, przylegających do siebie przez krawędź AS , można idealnie dołożyć dwie płytki $KLMNX$ i $NOPRX$ zgodnie z regułami sąsiedowania tak, że płytka $KLMNX$ przylega do

płytki GFEAS przez krawędź EA oraz płytka KLMNO przylega do ABCDS przez krawędź AB i płytka NOPRX przylega do płytki ABCDS przez krawędź BC.

- (4) Spójrzmy teraz na Rysunek 69. Zauważmy, że punkt B jest obrazem punktu A przez obrót wokół wierzchołka S o kąt prosty. Analogicznych obserwacji można dokonać dla par wierzchołków B i C, C i D oraz D i A.
- (5) Zwróćmy uwagę, że odcinki AS, BS, CS i DS są tej samej długości, ponieważ są to promienie okręgu o środku w punkcie S. Dodatkowo każdy z trójkątów $\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$ i $\triangle ASD$ jest równoramienny i prostokątny oraz są to trójkąty przystające z cechy bkb. Są to zatem cztery trójkąty tworzące kwadrat ABCD.
- (6) Analogicznie do punktu 4 i 5 pokazujemy, że kwadratami są czworokąty DCFE, BIHC, CHGF.
- (7) Zauważmy, że kwadrat ABCD i kwadrat DCFE składają się w identyczny sposób z fragmentów czterech płytek. Stąd wnioskujemy, że kwadrat DCFE jest obrazem kwadratu ABCD przez przesunięcie o wektor AD.
- (8) Analogicznie do punktu 7 możemy zauważyć, że obrazem kwadratu ABCD przez translację o wektor AB jest kwadrat BIHC. Kwadrat CHGF jest zaś obrazem np. kwadratu DCFE przez translację o wektor DC.
- (9) Łatwo zauważyć, że dokonując kolejnych przesunięć, możemy wypełnić płaszczyzną kwadratami przystającymi do kwadratu ABCD z zachowaniem podziału na pięciokątne płytki wraz z etykietowaniami.
- (10) W ten sposób otrzymujemy parkietaż izohedralny typu IH28 [3².4.3.4].

□

5.7. Typ IH27 [3².4.3.4]. Parkietaż typu IH27 [3².4.3.4] tworzą pięciokątne płytki z diagramem sąsiedownia jak na Rysunku 70.

Określimy potencjalny kształt pięciokątnej płytki z parkietażu IH27 [3².4.3.4]. Niech P_1 będzie pięciokątną płytką z diagramem sąsiedownia jak na Rysunku 70 i wierzchołkach A, B, C, D, E o stopniach 3, 3, 4, 3, 4 odpowiednio. Przypomnijmy, że łuk ze znakiem "–" oznacza, że symetrią parkietażu będzie symetria z poślizgiem. Utworzymy fragment parkietażu jak na Rysunku 71. Zauważmy, że przy wierzchołku C spotykają się dwa kąty γ i dwa kąty ϑ , stąd otrzymujemy $\gamma + \vartheta = 180^\circ$.

Uwaga 5.11. Z powyższych rozważań możemy sformułować następujące warunki na potencjalny kształt pięciokątnej płytki z parkietażu IH27 [3².4.3.4]:

- (1) Kąt γ przy wierzchołku C ma być mniejszy od kąta półpełnego, a kąt ϑ przy wierzchołku E ma wynosić $\vartheta = 180^\circ - \gamma$.
- (2) $BC = DE$ i $CD = AE$.
- (3) Łamana zamknięta ABCDE nie ma samoprzecięć.

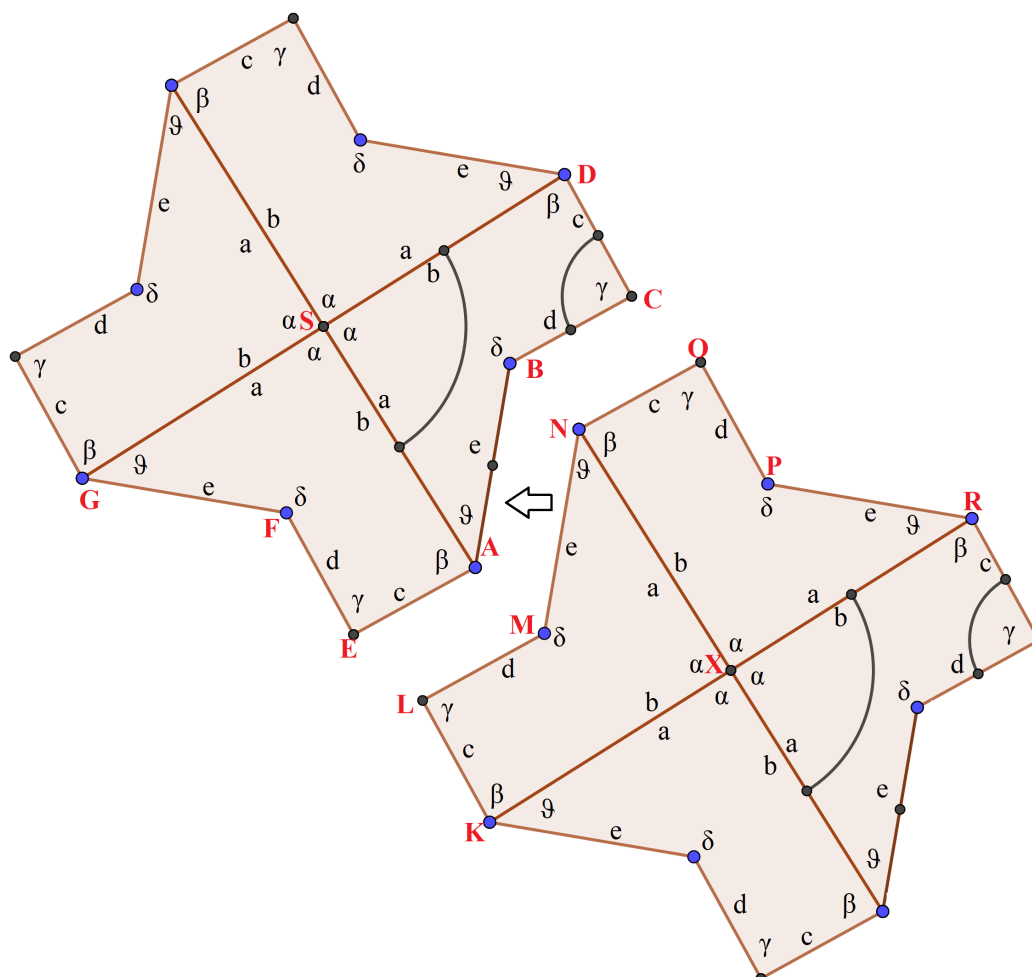
Poniższy Rysunek 72 przedstawia kilka przykładów dla pięciokątnej płytki spełniającej warunki z Uwagi 5.11.

Sformułujemy następujący fakt:

Fakt 5.12. *Dla dowolnej pięciokątnej płytki spełniającej warunki z Uwagi 5.11 istnieje parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH27 [3².4.3.4].*

Dowód. Niech P_1 będzie pięciokątną płytką spełniającą warunki z Uwagi 5.11 o diagramie sąsiedownia jak na Rysunku 70.

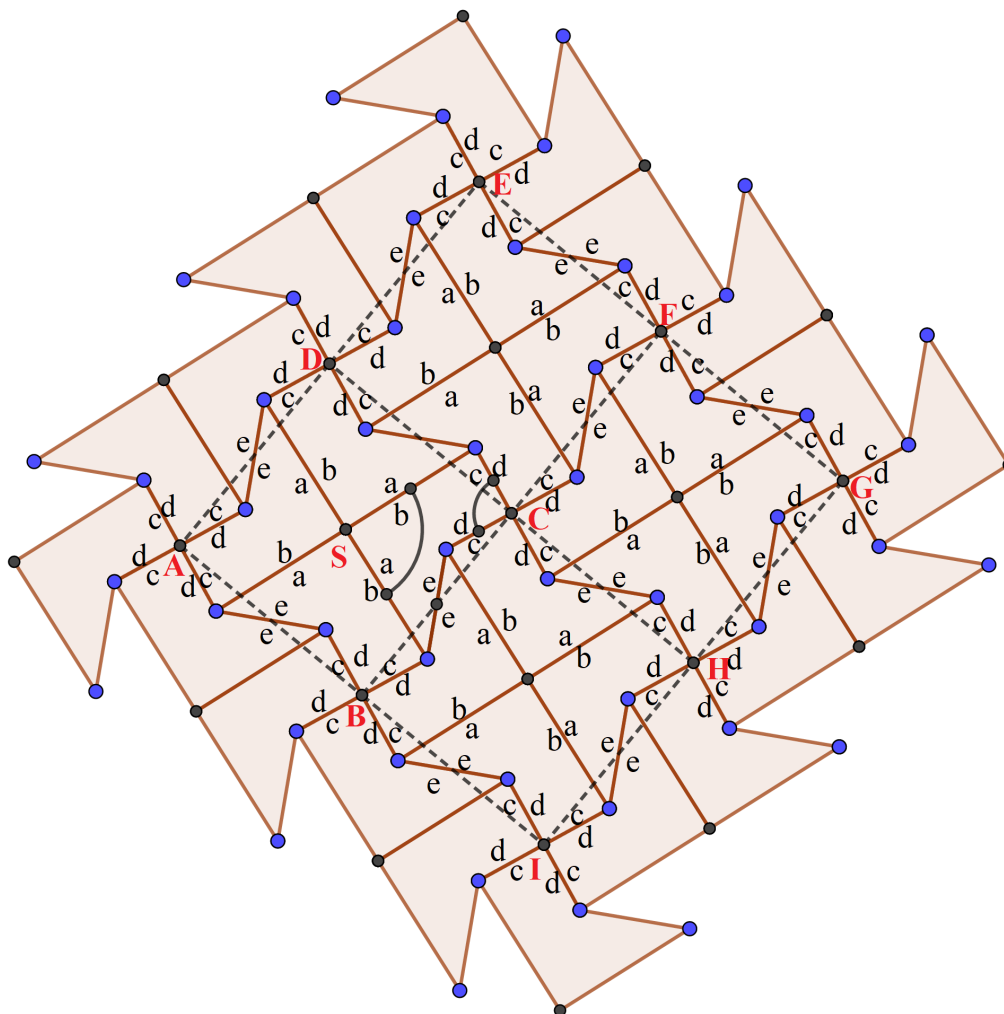
- (1) Zaczniemy wypełniać płaszczyznę płytkami P_1 . Po pewnym czasie otrzymamy fragment parkietażu jak na Rysunku 73 w którym mamy cztery płytki. To, że te płytki idealnie do siebie przylegają, wynika z następujących obserwacji. Z Uwagi 5.11 wiemy, że $\gamma + \vartheta = 180^\circ$, a stąd łatwo wynika, że $\alpha + \beta + \delta = 360^\circ$. Ponadto



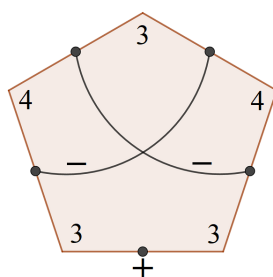
RYSUNEK 68. Dwa fragmenty parkietażu, gdzie w każdym mamy cztery płytki P_1 skupione wokół wspólnego wierzchołka

z warunku 2. Uwagi 5.11 zachodzą równości boków: $b = d$ i $c = e$. Pokażemy, że przedstawiona na Rysunku 73 figura jest sześciokątem $ABCDEF$ o równoległych przeciwległych bokach

- (2) Najpierw zwróćmy uwagę, że kąty $\angle KHD$ i $\angle KHC$ sumują się do kąta półpełnego, ponieważ $\angle KHD + \angle KHC = \gamma + \vartheta = 180^\circ$, stąd boki DH i HC leżą na tej samej prostej i mają wspólny wierzchołek, a zatem tworzą bok DC . Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla boków BC , AB , AF , EF i ED . Zatem rzeczywiście $ABCDEF$ jest sześciokątem.
- (3) Następnie zauważmy, że bok CD składa się z krawędzi DH o etykietce "c" i krawędzi CH o etykietce "e". Podobnie bok AF składa się z krawędzi FL o etykietce "e" i krawędzi AL o etykietce "c". Oczywistym jest fakt, że krawędzie o tych samych etykietach mają te same długości, zatem $CD = AF$. Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla par boków BC i EF oraz AB i DE .
- (4) Zwróćmy uwagę, że kąty $\angle AFE + \angle FED + \angle EDC = \alpha + \beta + \delta = 360^\circ$. Z faktu, że jeśli suma trzech sąsiednich kątów w sześciokącie jest równa 360° , to przeciwległe boki w tym sześciokącie są równoległe, wniokujemy, że rzeczywiście w sześciokącie $ABCDEF$ mamy $AB \parallel ED$, $CD \parallel AF$ i $BC \parallel EF$. Zatem $ABCDEF$ jest sześciokątem o równoległych przeciwległych bokach.

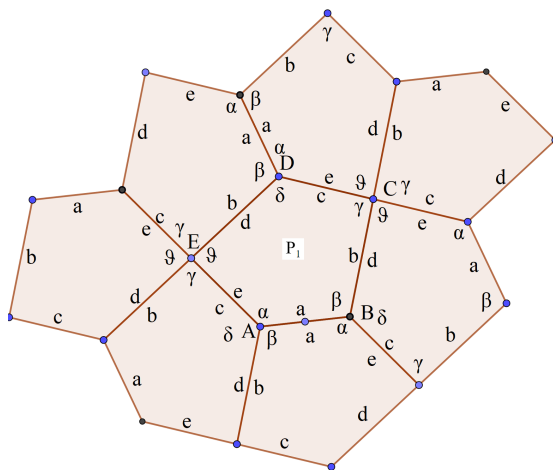
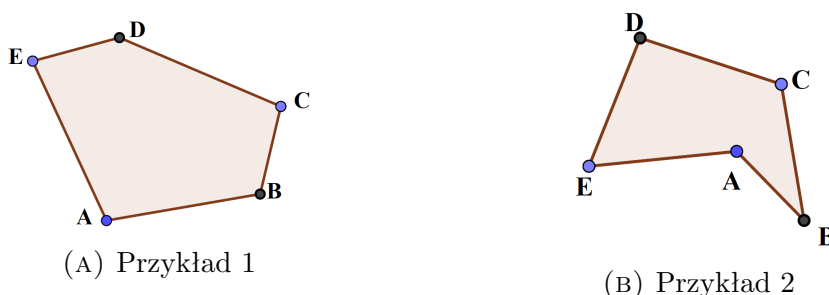


RYSUNEK 69. Fragment parkietażu ułożonego z płytek P_1



RYSUNEK 70. Diagram sąsiedownia dla płytki w parkietażu typu IH27 $[3^2.4.3.4]$.

- (5) Weźmy teraz dwa sześciokąty ABCDEF i BGHIJC takie jak opisane w punktach 1 - 5 i niech przylegają do siebie przez krawędź BC (patrz Rysunek 74). Pokażemy, że można idealnie dołożyć do nich trzeci sześciokąt PQRSTU, taki jak opisany w punktach 1 - 5. Zwróćmy uwagę, że krawędź AK w ABCDEF ma etykietę "d" i zgodnie z diagramem sąsiedownia płytka przylegająca przez ten bok do ABCDEF ma mieć etykietę "b", a w PQRSTU będzie to krawędź UW. Podobnie krawędź

RYSUNEK 71. Fragment parkietażu IH27 [3².4.3.4]

RYSUNEK 72. Przykłady pięciokątnych płytek spełniających warunki z Uwagi 5.11

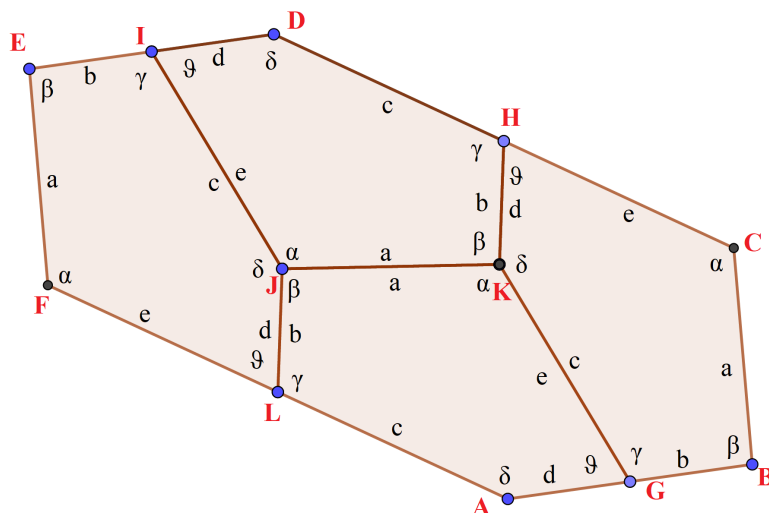
BK w ABCDEF ma etykietę "b" i zgodnie z diagramem sąsiedownia płytka przylegająca przez ten bok do ABCDEF ma mieć etykietę "d", a w PQRSTU będzie to krawędź TW. Zauważmy, że krawędź BL w BGHIJC ma etykietę "e" i zgodnie z diagramem sąsiedownia płytka przylegająca przez ten bok do BGHIJC ma mieć etykietę "c", a w PQRSTU będzie to krawędź TV. Podobnie krawędź GL w BGHIJC ma etykietę "c" i zgodnie z diagramem sąsiedownia płytka przylegająca przez ten bok do BGHIJC ma mieć etykietę "e", a w PQRSTU będzie to krawędź VS. Sprawdźmy teraz, że przy wierzchołku B $\alpha + \beta < 360^\circ$. Gdyby tak nie było, to $\alpha + \beta \geq 360^\circ$ i wtedy z punktu I mamy $360^\circ = \alpha + \beta + \delta \geq 360^\circ + \delta$, a zatem $\delta \leq 0^\circ$, sprzeczność. Podobnie można pokazać, że również $\alpha + \delta < 360^\circ$ i $\delta + \beta < 360^\circ$. Oczywiście faktem jest to, że $\delta < 360^\circ$ przy wierzchołku A i G. Zatem wiemy, że przy wierzchołku A, B i G jest miejsce na wstawienie kolejnej płytki. Sprawdźmy teraz, że kąt $\angle ABG = \alpha + \beta$ i kąt $\angle UTS$ sumują się do 360° . Wiemy, że $\angle UTS = \delta$, a stąd mamy $\angle ABG + \angle UTS = \alpha + \beta + \delta = 360^\circ$. Zatem pokazaliśmy, że rzeczywiście do dwóch sześciokątów ABCDEF i BGHIJC jak na Rysunku 74 przylegających do siebie krawędzią BC, można idealnie dołożyć sześciokąt PQRSTU.

- (6) Zauważmy (nadal patrząc na Rysunek 74), że sześciokąt BGHIJC jest obrazem sześciokąta ABCDEF przez translację o wektor FB. Możemy zatem kontynuować te przesunięcia wzdłuż prostej BF o wektor FB w obie strony otrzymując nieskończony pas sześciokątów zachowujących podział wyjściowego sześciokąta ABCDEF

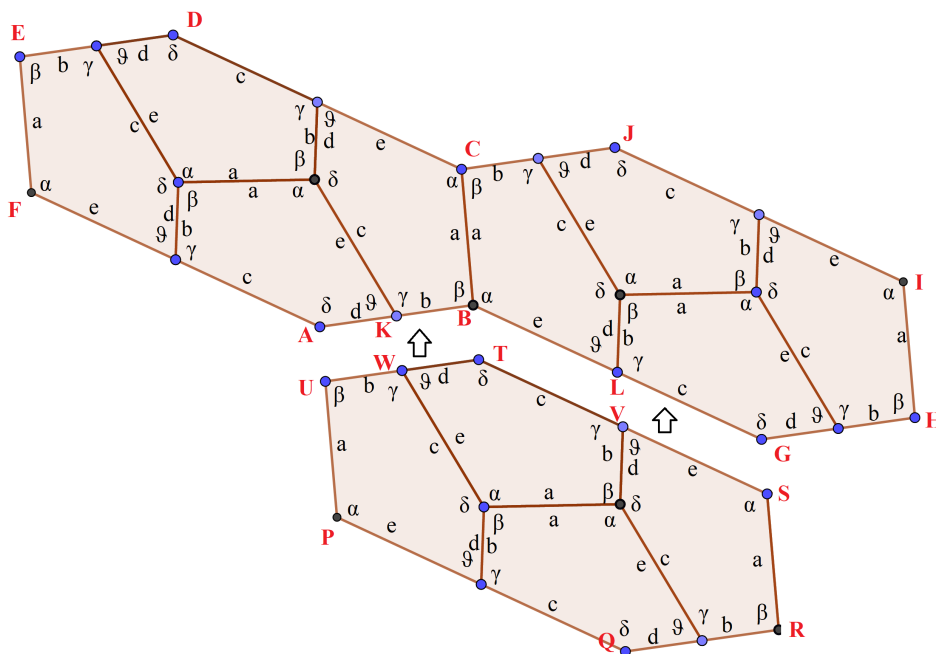
na cztery płytki pięciokątne P_1 oraz etykietowanie, widoczny na Rysunku 75 jako środkowy, pomalowany na niebiesko pas sześciokątów.

- (7) Zauważmy teraz, że możemy środkowy pas sześciokątów przesunąć o wektor AC otrzymując pas poniżej pasa środkowego i pas powyżej środkowego pasa. Możemy kontynuować przesuwania kolejnych pasów o wektor AC wzdłuż prostej AC w górę i w dół. Stąd otrzymujemy parkietaż izohedralny płaszczyzny typu IH27 [3².4.3.4].

□

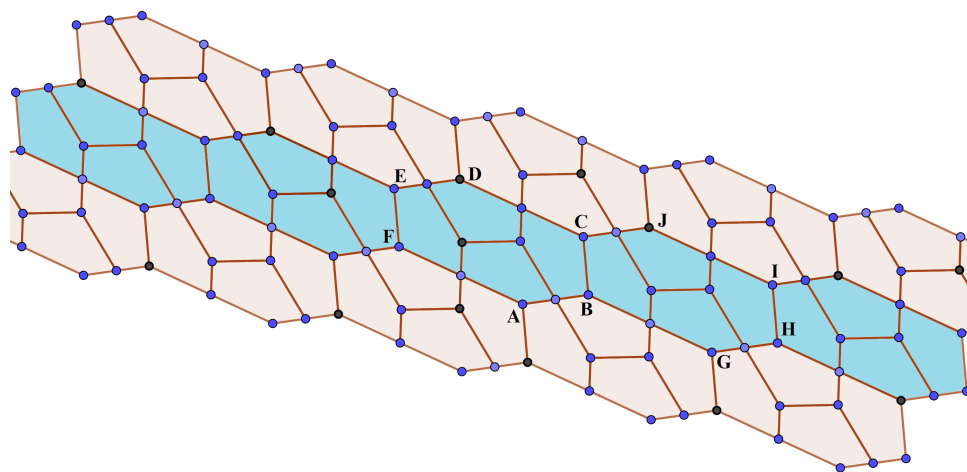


RYSUNEK 73. Cztery płytki tworzące sześciokąt



RYSUNEK 74. Fragment parkietażu typu IH27 [3².4.3.4]

W ten sposób zakończyliśmy analizę zakresów kształtów 23 typów parkietażu izohedralnych o niesymetrycznych płytkach, które założyliśmy, że uda nam się przeanalizować.



RYSUNEK 75. Pasy złożone z sześciokątów

LITERATURA

- [1] B. N. Delone, *Theory of planigons*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 23:3 (1959), 365–386.
- [2] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings & patterns*, Dover Publications Inc., Second Edition, 2016.
- [3] C.S. Kaplan, *Introductory Tiling Theory for Computer Graphics*, Morgan&Claypool Publishers, First Edition, 2009.
- [4] K. Siejek, *Klasyfikacja parkietaży izohedralnych o niesymetrycznych płytkach*, praca magisterska, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 2018.