Bardo, 3-7 listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Skoki Viete'y

Po angielsku Vieta Jumping.

1. Udowodnij, że jeśli $ab|a^2+b^2+1$, to $a^2+b^2+1=3ab$.

2. Udowodnij, że równanie $x^2+y^2+z^2=3xyz$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.

3. Rozwiąż równanie $x^2-3xy+y^2=1$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y.

4. (IMO 1988) Niech będą dane dodatnie liczby całkowite a, b spełniające $ab+1|a^2+b^2$. Udowodnij, że liczba $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

5. (Putnam 1993) Rozważmy wszystkie całkowite rozwiązania równania $a^2+b^2+c^2+d^2=abc+bcd+cda+dab$. Udowodnij, że $\min(a,b,c,d)$ może być dowolnie duże.

6. Rozważmy krzywą eliptyczną tj. zbiór punktów (x, y) spełniających równanie $y^2=x^3+Ax+B$ dla pewnych wymiernych A, B. Udowodnij, że jeśli pewna prosta przechodzi przez dwa punkty krzywej o współrzędnych wymiernych (i w żadnym z nich nie jest do niej styczna), to przechodzi też przez trzeci.

7. Niech a, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Udowodnij, że podzielność $4ab-1|(a-b)^2$ jest równoważna z $a=b$.

8. Dla liczb całkowitych dodatnich a, b zachodzi podzielność $ab-1|a^2+b^2$. Znajdź wszystkie możliwe wartości $\frac{a^2+b^2}{ab-1}$.

9. (MEMO 2018) Liczba całkowita n jest nazywana śląską, jeśli istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniające:

$$n=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb śląskich.

10. (IMO Shortlist 2017) Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek dodatnich liczb wymiernych (x, y, z) takich, że liczby $x+y+z$ oraz $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ są całkowite.

Materiały przygotował: Łukasz Orski.