Bardo, 3-7 listopad 2021

V UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Wzory Viete'a

1. Niech będą dane liczby rzeczywiste a, b, c, d. Niech $a+b+c+d>0$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd>0$, $abc+bcd+cda+dab>0$, $abcd>0$. Udowodnij, że $a, b, c, d>0$.

2. Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami wielomianu x^2+x-8. Udowodnij, że $x_1^{10}+x_2^{10}$ jest liczbą całkowitą oraz oblicz jej resztę z dzielenia przez 7.

3. Udowodnij, że nie wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)=x^{10}+3x^9+7x^8+2x+1$ są rzeczywiste.

4. Przedstaw wyrażenie $x^3+y^3+z^3$ za pomocą wyrażeń $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+yz+zx$, $\sigma_3=xyz$.

5. Niech będzie dany wielomian $P(x)=x^3-2x+1=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Znajdź wielomian $Q(x)=\left(x-\frac{1}{x_1}\right)\left(x-\frac{1}{x_2}\right)\left(x-\frac{1}{x_3}\right)$.

6. (57 OM, etap 1.) Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian

$$P(x)=x^5-5x^3+4x-c$$

ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, x_4, x5$. Wyznaczyć, w zależności od c, sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x)=(x-x_1^2)(x-x_2^2)(x-x_3^2)(x-x_4^2)(x-x_5^2)$$

7. (Lev Kourliandtchik "Powrót do krainy nierówności") Niech dla dodatnich liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą oznaczenia:

$$p=\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad q=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j$$

Udowodnij, że dla każdego $1\leqslant i\leqslant n$ zachodzi:

$$\frac{p}{n}+\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}\geqslant a_i\geqslant \frac{p}{n}-\frac{n-1}{n}\sqrt{p^2-\frac{2n}{n-1}q}$$

8. (Lev Kourliandtchik "Powrót do krainy nierówności") Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość $abc=-\frac{a+b+c}{3}$, to wartość bezwzględna co najmniej jednej z nich nie przekracza $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. (1989 IMO Longlist) Niech wielomian

$$W(x)=x^n+nx^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\ldots+a_1x+a_0$$

ma n pierwiastków rzeczywistych $r_1, r_2, \ldots, r_n$, które spełniają:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^{16}=n$$

Materiały przygotował: Łukasz Orski.

Znajdź wszystkie takie wielomiany (dla ustalonego n).

10. Niech liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równości $a+b+c=0$ oraz $a^2+b^2+c^2=6$. Udowodnij, że $-2 \leqslant abc \leqslant 2$.