Lista z kongruencji

1. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

2. Niech x oraz y będą liczbami całkowitymi. Udowodnij, że $2x + 3y$ jest podzielne przez 17 wtedy i tylko wtedy, gdy $9x + 5y$ jest podzielne przez 17.

3. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite d, które dzielą zarówno $n^2 + 1$, jak i $(n + 1)^2 + 1$ dla pewnej liczby całkowitej n.

4. Pokazać, że dla dowolnych liczb calkowitych a, b oraz m zachodzi:
   (a) $NWD(a, b) \cdot NWW(a, b) = ab$
   (b) $NWD(am, bm) = m \cdot NWD(a, b)$
   (c) $NWW(am, bm) = m \cdot NWW(a, b)$
   (d) $m \mid NWD(a, b) \Rightarrow NWD(\frac{a}{m}, \frac{b}{m}) = \frac{NWD(a,b)}{m}$
   (e) $(a \mid bc$ oraz $NWD(a, c) = 1) \Rightarrow a \mid b$

5. Pokazać, że jeżeli iloczyn $\prod_{i=1}^{n} a_i$ jest k-tą potęgą liczby całkowitej, gdzie $NWD(a_i, a_j) = 1$ dla $i \neq j$, to każda z liczb a_i jest k-tą potęgą liczby całkowitej.

6. Pokazać, że każde dwie kolejne liczby całkowite są względnie pierwsze.

7. Pokazać, że dla każdej całkowitej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna dodatnia k, że liczba nk w zapisie dziesiętnym składa się tylko z zer i jedynek.

8. Pokazać, że dla każdej całkowitej liczby naturalnej n, takiej że $NWD(n, 10) = 1$) istnieje taka liczba naturalna dodatnia k, że liczba nk w zapisie dziesiętnym składa się tylko z jedynek.

9. Pokazać, że dla każdej pary liczb całkowitych a i b istnieją takie liczby całkowite x i y, że $a \cdot x + b \cdot y = NWD(a, b)$

10. Wywnioskować z poprzedniego zadania warunek na względnie pierwszość liczb.

11. Niech dane będą liczby a, b, x_0, y_0, n, takie że $a \cdot x_0 + b \cdot y = n$. Wyznaczyć zbiór wszyskich par (x, y) spełniających równanie $a \cdot x + b \cdot y = n$

12. Pokazać, że ułamek $\frac{21n+4}{14n+3}$ jest nieskracalny dla każdej dodatniej całkowitej liczby n.

13. Pokazać, że $NWD(a, NWD(b, c)) = NWD(NWD(a, b), c)$

14. Pokazać, że $\frac{NWD(a,b,c)^2}{NWD(a,b) \cdot NWD(a,c) \cdot NWD(b,c)} = \frac{NWD(a,b,c)^2}{NWW(a,b) \cdot NWW(a,c) \cdot NWW(b,c)}$

15. Pokazać, że $NWD(a^n - 1, a^m - 1) = a^{NWD(n,m)} - 1$ dla $a > 1$

16. Pokazać, że jedynym rozwiązaniem równania $x^2 + 2y^2 = 0$ jest $x = y = 0$

17. Udowodnić, że dla danych liczb całkowitych a i b odwrotność a modulo b istnieje wtedy i tylko wtedy gdy $NWD(a, b) = 1$

18. Udowodnić Twierdzenie Eulera.

19. Wywnioskować z Twierdzenia Eulera Małe Twierdzenie Fermata.

20. Udowodnić Twierdzenie Wilsona

21. Udowodnić Chińskie Twierdzenie o Resztach

22. Pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych takich, że żadna z nich nie jest

    (a) liczbą pierwszą

    (b) całkowitą potęgą liczby pierwszej.

23. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich równania $3^x + 4^y = 5^z$.

24. Pokazać, że jeżeli n i m są dodatnimi liczbami całkowitymi to $4mn - m - n$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.