ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 13

Zakładamy, że X jest normalną przestrzenią topologiczną.

Twierdzenie 1
Każdy snop miękki na X jest Γ-acykliczny.
Dowód
Niech $\mathcal{F}$ będzie snopem miękkim
Krok 1
Dla każdego krótkiego ciągu dokładnego

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

ciąg cięć globalnych

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\psi|_X} \mathcal{H}(X) \xrightarrow{\phi|_X} \mathcal{G}(X) \longrightarrow 0$$

jest też dokładny.
Dowód kroku 1
Musimy pokazać, że $\phi|_X : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{G}(X)$ jest "na". Z zadania 1 listy 10, dla każdego $x \in X$, ciąg źdźbeł

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{\psi|_x} \mathcal{H}_x \xrightarrow{\phi|_x} \mathcal{G}_x \longrightarrow 0$$

jest dokładny. Stąd istnieje otwarte otoczenie $U \ni x$ i $\bar{s} \in \mathcal{H}(U)$ takie, że $\phi|_U(\bar{s})_x = s_x$. Stąd istnieje otoczenie $U' \ni x$, takie że

$$s|_{U'} = \phi|_U(\bar{s})_{U'} = \phi|_{U'}(\bar{s}|_{U'}).$$

Stąd możemy pokryć X zbiorami otwartymi U_i, taki że dla każdego i, $s|_{U_i} \in \mathrm{im}(\phi|_{U_i})$. Ponieważ X jest przestrzenią normalną, możemy zastąpić pokrycie otwarte (U_i) (oddzielając każdy $x \in U_i$ od $X \setminus U_i$ zbiorami otwartymi) pokryciem domkniętym (C_i) (tzn. X jest sumą wnętrz C_i) takim, że dla każdego i, $s|_{C_i} = \phi|_{C_i}(\bar{s}_i)$ dla pewnego $\bar{s}_i \in \mathcal{H}(C_i)$.
Być może $(\bar{s}_i)$ nie jest zgodny. Niech $s_{jk} := s_j|_{C_{jk}}$. Zaczynamy poprawiać układ $(\bar{s}_i)$. Ponieważ $\bar{s}_{12} - \bar{s}_{21} \mapsto 0$, istnieje $c \in \mathcal{F}(C_{12})$ taki, że $\psi|_{C_{12}}(c) = \bar{s}_{12} - \bar{s}_{21}$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest miękki, istnieje przedłużenie c do $c' \in \mathcal{F}(U_2)$. Poprawiamy $\bar{s}_2$ do $\bar{s}_2 + c'$. Poprawiamy tak dalej i dalej, aż do dostania zgodnego systemu.
Krok 2
$H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.

Dowód kroku 2
Weźmy monomorfizm $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$, gdzie $\mathcal{I}$ jest injektywny i niech $\mathcal{G} := \mathrm{coker}(\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I})$. Wtedy mamy krótki ciągh dokładny snopów $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G}$, który daje nam długi ciąg dokładny grup abelowych

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{I}(X) \to \mathcal{G}(X) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{I}) \to \dots$$

Z Kroku 1, $\mathcal{I}(X) \to \mathcal{G}(X)$ jest "na", stąd $\mathcal{G}(X) \to H^1(X, \mathcal{F})$ jest odwzorowaniem zerowym. Dlatego $H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{I})$ jest "1-1". Ale $\mathcal{I}$ jest injektywny, dlatego $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$ i $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$.
Krok 3 (ćwiczenia – lista 10. zad. 5)
Każdy snop injektywny jest miękki.
Krok 4 (ćwiczenia – lista 10. zad. 4)
Jeśli mamy ciąg dokładny $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to 0$, gdzie $\mathcal{H}$ jest też miękki, to $\mathcal{G}$ jest miękki.
Krok 5
$\mathcal{F}$ jest Γ-acykliczny.
Weźmy ciąg dokładny jak w dowodzie kroku 2.

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0.$$

Z Kroku 3 i Kroku 4, snop $\mathcal{G}$ jest miękki.
Z długiego ciągu dokładnego funktorów pochodnych dostajemy acykliczny kompleks

$$0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{I}) \to \Gamma(\mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{I}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^2(X, \mathcal{F}) \to \dots$$

Ponieważ, $H^{>0}(X, \mathcal{I}) = 0$ dostajemy, że $H^i(X, \mathcal{G}) = H^{i+1}(X, \mathcal{F})$ dla $i \geqslant 1$. Z Kroku 1, $H^1(X, \mathcal{G}) = H^2(X, \mathcal{F}) = 0$ i dalej indukcyjnie $H^{>0}(X, \mathcal{F}) = 0$. $\square$

Lemat
Jeśli $\mathcal{R}$ jest miękkim snopem pierścieni na X, to każdy snop $\mathcal{R}$-modułów jest miękki.
Dowód
Niech $\mathcal{F}$ będzie snopem $\mathcal{R}$-modułów, $D \subseteq X$ domkniętym podzbiorem i $s \in \mathcal{F}$. Wtedy istnieje otwarty $D \subseteq U$ i $s' \in \mathcal{F}(U)$ taki, że $s'|F = s$.
Weźmy teraz $C \subseteq U$ domknięty, taki że dla $U' := \mathrm{Int}(C)$ mamy $D \subseteq U'$. C istnieje, bo X jest normalna (oddzielamy D od $X \setminus U$).
Niech

$$f_0 \in \mathcal{F}(D \cup (X \setminus U')), \quad f_0|_D := 1_{\mathcal{F}(D)}, \; f_0|_{X \setminus U'} := 0_{\mathcal{F}(X \setminus U')}$$

(f_0 istnieje, bo X jest normalna).
$\mathcal{R}$ jest miękki, stąd f_0 jest obcięciem pewnego $f \in \mathcal{R}(X)$. Definiujemy $\bar{s} \in \mathcal{F}(X)$

$$\bar{s}|_{X \setminus C} = 0, \quad \bar{s}|_U = f|_U s'.$$

$(X \setminus C) \cap U \subseteq X \setminus U'$, stąd $f|_{(X\setminus C)\cap U} = 0$ i $s|_{(X\setminus C)\cap U} = 0$. Stąd $\bar{s}$ jest dobrze określone (przez zgodną rodzinę).
Mamy również $\bar{s}|F = f|_F s'|_F = 1s = s$. □

Twierdzenie 2
Jeśli X jest gładka, to każdy snop $\mathcal{C}_X^\infty$-modułów jest miękki.
Jeśli X jest normalną przestrzenią topologiczną, to każdy snop $\mathcal{C}_X$-modułów jest miękki.
Dowód
Dla X gładkiej, snop $\mathcal{C}_X^\infty$ jest miękki z gładkiego rozkładu jedynki.
Dla X normalnej, snop $\mathcal{C}_X$ jest miękki z twierdzenia Tietze'a.
Wystarczy teraz zastosować twierdzenie 2. □

Wniosek
Jeśli X jest gładka, to

$$H^n(X, \mathbb{R}_X) \cong H^n_{DR}(X).$$

Uwaga
Snop $\mathcal{F}$ nazywamy wiotkim, gdy dla każdego otwartego $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ jest "na".
Każdy snop wiotki jest miękki stąd również Γ-acykliczny.
Snopy $\mathcal{C}_X^\infty$, $\mathcal{C}_X$ nie są wiotkie, ponieważ dla $X = \mathbb{R}$ i $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funkcja $1/x \in \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ nie przedłuża się nawet do funkcji ciągłej na $\mathbb{R}$.

Definicja
Niech X będzie przestrzenią topologiczną i A grupą abelową. Dla $U \subseteq X$ otwartego, $k \in \mathbb{N}$ i Δ_k sympleksu standardowego w $\mathbb{R}^{k+1}$ definiujemy

$$U^{\mathcal{S}^k} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_k, U), \quad \mathcal{S}^k_X(U, A) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(U^{\mathcal{S}^k}, A).$$

Dla $V \subseteq U$ inkluzja indukuje zanurzenie $V^{\mathcal{S}^k} \to U^{\mathcal{S}^k}$, które zadaje nam funkcję obcięcia $\mathcal{S}^k_X(U, A) \to \mathcal{S}^k_X(V, A)$.
$\mathcal{S}^k_X(U, A)$ – grupa *k-tych kołańcuchów singularnych na U o wartościach w A*.
Ponieważ funkcje obcięcia pochodzą od obcięć funkcji dostajemy snop $\mathcal{S}^k_X(\cdot, A)$
Zanurzenie i-tej ściany $\Delta_k \to \Delta_{k+1}$ daje różniczkę

$$\Delta^k_U : \mathcal{S}^k_X(U, A) \to \mathcal{S}^{k+1}_X(U, A),$$

która zadaje kompleks grup abelowych.

$$0 \to \mathcal{S}^0_X(U,A) \to \mathcal{S}^1_X(U,A) \to \dots \to \mathcal{S}^k_X(U,A) \to \dots \quad .$$

Kohomologie (n-te) tego kompleksu to $H^n(U,A)$ – *kohomologie singularne U o współczynnikach w A.*
Różniczki są przemienne z funcjami obcięcia $\mathcal{S}^k_X(U,A) \to \mathcal{S}^k_X(V,A)$, stąd dostajemy kompleks snopów

$$0 \to \mathcal{S}^0_X(\cdot,A) \to \mathcal{S}^1_X(\cdot,A) \to \dots \to \mathcal{S}^k_X(\cdot,A) \to \dots \quad .$$

Załóżmy teraz, że X jest *lokalnie ściągalna*, tzn. ma bazę złożoną ze zbiorów otwartych ściągalnych (np. X jest rozmaitością gładką albo ogólniej rozmaitością topologiczną). Wtedy dla każdego $x \in X$ i każdego otwartego $x \in U$ istnieje otwarty $x \in V \subseteq U$ taki, że $H^0(V,A) = A, H^{>0}(V,A) = 0$.
Stąd dla V jak wyżej następujący ciąg jest dokładny

$$0 \to A \to \mathcal{S}^0_X(V,A) \to \mathcal{S}^1_X(V,A) \to \dots \to \mathcal{S}^k_X(V,A) \to \dots \quad .$$

Zad. 1 listy 10. jest prawdziwe również dla długich ciągów dokładnych. Stąd następujący ciąg snopów jest dokładny

$$0 \to A_X \to \mathcal{S}^0_X(\cdot,A) \to \mathcal{S}^1_X(\cdot,A) \to \dots \to \mathcal{S}^k_X(\cdot,A) \to \dots \quad .$$

Twierdzenie
Powyższy ciąg dokładny jest Γ-acykliczną rezolwentą A_X.
Dowód
Z Uwagi wystarczy pokazać, że każdy snop $\mathcal{S}^k_X(\cdot,A)$ jest wiotki.
Weźmy $U \subseteq X$ otwarty i $f : U^{\mathcal{S}^k} \to A$. Wtedy f możemy trywialnie rozszerzyć do $\bar{f} : X^{\mathcal{S}^k} \to A$ (np. kładąc na $X \setminus U$ zero). $\square$

Wniosek
Dla lokalnie ściągalnej przestrzeni X, grupy abelowej A i $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$H^n(X,A) \cong H^n(X,A_X).$$

Definicja
Niech $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ będzie pokryciem X i $\mathcal{F}$ snopem na X. Definiujemy

$$C^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{(i_0,\dots,i_k)\in I^k} \mathcal{F}(U_{i_0\dots i_k}).$$

Definiujemy teraz różniczkę

$$\delta^k : C^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

$$\delta^k(c)(i_0, \ldots, i_{k+1}) := \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^i c(i_0, \ldots, i_{j-1}, i_{j+1}, \ldots, i_k)|_{U_{i_0 \cdots i_{k+1}}}.$$

Można pokazać, że dostajemy kompleks

$$0 \to C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \ldots \quad ,$$

którego k-te kohomologie oznaczamy przez $H^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.
Jeśli teraz mamy pokrycie $\mathcal{U}' = (u'_j)_{j \in J}$ wpisane w pokrycie $\mathcal{U}$ (tzn. istnieje $f : J \to I$ takie, że dla każdego $j \in J$, $U'_j \subseteq U_{f(j)}$), to dostajemy odwzorowania $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to C^k(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ zależne od wyboru wpisania f i przemienne z różniczkami. Stąd dostajemy homomorfizm grup $H^k(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^k(\mathcal{U}', \mathcal{F})$, który już nie zależy od wyboru f.
Pokrycia wraz z odwróconą relacją wpisania dają skierowany system prosty i $\widehat{H}^k(X, \mathcal{F})$ (kohomologie Čecha) jest granicą prostą grup $H^k(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ względem tego systemu.

Twierdzenie (bez dowodu).
Jeśli X jest parazwarta i $\mathcal{F}$ jest snopem grup abelowych, to

$$H^k(X, \mathcal{F}) \cong \widehat{H}^k(X, \mathcal{F}).$$

Definicje

1. Wiązkę nazywamy *liniową* gdy włókna są jednowymiarowe
2. Snop $\mathcal{R}$-modułów nazywamy *odwracalnym*, gdy jest lokalnie wolny rangi 1.
3. Dla rozmaitości algebraicznej X, $\operatorname{Pic}(X)$ to klasy izomorfizmów odwracalnych snopów $\mathcal{O}_X$-modułów z działaniem mnożenia tensorowego.

Fakt

1. Snopy odwracalne $\mathcal{O}_X$-modułów odpowiadają algebraicznym wiązkom liniowym. Podobnie dla wiązek topologicznych, gładkich i analitycznych.
2. $\operatorname{Pic}(X)$ jest grupą abelową (zwaną grupą Picarda).

Dowód

1. Oczywiste.

2. Najlepiej widać to na poziomie wiązek. Wiązki liniowe zadane są przez odwzorowania przejścia $g_{ij} : U_{ij} \to K^*$ spełniające warunek kocyklu. Iloczyn tensorowy odpowiada mnożeniu w K^*, stąd wiązka odwrotna odpowiada funkcjom $g'_{ij} := g_{ij}^{-1}$. $\square$

Algebraicznej wiązce liniowej odpowiada element z $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ w następujący sposób. Wiązka zadaje układ funkcji przejścia $g_{ij} : U_{ij} \to K^*$, który zadaje element $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$ dla $\mathcal{U} = (U_i)$. Warunek kocyklu mówi dokładnie, że ten element jest w jądrze różniczki, czyli dostajemy element z $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X^*)$, a co za tym idzie z $\widehat{H}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, które jest izomorficzne z $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$

Twierdzenie (bez dowodu)
Powyższe odwzorowanie zadaje izomorfizm grup

$$\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$