# GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 9

Niech $K$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $C$ będzie gładką planarną krzywą rzutową daną przez wielomian jednorodny $T \in K[X,Y,Z]$. Niech $F, G \in K[X,Y,Z]$ będą jednorodne i takie, że każdy z nich ma skończenie wiele zer na krzywej $C$ i że wszystkie te zera leżą na $C_*$.

1. Dla $x \in C_*$ powiemy, że *warunek Noethera jest spełniony dla* $C, F, G$, gdy:

$$F_* \in (T_*, G_*)K[X,Y]_{I(x)}.$$

   Załóżmy, że powyższy warunek Noethera jest spełniony dla wszystkich $x \in C$, dla których też mamy $G(x) = 0$. Udowodnić, że:

   (a) istnieją $a, b \in K[X,Y]$ takie, że $F_* = aT_* + bG_*$, wskazówka: skorzystać z udowodnionego na wykładzie faktu, że jeśli $I \lhd K[X,Y]$ i $V(I) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ jest skończony, to mamy:

$$K[X,Y]/I \cong_K K[X,Y]_{I(x_1)}/IK[X,Y]_{I(x_1)} \times \ldots \times K[X,Y]_{I(x_n)}/IK[X,Y]_{I(x_n)};$$

   (b) istnieją $r \in \mathbb{N}$ oraz $a', b' \in K[X,Y,Z]$ takie, że $Z^r F = a'T + b'G$ (wskazówka: skorzystać z zadania 7. Listy 8);

   (c) istnieją $a'', b'' \in K[X,Y,Z]$ takie, że $F = a''T + b''G$ (wskazówka: skorzystać z tego, że pewna funkcja z dowodu twierdzenia Bezout była różnowartościowa);

   (d) istnieją $A, B \in K[X,Y,Z]$ jednorodne i takie, że $F = AT + BG$ oraz

$$\deg(A) = \deg(F) - \deg(T), \ \deg(B) = \deg(F) - \deg(G).$$

   Podpunkt (d) to *$AF + BG$-Twierdzenie Noethera* (u nas trochę inne oznaczenia).

2. Załóżmy, że:

$$I(x, C \cap F) \geqslant I(x, C \cap G).$$

   Udowodnić, że warunek Noethera jest spełniony dla $C, F, G$ oraz $x$.

3. Załóżmy, że $A \in K[X,Y,Z]$ jest wielomianem jednorodnym i $\deg(A) = \deg(G) - \deg(T)$. Udowodnić, że

$$T \cdot (G + AT) = T \cdot G.$$

4. Udowodnić, że jeśli dla każdego $x \in C$ mamy

$$I(x, C \cap F) \geqslant I(x, C \cap G),$$

   to istnieje wielomian jednorodny $H \in K[X,Y,Z]$ taki, że

$$C \cdot F = C \cdot G + C \cdot H.$$