

GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 7

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech X będzie noetherowską przestrzenią topologiczną oraz

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

będzie otwartym pokryciem X . Udowodnić, że:

$$\dim(X) = \sup_{i \in I} \dim(U_i).$$

2. Niech V będzie rozmaitością rzutową i $U \subseteq V$ niepustym i otwartym podzbiorem V . Udowodnić, że

$$\dim(U) = \dim(V).$$

3. Udowodnić, że każde dwie proste w \mathbb{P}^2 mają niepusty przekrój.

4. Niech $H \in K[X_1, \dots, X_n]$ i $d \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

- (a) wielomian H jest jednorodny stopnia d ;
- (b) dla każdego $\lambda \in K$ zachodzi następująca równość w pierścieniu $K[X_1, \dots, X_n]$:

$$H(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda^d H.$$

5. Niech $F \in K[X_1, \dots, X_n]$, $d \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że:

- (a) $F = F_0 + \dots + F_d$;
- (b) $F_d \neq 0$;
- (c) dla każdego $i \leq d$, wielomian F_i jest jednorodny stopnia i lub $F_i = 0$.

Udowodnić, że:

$$\sum_{i=0}^d X_{n+1}^{d-i} F_i = X_{n+1}^d F \left(\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}} \right).$$

6. Znaleźć punkty w nieskończoności planarnych krzywych afinicznych poniżej i sprawdzić, czy te punkty są gładkie:

- (a) $V(\alpha X + \beta Y + 1)$ dla ustalonego $(\alpha, \beta) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}$;
- (b) $V(Y^2 - X^3)$;
- (c) $V(X^3 + Y^3 + 1)$;
- (d) krzywe z zadania 10. z Listy 4.