GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 6

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i R będzie pierścieniem.

1. Obliczyć następujące krotności przecięcia:

   (a) $I(0,(Y-X^2)\cap(Y^m+X^{2m}))$ dla $m\in\mathbb{N}_{>0}$;
   (b) $I(0,(Y^4+X^4-X^2)\cap(Y^2-X^3+X^2))$;
   (c) $I(0,(Y^4X^3+X^4Y^2-X^2+Y^7+Y^2+Y)\cap(Y^2-Y^5X^3+1+X^2))$;
   (d) $I(0,(Y-X^2)\cap(Y^3+X^6))$;
   (e) $I(0,(Y^4+X^4-X^2)\cap(Y^2-X^3+X^2))$;
   (f) $I(0,(XY^4+X^4-X^2+X^8+X)\cap(XY^2-X^3+X^2))$.

2. Niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym pierścienia R.

   (a) Przypomnieć definicję lokalizacji R_S (R nie musi byc dziedziną!).
   (b) Opisać jądro homomorfizmu
   $$\varphi: R\to R_S, \quad \varphi(r)=\frac{r}{1}.$$
   (c) Niech P będzie ideałem pierwszym w R oraz $e\in R\setminus P$ elementem takim, że $e^2=e$. Niech $\varphi: R\to R_P$ będzie jak w podpunkcie (b) powyżej. Udowodnić, że φ obcięte do eR zadaje izomorfizm pierścieni (z jedynką):
   $$eR\cong R_P.$$

3. Załóżmy, że $e_1,\ldots,e_m\in R$ są takie, że:

   (a) $e_1^2=e_1,\ldots,e_m^2=e_m$;
   (b) $e_1+\ldots+e_m=1$;
   (c) dla każdych $i\neq j$ mamy $e_ie_j=0$.

   Udowodnić, że funkcja:
   $$f: R\to e_1R\times\ldots\times e_mR, \quad f(r)=(re_1,\ldots,re_m)$$
   jest izomorfizmem pierścieni (przemiennych z 1).

4. Dla $i\in\{1,\ldots,n+1\}$ określamy:
   $$\pi_i:\mathbb{P}^{n-1}\to\mathbb{P}^n, \quad \pi_i([a_1:\ldots:a_n])=[a_1:\ldots:a_{i-1}:0:a_i:\ldots:a_n].$$
   Udowodnić, że funkcja π_i jest dobrze określona i że jest różnowartościowa.

5. Dla $i\in\{1,\ldots,n+1\}$ określamy:
   $$\varphi_i:\mathbb{A}^n\to\mathbb{P}^n, \quad \varphi_i(a_1,\ldots,a_n)=[a_1:\ldots:a_{i-1}:1:a_i:\ldots:a_n]$$
   i definiujemy $U_i:=\varphi_i(\mathbb{A}^n)\subset\mathbb{P}^n$.

   (a) Udowodnić, że w przypadku $n=1$ mamy
   $$\varphi_1^{-1}(U_1\cap U_2)=\varphi_2^{-1}(U_1\cap U_2)=\mathbb{A}^1\setminus\{0\};$$
   $$\forall x\in\mathbb{A}^1\setminus\{0\} \qquad \varphi_2^{-1}(\varphi_1(x))=1/x.$$
   Czyli $\mathbb{P}^1$ możemy rozumieć jako dwie kopie $\mathbb{A}^1$ sklejone wzdłuż podzbioru (tego samego dla obu kopii) $\mathbb{A}^1\setminus\{0\}\subset\mathbb{A}^1$ dzięki następującej funkcji sklejenia:
   $$\mathbb{A}^1\setminus\{0\}\to\mathbb{A}^1\setminus\{0\}, \quad x\mapsto 1/x.$$

(b) Uogólnić podpunkt (a) powyżej z przypadku $n = 1$ na przypadek dowolnego $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(c) Zdefiniować (sensownie!) topologię Zariskiego na $\mathbb{P}^n$ używając podpunktu (b) powyżej.

(d) Dla $K = \mathbb{C}$ zdefiniować (sensownie!) topologię euklidesową na $\mathbb{P}^n$ używając podpunktu (b) powyżej.

(e) Dla $K = \mathbb{C}$ zdefiniować (sensownie!) strukturę rozmaitości (zespolonej bądź różniczkowej) na $\mathbb{P}^n$ używając podpunktów (b) i (d) powyżej.

(f) Dla $K = \mathbb{C}$, udowodnić że mamy dyfeomorfizm (bądź jedynie homeomorfizm w topologii euklidesowej)

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2,$$

gdzie S^2 jest sferą (Riemanna), używając podpunktu (e) powyżej.