GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 4

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $k, n, m \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Załóżmy, że V jest rozmaitością algebraiczną i $f \in K(V)$. Udowodnić, że $\mathrm{dom}(f)$ jest podzbiorem otwartym Zariskiego w V.

2. Dla maksymalnego idealu $\mathfrak{m}$ w dziedzienie R, niech
$$R_{\mathfrak{m}} = \{a/b \in R_0 \mid a \in R,\ b \in R \setminus \mathfrak{m}\} \subseteq R_0.$$
Udowodnić, że
$$R = \bigcap \{R_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \text{ jest ideałem maksymalnym } R\}.$$

3. Niech T będzie dziedziną. Definiujemy:
$$\partial : T[X] \to T[X],\ \ \partial(a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n) = a_1 + \ldots + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + na_nX^{n-1}.$$
Udowodnić, że:
   (a) funkcja ∂ jest różniczkowaniem;
   (b) jeśli $\mathrm{char}(T) = 0$, to $\partial^{-1}(0) = T$;
   (c) jeśli $\mathrm{char}(T) = p > 0$, to $\partial^{-1}(0) = T[X^p]$.

4. Załóżmy, że:
   - $G_1, \ldots, G_k, F_1, \ldots, F_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$;
   - $G_1, \ldots, G_k \in (F_1, \ldots, F_m)$;
   - $\bar{F} := (F_1, \ldots, F_m),\ \bar{G} := (G_1, \ldots, G_k)$;
   - $v \in V(\bar{F})$.

   Udowodnić, że każdy wiersz macierzy $J_{\bar{G}}(v)$ jest K-liniową kombinacją wierszy macierzy $J_{\bar{F}}(v)$.

5. Niech $F_1, \ldots, F_n \in K[X_1, \ldots, X_n]$ i $\bar{F} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ będzie morfizmem, gdzie $\bar{F} = (F_1, \ldots, F_n)$.
   (a) Udowodnić, że jeśli $\bar{F}$ jest izomorfizmem, to $\det(J_{\bar{F}}) \in K^*$.
   (b) Co sądzicie o implikacji przeciwnej do tej w punkcie (a)?

6. Załóżmy, że $K = \mathbb{C}$ i że $V \subseteq \mathbb{A}^n$ jest gładką rozmaitością algebraiczną. Udowodnić, że V jest zespoloną podrozmaitością $\mathbb{C}^n$ (lub różniczkowalną podrozmaitością $\mathbb{R}^{2n}$). W szczególności, V jest też rozmaitością w sensie geometrii różniczkowej.

7. Niech P będzie ideałem pierwszym w pierścieniu R. Udowodnić, że:
   (a) $(R/P)_0 \cong_R R_P/PR_P$;
   (b) ilorazy P/P^2 oraz $PR_P/(PR_P)^2$ mają naturalne struktury R/P-modułów;
   (c) jeśli ideał P jest maksymalny, to mamy
$$P/P^2 \cong_{R/P} PR_P/(PR_P)^2.$$

8. Załóżmy, że $F, G \in K[X, Y]$ są nierozkładalne i że F nie dzieli G. Niech $V = V(FG) \subseteq \mathbb{A}^2$ oraz $a \in V$ będzie taki, że $F(a) = G(a) = 0$. Udowodnić, że a jest punktem osobliwym V.

9. Niech $F \in K[X,Y]$ i $V = V(F) \subseteq \mathbb{A}^2$. Udowodnić, że:

(a) jeśli $F \notin K$, to V jest nieskończony;

(b) jeśli $V(F, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y})$ jest skończony, to $\sqrt{(F)} = (F)$ oraz $I(V) = (F)$;

(c) jeśli $V(F, \frac{\partial F}{\partial X}, \frac{\partial F}{\partial Y}) = \emptyset$, to V jest gładką rozmaitością algebraiczną.

10. Załóżmy, że $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Dla poniższych $F \in K[X,Y]$, znaleźć punkty osobliwe $V(F)$ oraz dopasować krzywe $V(F)$ do poniższego obrazka.

(a) $F = Y^4 + X^4 - X^2$.

(b) $F = Y^6 + X^6 - XY$.

(c) $F = Y^4 + X^4 + Y^2 - X^3$.

(d) $F = Y^4 + X^4 - X^2Y - XY^2$.