GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 2

Niech $K \subseteq L$ będzie rozszerzeniem ciał, $A \subseteq L$, $a, b \in L$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

(1) Udowodnić, że istnieje wieża ciał $K \subseteq L_0 \subseteq L$, taka że rozszerzenie $K \subseteq L_0$ jest czysto przestępne i rozszerzenie $L_0 \subseteq L$ jest algebraiczne.
(**Definicja:** Rozszerzenie ciał $K \subseteq L_0$ jest *czysto przestępne*, gdy istnieje $B \subseteq L_0$, taki że B jest algebraicznie niezależny nad K i $L_0 = K(B)$.)

(2) Udowodnić, że jeśli $K \subseteq L$ jest czysto przestępne, to wtedy dla każdego $x \in L \setminus K$, mamy że x jest przestępny nad K.

(3) Znaleźć przykład rozszerzenia ciał $K \subseteq M$, takiego że:
  (a) Dla każdego $x \in M \setminus K$, x jest przestępny nad K, ale rozszerzenie $K \subseteq M$ nie jest czysto przestępne.
  (b) Nie istnieje wieża ciał $K \subseteq L \subseteq M$, taka że rozszerzenie $K \subseteq L$ jest algebraiczne i rozszerzenie $L \subseteq M$ jest czysto przestępne.

(4) Załóżmy, że $a \notin A$. Udowodnić, że $A \cup \{a\}$ jest algebraicznie niezależny nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebraicznie niezależny nad K i a jest przestępny nad $K(A)$.

(5) Udowodnić, że A jest bazą przestępną L nad K wtedy i tylko wtedy, gdy A jest algebraicznie niezależny nad K i rozszerzenie $K(A) \subseteq L$ jest algebraiczne.
(**Definicja:** Podzbiór $A \subseteq L$ jest *bazą przestępną* L nad K, gdy A jest maksymalnym podzbiorem L, który jest algebraicznie niezależny nad K.)

(6) *Zasada Wymiany Steinitza*
Udowodnić, że jeśli a jest algebraiczny nad $K(A \cup \{b\})$ i a jest przestępny nad $K(A)$, to wtedy b jest algebraiczny nad $K(A \cup \{a\})$.

(7) Udowodnić, że jeśli B i B' są przestępnymi bazami L nad K, to $|B| = |B'|$.
(**Definicja:** Moc powyższego B jest nazywana *stopniem przestępnym* L nad K i jest oznaczana przez $\mathrm{trdeg}_K L$.)

(8) Załóżmy, że M jest ciałem, $\varphi : K \to M$ jest izomorfizmem i $K \subseteq K'$, $M \subseteq M'$ są algebraicznymi domknięciami. Udowodnić, że φ rozszerza się do izomorfizmu pomiędzy K' i M'.

(9) Niech $K \subseteq L'$ będzie rozszerzeniem ciał, takim że:
$$\mathrm{trdeg}_K L = \mathrm{trdeg}_K L'.$$
Udowodnić, że gdy L i L' są algebraicznie domknięte, to wtedy $L \cong_K L'$.

(10) Udowodnić, że gdy L i L' są nieprzeliczalnymi algebraicznie domkniętymi ciałami tej samej charakterystyki i tej samej mocy, to $L \cong L'$.

(11) Załóżmy, że $F \in K[X, Y]$ jest nierozkładalny i niech $L := (K[X, Y]/(F))_0$ (ciało ułamków). Udowodnić, że $\mathrm{trdeg}_K L = 1$.

(12) Niech P będzie ideałem pierwszym pierścienia R i I, J będą ideałami R, takimi że $P = I \cap J$. Udowodnić, że $P = I$ lub $P = J$.

(13) Niech R będzie pierścieniem, $u \in R^*$ i $a \in R$. Udowodnić, że funkcja
$$R \ni r \mapsto r + (uX + a) \in R[X]/(uX + a)$$
jest izomorfizmem.

(14) Dla których n, wielomian $Y^2 - X^n \in K[X, Y]$ jest nierozkładalny?