GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 1

Niech X będzie niepustą przestrzenią topologiczną, K ciałem algebraicznie domkniętym, V rozmaitością afiniczną (nad K), $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ i I zbiorem (parametrów).

(1) Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
  (a) X jest noetherowska;
  (b) każda niepusta rodzina podzbiorów domkniętych X ma element minimalny (względem relacji inkluzji);
  (c) jest spełniony wstępujący warunek łańcucha względem podzbiorów otwartych X;
  (d) każda niepusta rodzina podzbiorów otwartych X ma element maksymalny (względem relacji inkluzji).

(2) Udowodnić, że jeśli X jest noetherowska, to X jest *quasi-zwarta*, tzn. każde otwarte pokrycie X ma skończone podpokrycie.

(3) Udowodnić, że X jest noetherowską przestrzenią Hausdorffa wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończona z topologią dyskretną.

(4) Udowodnić, że jeśli $Y \subseteq X$, to $\dim(Y) \leqslant \dim(X)$.

(5) Podać przykład X, która jest noetherowska i $\dim(X) = \infty$.

(6) Udowodnić, że jeśli X jest nierozkładalna i Hausdorffa, to $|X| = 1$.

(7) Niech $Y \subseteq X$. Udowodnić, że Y jest nierozkładalny (jako przestrzeń topologiczna z topologią indukowaną z X) wtedy i tylko wtedy, gdy domknięcie Y w X jest nierozkładalne.

(8) Niech X będzie nierozkładalna i załóżmy, że $U \subseteq X$ jest otwarty i niepusty. Udowodnić, że U jest gęsty w X.

(9) Załóżmy, że X jest nierozkładalna, podzbiór $Y \subseteq X$ jest domknięty i $\dim(Y) = \dim(X) < \infty$. Udowodnić, że $Y = X$.

(10) Załóżmy, że X jest noetherowska i T_1 (singletony są domknięte). Udowodnić, że $\dim(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest skończona.

(11) Załóżmy, że $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ to nierozkładalne podzbiory X takie, że:

$$X_1 \cup \ldots \cup X_n = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$$

oraz dla wszystkich możliwych $k \neq l$ mamy $X_k \nsubseteq X_l$ i $Y_k \nsubseteq Y_l$. Udowodnić, że $n = m$ oraz, że istnieje permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że

$$X_1 = Y_{\sigma(1)}, \ldots, X_n = Y_{\sigma(n)}.$$

(12) Załóżmy, że $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$, gdzie zbiory $X_1, \ldots, X_k$ są domknięte w X. Udowodnić, że:

$$\dim(X) = \max\left(\dim(X_1), \ldots, \dim(X_k)\right).$$

(13) Niech k będzie nieskończonym ciałem i $F, G \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Udowodnić, że jeśli F i G definiują te same funkcje wielomianowe z k^n w k, to $F = G$. Znaleźć kontrprzykład dla $k = \mathbb{F}_2$.

(14) Udowodnić, że topologia Zariskiego na $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ nie pokrywa się z topologią produktową (pochodzącą z topologii Zariskiego na $\mathbb{A}^1$).

(15) Udowodnić, że jeśli podzbiór $W \subset \mathbb{A}^n$ jest skończony, to:

$$K[W] = \mathrm{Fun}(W, K).$$

(16) Niech $K = \mathbb{C}$. Znaleźć wielomian $F \in \mathbb{R}[X, Y]$, który jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{R}[X, Y]$ i taki, że $V(F) \cap \mathbb{R}^2$ jest niepusty i rozkładalny (z topologią indukowaną z $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$).

(17) Załóżmy, że $V_i \subseteq \mathbb{A}^n$ oraz $A, A_i \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ dla $i \in I$. Udowodnić, że:

(a) $V(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} V(A_i)$;

(b) $V(A) = V((A))$ ((A) to ideał w $K[X_1, \ldots, X_n]$ generowany przez A);

(c) $I(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcap_{i \in I} I(V_i)$;

(d) $A \subseteq I(V(A))$.

(18) Udowodnić, że każda krzywa planarna V jest krzywą afiniczną (tzn. $\dim(V) = 1$).

(19) Niech $V = V(YX-1) \subset \mathbb{A}^2$. Udowodnić, że K-algebry $K[V]$ i $K[\mathbb{A}^1]$ nie są izomorficzne (nawet jako pierścienie!).

(20) Niech $F \in K[X, Y]$ będzie nierozkładalny stopnia 2. Udowodnić, że K-algebra $K[X, Y]/(F)$ jest izomorficzna z $K[X, 1/X]$ lub z $K[X]$.

(21) Niech

$$V = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{A}^3 \mid t \in K\}.$$

Udowodnić, że V jest krzywą algebraiczną.

(22) Niech

$$V = V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3.$$

Opisać rozkład V na składowe nierozkładalne.

(23) Niech $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2$. Udowodnić, że pierścień $K[V]$ nie jest UFD.

(24) Niech R będzie pierścieniem PID, który nie jest ciałem. Udowodnić, że $\dim(R) = 1$.