

ALGEBRA 1, Lista 2

Konwersatorium 9.10.2025, Ćwiczenia 14.10.2025.

Oznaczenia zadań: S: do samodzielnego wykonania, K: do omówienia na konwersatorium.

0S. Materiał teoretyczny: Działania dodawania i mnożenia modulo n . Pojęcie podgrupy, homomorfizmu grup i izomorfizmu grup. Notacja mnożykowa i addytywna. Grupy permutacji i grupy macierzy. Grupy izometrii własnych prostokąta i trójkąta równobocznego, grupa czwórkowa Kleina K_4 . Izomorfizm grupy izometrii własnych trójkąta równobocznego i S_3 .

1S. Napisać tabelki działania i mnożenia modulo 6: $+_6, \cdot_6$ w zbiorze reszt modulo 6, to znaczy w zbiorze $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2S. Rozważmy bijekcję $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6$ o następujących wartościach:

$$f(0) = 3, f(1) = 5, f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2, f(5) = 4.$$

Niech $*$ będzie działaniem indukowanym w zbiorze \mathbb{Z}_6 przez działanie $+_6$ poprzez funkcję f , zaś \circ działaniem indukowanym w zbiorze \mathbb{Z}_6 przez działanie \cdot_6 poprzez funkcję f . Sporządzić tabelki działań $*$ i \circ .

3. Niech (G, \cdot) będzie grupą i $A \subseteq G$. Dla poniższych (G, \cdot) i A sprawdzić, czy podzbiór A jest zamknięty na działanie \cdot . Jeśli tak, to sprawdzić czy A jest podgrupą grupy (G, \cdot) .

(a)S $G = (\mathbb{C}, +)$; $A = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (okrąg).

(b)S $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; $A = (0, \infty)$ (dodatnie liczby rzeczywiste).

(c)S $G = S_3$; $A = \left\{ \text{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(d)K $G = (\mathbb{Z}_8, +_8)$; $A = \{0, 2, 4, 6\}$.

(e)K $G = (\mathbb{Z}, +)$; $A = \mathbb{Z}_7$.

(f)K $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$; $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ (n -te pierwiastki z 1).

4. Niech H i N będą podgrupami grupy G . Udowodnić, że $H \cap N$ jest podgrupą grupy G .

5. Niech G będzie grupą. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$ i $g, h \in G$ udowodnić, że:

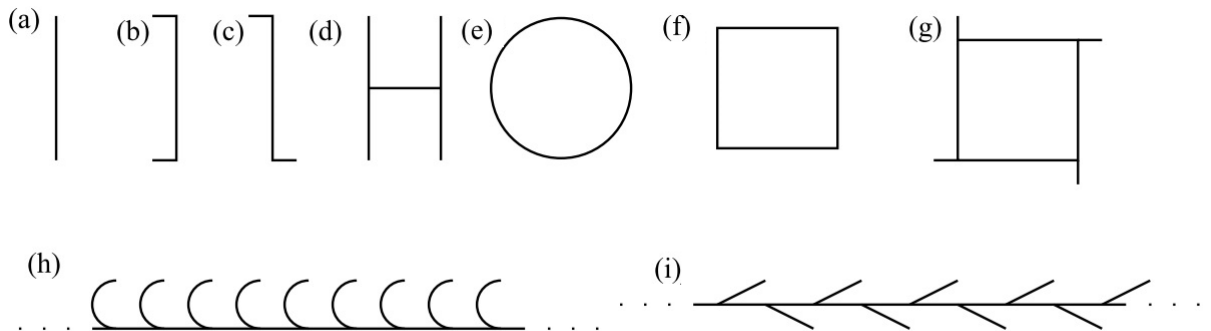
(a) $g^k g^l = g^{k+l}$;

(b) $(g^k)^l = g^{kl}$;

(c) $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$;

(d) jeśli $gh = hg$, to $(gh)^k = g^k h^k$.

6. Wyznaczyć grupy izometrii własnych następujących figur płaskich (czyli podzbiorów \mathbb{R}^2). Które z tych grup są ze sobą izomorficzne? Które z tych grup są abelowe?



7. Załóżmy, że w grupie G mamy $a^2 = e$ dla wszystkich $a \in G$. Udowodnić, że G jest abelowa.

8. Udowodnić, że grupa G jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy $(ab)^2 = a^2 b^2$ dla wszystkich $a, b \in G$.

9. Wskazać 6 różnych izomorfizmów między grupą izometrii własnych trójkąta równobocznego i grupą permutacji S_3 .