ALGEBRA 1, Lista 8

Konwersatorium 6.12.2024. Na Kolokwium 2 (6.12.2024) obowiązują listy zadań 1.–7.

0S. Automorfizmy wewnętrzne grup: definicja, własności i przykłady. Grupa $\mathrm{Inn}(G)$ automorfizmów wewnętrznych grupy G, związek z centrum grupy $Z(G)$. Relacja sprzężenia w grupie G. Opis relacji sprzężenia w przypadku grup permutacji.

1S. W dowolnej grupie G udowodnić, że dla danego $a \in G$ zbiór

$$C(a) = \{g \in G \mid ag = ga\}$$

jest podgrupą grupy G (zwaną *centralizatorem* elementu a w grupie G).

2K. Niech $\sigma = (1,2)(3,4,5) \in S_5$.

(a) Wypisać wszystkie permutacje τ w grupie S_5, które są sprzężone z permutacją σ. Za każdym razem wskazać permutację f taką, że $\tau = \varphi_f(\sigma)$ (przypomnienie: $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$).

(b) Znaleźć zbiór wszystkich permutacji w S_5, które są przemienne z permutacją σ (wskazówka: τ jest przemienna z $\sigma \iff \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$).

3K. Załóżmy, że grupa G ma jedyną podgrupę H rzędu 25. Udowodnić, że $H \trianglelefteqslant G$. (wskazówka: dla $g \in G$, rozważyć podgrupę $\varphi_g(H) \leqslant G$).

4K. W następujących grupach G opisać klasy sprzężenia:

(a) $G = Q_8$;

(b) $G = D_3$;

(c) $G = D_4$.